ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME I.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

MEMORIE

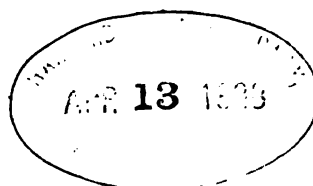
DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME I.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RELAZIONE

letta dal Socio P. Blaserna, relatore, a nome anche del Socio G. Lorenzoni, nella seduta del 4 dicembre 1892, sulla Memoria dei professori G. Pisati e E. Pucci, presentata dal dott. V. Reina, intitolata: *Intorno alla lunghezza del pendolo a secondi in Roma.*

« Il dott. Reina, che fu assistente alla cattedra di Geodesia, occupata dal professor Pucci, ha raccolto con pietosa cura tutto l'immenso materiale di ricerche esatte e coscienziose lasciato dai compianti due professori Pisati e Pucci. Esso ha riveduto i loro calcoli, li ha completati e presenta all'Accademia tutto quanto si riferisce alla loro larga e minuziosa indagine, che l'Accademia incoraggiò con un premio Reale, intorno alla lunghezza del pendolo a secondi in Roma.

« I Commissarî hanno esaminato con interesse la Memoria, e benchè, nell'attuale mancanza di una verifica del risultato finale ottenuta per via di esperimento [1], potrebbe sembrare desiderabile che il modo ivi tenuto nel combinare le osservazioni fosse accompagnato da qualche ulteriore considerazione giustificativa, essi non esitano un istante a proporne all'Accademia l'inserzione integrale nei suoi Atti.

« Se per motivi di economia l'Accademia desiderasse di restringere, col minore danno possibile, qualche parte della voluminosa Memoria, si potrebbero sagrificare i quadri delle osservazioni astronomiche contenenti i particolari delle misure del tempo, sostituendovi una dichiarazione del motivo per il quale non vengono stampati, e l'avvertenza che verranno custoditi negli archivî dell'Accademia.

« Così potrebbesi pure stralciare la parte che riguarda la determinazione della latitudine, per istamparla a parte sotto proprio titolo e col nome del proprio autore; nel quale caso non sarebbe difficile di trovarle una sede più appropriata ».

[1] Le misure della gravità relativa fatte a Roma, a Milano ed a Padova col mezzo dell'apparato pendolare di Sterneck nell'autunno 1893 (cioè oltre un anno dopo la presentazione della Memoria del Reina) hanno dimostrato un accordo bellissimo fra il risultato che il Reina ha dedotto dalle osservazioni dei professori Pucci e Pisati e i risultamenti cui erano pervenuti il Biot a Milano e Padova, il Sabine ad Altona ed il Bessel a Berlino.

(Giugno 1894).

Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi in Roma. Esperienze eseguite dai prof. G. PISATI ed E. PUCCI pubblicate per cura di V. REINA.

Incaricato dal prof. Cremona, Direttore della Scuola degli Ingegneri di Roma, di redigere una Relazione sulle esperienze eseguite dai compianti prof. G. Pisati ed E. Pucci, per determinare il valore della gravità, esperienze sventuratamente troncate insieme alla loro preziosa esistenza, pieno di trepidazione mi accinsi al lavoro, non dissimulandomi le gravi difficoltà di condurlo a buon termine.

Era intenzione degli egregi Autori, come già essi ebbero a dichiarare nella Memoria, *Sulla lunghezza del pendolo a secondi*, pubblicata nel 1882 negli Atti di questa R. Accademia, di instituire, contemporaneamente alle ricerche sulla gravità, delle esperienze sulla resistenza dei mezzi, allo scopo di poter valutare, con maggior precisione di quanto non si fosse fatto fin allora, l'azione perturbatrice dell'aria sul moto dei pendoli. Fra il dicembre 1883 e l'aprile 1887 venne perciò eseguita una lunga serie di esperienze, conservando sempre il metodo differenziale di Bessel, adoperando palle di densità molto diversa, e mutando quanto più fosse possibile le circostanze delle misure.

Queste esperienze, quantunque fossero atte a dare un valore abbastanza esatto della lunghezza del pendolo a secondi, non erano però tali da rispondere in modo soddisfacente alla seconda parte del programma propostosi dagli Autori, dalla attuazione della quale essi si ripromettevano il conseguimento di una maggior precisione anche nel determinare la lunghezza suddetta. Già durante questo periodo di tempo era stato costruito un apparecchio per fare oscillare dei pendoli nel vuoto e sotto pressioni variabili: se ne fece costruire un secondo il quale servisse di confronto al primo, e le esperienze continuarono negli anni 1888 e 89. Ma il presentarsi di nuove e rinascenti difficoltà, e di certe anomalie delle quali indarno si ricercarono le cause, fece continuamente indugiare la pubblicazione dei risultati conseguiti, finchè la malattia dalla quale furono fatalmente colpiti, a breve distanza gli Autori, e la susseguente morte immatura, troncarono l'attuazione del loro piano grandioso.

Dopo un esame lungo e minuzioso dell'immenso materiale accumulato dal loro lavoro febbrile, e dopo un attento controllo dei calcoli già eseguiti, mi potei convin-

cere della possibilità e della opportunità di una pubblicazione, limitandomi alla prima parte del programma, cioè alla determinazione della lunghezza del pendolo a secondi, non essendo le esperienze fatte coi pendoli nel vuoto, a cagione della loro interruzione, tali, da condurre a una conclusione definitiva riguardo alla resistenza dei mezzi.

Dalle esperienze eseguite coi pendoli oscillanti nell'aria e con 10 palle diverse, io dovetti però escludere quelle effettuate colla palla d'ottone cava di maggiori dimensioni, le quali, quando non si abbia specialmente in vista di studiare la resistenza del mezzo, male si prestano, per la soverchia piccolezza della densità relativa della palla, alla ricerca della intensità della gravità. Le esperienze conservate furono perciò 39. — I calcoli di riduzione delle singole esperienze erano già stati fatti in gran parte ed in doppia copia dal prof. Pisati e dai sig.ri Antonio Cavazzana, verificatore dell'Ufficio Metrico Centrale, Silvio Marianni, calcolatore del Gabinetto di Geodesia, ed Elvino Castellani, preparatore del Gabinetto di Fisica-tecnica: le lacune rimanenti, non molto numerose, si poterono facilmente colmare. — I calcoli occorrenti per la combinazione delle 39 esperienze, secondo il metodo dei minimi quadrati ed i numerosi calcoli sussidiarî, per determinare la precisione dei risultati, furono eseguiti in doppia copia da me e dal sig. Elvino Castellani, il quale mi coadiuvò validamente nella preparazione delle tavole numeriche.

I dati relativi alla illuminazione ed al riscaldamento della sala del pendolo, e la descrizione del termosifone, del termometro metallico e del termoscopio elettrico, mi furono forniti dal prof. Moisé Ascoli, il quale, durante tutto il lavoro, mi fu largo di consigli e di suggerimenti. I risultati della comparazione dei diversi pezzi della pesiera mi furono comunicati dal sig. Napoleone Reggiani, direttore dell'Ufficio Metrico Centrale, il quale, all'epoca delle esperienze, aveva fatte quasi completamente le pesate dei diversi elementi dei pendoli. Ad entrambi rendo le più vive grazie.

I disegni degli apparecchi, abilmente costruiti dal sig. Gino Ceccarelli nella Officina Meccanica, addetta alla Scuola degli Ingegneri, furono eseguiti dal sig. Ubaldo Lapi, disegnatore della Scuola.

Valgano i miei sforzi ad innalzare un ricordo durevole alla memoria dei miei venerati Maestri.

Roma, maggio 1892.

V. Reina.

§ I. — Modificazioni introdotte dopo la prima pubblicazione.

Nella Memoria intitolata: *Sulla lunghezza del pendolo a secondi* [1] vennero già esposti i metodi ritenuti più opportuni per determinare il valore assoluto della accelerazione di gravità, e descritti gli apparecchi a tale scopo impiegati. Alcune esperienze preliminari, riportate e discusse nella predetta Memoria, condussero al valore provvisorio

$$g = 980.^{\text{cm}}\,3862,$$

affetto però da un errore probabile assai maggiore di quello che conveniva al sistema di misura e di calcolo adottato.

Le esperienze allora iniziate vennero proseguite negli anni 1883-84-85-87, conservando sempre il metodo differenziale di Bessel, ma introducendo negli apparecchi e nei procedimenti d'osservazione numerose e notevoli modificazioni, aventi per oggetto di attuare la misura delle singole grandezze, occorrenti nelle esperienze, col massimo grado di precisione raggiungibile coi mezzi attuali.

Queste modificazioni si possono riassumere così:

1°. Isolamento assoluto degli apparecchi e del regolatore del tempo dagli osservatori;

2.° Disposizioni per mantenere la temperatura costante, non solo nell'ambiente degli apparecchi, ma anche nelle loro singole parti;

3°. Disposizioni per verificare la stabilità degli assi dei microscopi, del muro che serve loro di sostegno, dell'asse di rotazione del pendolo, e per misurare col massimo rigore la distanza fra i microscopi;

4.° Installazione di uno strumento a passaggi di Bamberg, suo studio e suo uso per regolare astronomicamente l'andamento del regolatore del tempo (orologio *Dent*);

5.° Disposizioni per eliminare gli errori dovuti alla non esatta valutazione dei momenti d'inerzia dei corpi oscillanti, in conseguenza della eventuale non omogenea distribuzione della loro densità.

Senza entrare in particolari circa le ragioni che indussero a prescegliere il metodo di Bessel, ed omettendo la descrizione generale del modo con cui esso venne tradotto in atto, qui, dopo un breve richiamo dei principî sui quali riposa, si parlerà dettagliatamente soltanto delle precedenti modificazioni, rimandando il lettore alla Memoria sopra accennata, le cui citazioni si denoteranno colle lettere V. M. (Vedi Memoria).

§ II. — Richiamo dei principî del metodo differenziale di Bessel.

Si rappresenti con λ la lunghezza del pendolo semplice a secondi sotto la latitudine φ del luogo di osservazione, ed all'altezza di questo sul mare, e si consideri

[1] Atti della Reale Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze fisiche ecc., vol. XV pag. 57 segg. (1882-83).

un pendolo composto la cui durata d'oscillazione, espressa in secondi di tempo medio e per archi infinitamente piccoli, sia t. Se m è la massa del corpo oscillante, s la distanza del suo baricentro dall'asse di sospensione, m' la massa del fluido spostato, s' la distanza del baricentro di questa dall'asse suddetto, la lunghezza L del pendolo semplice, isocrono col composto, è data dalla formola (V. M. § VII).

$$1) \qquad L = \lambda t^2 \frac{1 - \dfrac{m's'}{ms}}{1 + \dfrac{m'}{m} k} .$$

Il *coefficiente idrodinamico* k di Bessel, dietro le ricerche teoretiche di Stokes e di Meyer, quando il pendolo sia costituito da un corpo sferico sospeso ad un filo sottile, è espresso dalla formola

$$2) \qquad k = 0.5 + \frac{1.79524}{R} \sqrt{\eta_0} \sqrt{\frac{t(273+\theta)}{\varrho}} ,$$

dove con R si rappresenta il raggio del corpo oscillante, con ϱ la densità del mezzo, con θ la sua temperatura centigrada, con η_0 il *coefficiente d'attrito interno* del mezzo, corrispondente allo zero assoluto.

Il metodo più conveniente per la determinazione della costante η_0, e quindi del coefficiente k, quando non si vogliano affrontare le grandi difficoltà di eseguire esperienze collo stesso pendolo nel vuoto e nell'aria, è quello di esperimentare con pendoli dotati di masse molto diverse, come venne suggerito dallo stesso Bessel.

Se il valore di k si sostituisce nell'equazione 1), e si pone

$$3) \qquad \lambda = \lambda_0 + x , \qquad \sqrt{\eta_0} = y ,$$

dove con λ_0 s'intende un valore prossimo di λ (nei calcoli seguenti si adotterà il valore $\lambda = 99.^{cm} 3339$ trovato, per la lunghezza del pendolo semplice, nella citata Memoria (§ XXXII), si ottiene

$$4) \quad L = \lambda_0 t^2\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - 0.5 L\frac{m'}{m} + xt^2\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - \frac{1.79524}{R} y L \frac{m'}{m} \sqrt{\frac{t(273+\theta)}{\varrho}} .$$

La caratteristica del metodo di Bessel sta nella determinazione della differenza di lunghezza di due pendoli *coniugati*, costituiti dalla stessa palla, oscillante intorno alle stesso asse di sospensione. Indicando con F la distanza dell'asse ideale di sospensione dei due pendoli dall'asse del microscopio inferiore, con h l'altezza del baricentro di una delle due palle su questo stesso asse, si ha (V. M. § VII).

$$5) \qquad L = F - h - c ,$$

essendo c la *costante di riduzione* del pendolo composto a pendolo semplice. Essa è determinata dalla formola

$$6)\qquad c=\frac{\sum_{r=1}^{r=n} m_r s_r (s_n - s_r) - \sum_{r=1}^{r=n} u_r}{\sum_{r=1}^{r=n} m_r s_r} - \frac{(L - R') u'^2_n}{m'^2_n R' L^3},$$

dove $m_1\, m_2 \ldots m_n$ rappresentano le varie masse costituenti il pendolo composto, $s_1\, s_2 \ldots s_n$ le distanze dei loro baricentri dall'asse di sospensione, $u_1\, u_2 \ldots u_n$ i loro momenti d'inerzia rispetto ad assi passanti pei baricentri stessi e paralleli all'asse di sospensione: l'ultimo valore n dell'indice r si riferisce alla palla. Nel secondo termine, che fornisce la piccola correzione di Laplace, relativa alla flessibilità del filo, m'_n e u^1_n sono i valori che assumono m ed u per il corpo sospeso al filo flessibile, ed R' la distanza fra il baricentro di esso corpo ed il punto di congiunzione col filo.

La sostituzione del valore 4) di L nella 5), conduce all'equazione

$$F = h + c + \lambda_0 t^2 \left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - 0.5\,(F - h - c)\frac{m'}{m} + xt^2\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - \frac{1.79524}{R}\, y\,(F - h - c)\frac{m'}{m}\sqrt{\frac{t\,(273 + \theta)}{\varrho}}\,.$$

Se si contrassegnano coll'indice 1 gli elementi relativi al pendolo lungo, coll'indice 2 quelli relativi al pendolo corto, e si indicano come precedentemente con m ed m' le masse del corpo oscillante e del fluido spostato nel primo caso, con m'' ed m''' le analoghe masse nel secondo, si ottengono le due equazioni

$$F = h_1 + c_1 + \lambda_0 t_1^2 \left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - 0.5\,(F - h_1 - c_1)\frac{m'}{m} + xt_1^2\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - \frac{1.79524}{R}\, y\,(F - h_1 - c_1)\frac{m'}{m}\sqrt{\frac{t_1\,(273 + \theta_1)}{\varrho_1}}$$

$$F = h_2 + c_2 + \lambda_0 t_2^2 \left(1 - \frac{m'''s'''}{m''s''}\right) - 0.5\,(F - h_2 - c_2)\frac{m'''}{m''} + xt_2^2\left(1 - \frac{m'''s'''}{m''s''}\right) - \frac{1.79524}{R}\, y\,(F - h_2 - c_2)\frac{m'''}{m''}\sqrt{\frac{t_2(273 + \theta_2)}{\varrho_2}}\,.$$

Queste si riducono a forma più semplice, facendo la posizione

$$7)\qquad \gamma = \frac{h_2 + c_2 - h_1 - c_1}{t_1^2 - t_2^2}\,,$$

in virtù della quale si ottiene

$$F - h_1 - c_1 = \gamma t_1^2 \ , \qquad F - h_2 - c_2 = \gamma t_2^2 \ .$$

Eliminando allora la costante F si perviene all'equazione generatrice

$$ax + by + c = 0,$$

nella quale i coefficienti hanno i seguenti valori

$$8)\quad \begin{cases} a = t_1^2\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - t_2^2\left(1 - \frac{m'''s'''}{m''s''}\right) \ , \\ b = -\frac{1.79524}{R}\gamma\left\{t_1^{\frac{5}{2}}\frac{m'}{m}\sqrt{\frac{273+\theta_1}{\varrho_1}} - t_2^{\frac{5}{2}}\frac{m'''}{m''}\sqrt{\frac{273+\theta_2}{\varrho_2}}\right\} \ , \\ c = h_1 - h_2 + c_1 - c_2 + \lambda_0\left\{t_1^2\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) - t_2^2\left(1 - \frac{m'''s'''}{m''s''}\right)\right\} - \\ \qquad - 0.5\,\gamma\left(t_1^2\frac{m'}{m} - t_2^2\frac{m'''}{m''}\right) \ . \end{cases}$$

Le 39 esperienze complete, che formano l'oggetto della presente pubblicazione, vennero eseguite con 9 palle, 5 grosse e 4 piccole i cui raggi ed i cui pesi sono i seguenti:

		Raggio medio a 15°	Δ	Peso
Palle grosse	Ottone piena	cm. 3,18607	$0^{\mu}.58$	gr. 1133,9455
	» cava	3,17224	0 .58	599,6437
	Alluminio	3,18655	0 .74	358,1632
	Piombo-Antimonio	3,18735	0 .92	1406,8155
	Argento	3,18496	0 .60	1418,6092
Palle piccole	Ottone piena	2,22423	0 .40	386,6596
	» cava	2,22124	0 .40	249,9642
	Argento	2,22569	0 .42	484,7614
	Platino iridiato	2,22545	0 .19	994,2860

Con Δ si rappresenta il coefficiente di dilatazione lineare totale per 1°.

Tali esperienze distribuite in ordine cronologico, costituiscono le tre seguenti serie:

la prima comprendente 16 esperienze dal dicembre 1883 al marzo 1884;

la seconda comprendente 8 esperienze dal gennaio al giugno 1885;

la terza comprendente 15 esperienze dal gennaio all'aprile 1887.

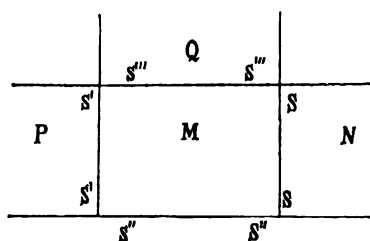
Calcolando i coefficienti 8) coi dati di queste esperienze, si ottiene il sistema di equazioni generate

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= v_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= v_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{39}x + b_{39}y + c_{39} &= v_{39} \end{aligned}$$

la cui risoluzione verrà effettuata cogli usuali procedimenti del metodo dei minimi quadrati.

§ III. — Isolamento degli apparecchi e sistema di illuminazione.

La necessità di isolare completamente gli apparecchi dagli operatori, e di usare le maggiori precauzioni nel sistema di illuminazione, si mostra con grande evidenza quando si osserva la rapidità con cui i fili metallici si allungano sotto l'influenza del calore irradiante da una persona o da una fiamma illuminante, anche notevolmente lontana. Allo scopo di eliminare tutte le cause d'errore di questa natura, le presenti esperienze furono eseguite rinchiudendo il pendolo oscillante, insieme al regolatore astronomico del tempo, in una sala mantenuta a temperatura costante, entro pochi centesimi di grado.

Le nuova disposizione data agli apparecchi è delineata nella figura 1ª della tavola finale, dove in A e A^1 sono rappresentati gli obbiettivi dei due *microscopi di misura*, dei quali gli oculari si trovano nella sala d'osservazione N, separata da quella del pendolo M per mezzo del muro SS. Questo muro è quello stesso sul quale si era disposto l'apparecchio nella serie di esperienze pubblicata (V. M. § X).

La illuminazione che allora si otteneva mediante delle lampade a benzina, accese nella stessa sala del pendolo, e collocate alla distanza di circa tre metri dagli apparecchi, nelle esperienze attuali, in mancanza di microscopi a illuminazione centrale, si effettuò così. Nella parete S^1 S^1, opposta a quella che porta il pendolo, furono praticati tanti fori circolari quante erano le lampade da accendersi, e questi vennero chiusi da lenti convergenti a piccola distanza focale. Nel fuoco di ciascuna lente, nella sala P adiacente a quella del pendolo, venne collocata una piccola lampada a incandescenza, posta da una parte in comunicazione con un polo di una pila di 6 elementi a bicromato di potassa (modello Cloris Baudet), dall'altra con un commutatore a spine, situato nella sala d'osservazione, a portata dell'osservatore. Questi nel momento della osservazione abbassava la spina e chiudeva il circuito della corrispondente lampada, la quale così rimaneva accesa solo per il tempo necessario alla osservazione.

Il fascio di raggi paralleli, provenienti da ciascuna lampada, era ricevuto da una lente convergente posta a circa un metro dalla parete del pendolo, in un diafragma che serviva a riparare il pendolo stesso dai raggi della lampada non usufruiti nella illuminazione. Tutte le lampade poi erano racchiuse in un grande armadio di legno che impediva alla luce diffusa solare di penetrare, attraverso alle lenti, nella sala del pendolo.

In questo modo i campi nei quali dovevansi eseguire le osservazioni, venivano illuminati con intensità conveniente ed in modo abbastanza circoscritto, senza alterare la temperatura dell'ambiente, nè quella delle parti anche più esili degli strumenti o delle masse oscillanti.

Le lampade usate furono otto, cioè due per i *microscopi di misura*, tre per i termometri a mercurio B B′ B″, fissati di fianco al filo del pendolo a tre diverse al-

tezze (cioè all'altezza della sospensione ed alle due altezze che successivamente assumeva la palla in due esperienze coniugate), una per il *cannocchiale delle ampiezze* situato dietro la piccola finestra rettangolare C C, e due per i microscopi del *termometro metallico* D D¹. Queste ultime due divennero inutili quando al *termometro metallico* si sostituì l'*elettrico*, le cui osservazioni venivano fatte al galvanometro collocato nella sala Q (V. in seguito § VI).

Le lampade destinate ai microscopi di misura furono usufruite anche pei *microscopî di spia* E E¹, fissati al muro verticalmente l'uno sopra l'altro, all'altezza dei *microscopî di misura*, e cogli assi disposti in un piano ortogonale a quello determinato dagli assi di questi ultimi. Essendo la camera del pendolo lunga circa 8 metri, il fascio di luce proveniente dalle lampade si spandeva abbastanza per potere essere in parte raccolto da una seconda lente, in vicinanza del pendolo: per mezzo della interposizione di un prisma a riflessione totale, la luce veniva diretta secondo l'asse dei microscopî di spia.

Il tempo del *regolatore astronomico*, addossato alla parete S'' S'', veniva letto dalla sala Q, destinata ai *cronografi*, per mezzo di un cannocchiale, attraverso ad una lente fissata nel muro S''' S'''. Era però sufficiente fare tale lettura una sola volta al giorno, per mettere d'accordo i secondi del regolatore con quelli di un pendolo ausiliario, situato nella stessa sala Q presso i cronografi.

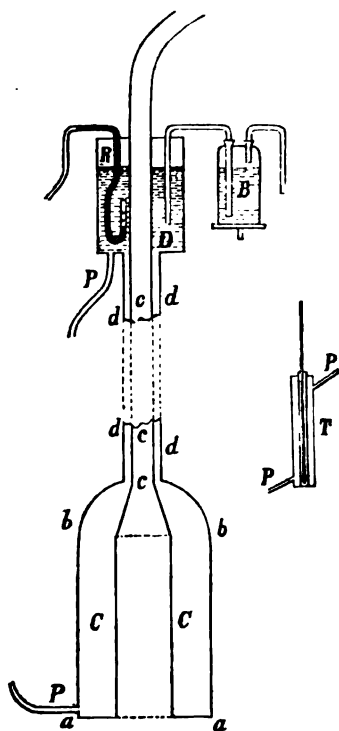
In virtù di tutte queste disposizioni, nella sala del pendolo si entrava solo durante il tempo necessario per il cambiamento e la sistemazione delle palle, dei fili e dei metri davanti ai microscopî, lasciando poi per molte ore tranquilli gli apparecchi, prima di incominciare le esperienze, in guisa che essi potessero mettersi in equilibrio di temperatura anche nelle loro parti più interne.

Le esperienze vennero eseguite esclusivamente durante la notte, allo scopo di evitare l'influenza dei tremiti, sensibilissimi nelle ore meridiane, malgrado il locale sia appartato da vie frequentate. Tali tremiti che si calmavano durante la notte, ricominciavano nelle prime ore del mattino, accusando il risveglio di lontani quartieri della città, e si manifestavano sotto forma di rapide vibrazioni nei fili metallici dei pendoli, vibrazioni che in un tempo brevissimo si andavano smorzando fino e spegnersi del tutto, per poi rinascere di continuo senza un momento di sosta.

§ IV. — Mantenimento della temperatura. — Termosifone.

Durante la serie delle esperienze pubblicate nella prima Memoria, la temperatura veniva mantenuta per mezzo di fiamme a gas, opportunamente regolate, e collocate sia nella sala stessa del pendolo, sia nelle camere circostanti. Molti giorni erano necessarî per raggiungere l'equilibrio termico delle pareti, e, dopo raggiunto, occorreva ancora una sorveglianza continua e laboriosissima. Dovendo di più entrare spesso nella sala del pendolo, non era possibile evitare oscillazioni di temperatura raggiungenti spesso parecchi decimi di grado.

Per eliminare questi inconvenienti si pensò di ricorrere ad un sistema a circolazione continua di acqua calda (*termosifone*). Dopo qualche tentativo venne adottata la disposizione seguente.

Nella sala dei cronografi Q venne collocata la caldaia C a forma di campana a doppia parete, costituita da una parte cilindrica *a b* sormontata da una calotta sferica. Il vano interno della campana è destinato a contenere la lampada pel riscaldamento: la superficie cilindrica interna si raccorda, mediante un tronco di superficie conica, col tubo verticale *c c*, che porta al camino i prodotti della combustione. Alla parte superiore della calotta sferica è saldato un tubo *d d* che circonda il primo per un' altezza di m. 1,50, e finisce superiormente in un recipiente cilindrico D (*vaso di espansione*), chiuso da un coperchio. Tutta questa parte dell'apparecchio è di rame.

Le dimensioni sono approssimativamente le seguenti:

Caldaia —	diametro interno	cm.	10
	» esterno	»	25
	altezza totale	»	45
	» della calotta	»	10
Tubo —	diametro interno	»	4
	» esterno	»	7
Vaso di espansione —	diametro	»	16
	altezza	»	22

Dal fondo del vaso di espansione parte un tubo P di piombo, discendente, il quale attraversa la parete S‴ S″, entra nella sala del pendolo, e, dopo aver descritto in questa parecchie ampie spire lentamente discendenti, riattraversa il muro più in basso e termina nella parte inferiore della caldaia.

Il diametro interno di questo tubo è di circa cm. 1,6, l'esterno di cm. 2,0, la lunghezza della parte contenuta nella sala del pendolo di m. 21,50. onde la superficie di disperdimento pel calore è di circa mq. 1,35.

La caldaia, lo spazio cilindrico anulare compreso fra i due tubi verticali, il tubo discendente e parte del vaso di espansione, si tenevano ripieni di acqua distillata. Questa, riscaldata nella caldaia, saliva nel condotto verticale, e, giunta nella camera di espansione, discendeva nel serpentino raffreddandosi e cedendo il proprio calore all'ambiente; rientrava infine nella caldaia dove si riscaldava e si rimetteva di nuovo in circolazione.

Presso alla parete divisoria S‴ S″ vennero inoltre collocati due tubi T a doppia parete, attraversati dal serpentino P; nei vani interni si introducevano due termometri i quali misuravano la temperatura dell'acqua all'entrata ed all'uscita della sala del pendolo.

La caldaia, il tubo ascendente, il vaso in espansione e la parte del tubo discendente che sta fuori della sala del pendolo vennero rivestiti da un grosso strato coibente di lana, che impediva il disperdimento del calore. Al medesimo scopo le prime tre delle suddette parti vennero circondate da un riflettore cilindrico di ottone: in-

vece la porzione del tubo contenuta nella sala del pendolo venne annerita con nero fumo. In questo modo, con una sola lampada *Bunsen* a tre becchi, si riesciva a portare all'ebollizione la massa d'acqua molto considerevole contenuta nell'apparecchio.

Il sistema di riscaldamento ad acqua calda presenta una notevole regolarità, ed anzi può dirsi in certo qual modo autoregolatore. Infatti se l'ambiente si raffredda, si raffredda anche l'acqua del serpentino, aumenta la differenza di temperatura fra questo e la caldaia, ciò che accelera la velocità della circolazione. Ma allora, entrando l'acqua a temperatura maggiore nel serpentino, diminuisce il dislivello di temperatura fra questo e la caldaia, ciò che tende a rallentare la circolazione: ne segue quindi che a poco a poco, per la disposizione stessa delle cose, tende a stabilirsi un regime uniforme.

Per correggere le variazioni di temperatura, sempre inevitabili, rivelate dai termometri e termoscopi, dei quali ora si parlerà, nel punto in cui il tubo attraversa la parete venne collocata una chiave graduata, la cui manovra fatta a mano, e comandata dalle indicazioni dei termoscopi, riesciva molto facile dopo qualche tentativo preliminare.

Inoltre la temperatura dell'acqua nel vaso di espansione veniva mantenuta costante, entro limiti molto ristretti, da un regolatore automatico a tensione di vapor d'alcool: esso è perfettamente analogo nella sua costruzione a quello descritto nell'Allegato 1° (§. 2), *Sulla misura della dilatazione dell'acciaio e dell'argentano.* Nella figura il tubo contenente l'alcool è rappresentato in R.

In B era collocata una bottiglia a doppia tubulatura, comunicante per mezzo di un sifone col vaso di espansione, la quale serviva a indicare il livello dell'acqua interna, ed a introdurne della nuova per supplire alle piccole perdite dovute alla evaporazione.

Gli abbassamenti di temperatura, nella sala del pendolo, erano poi facilitati dall'uso di un tubo di piombo lungo circa 25 metri, derivato direttamente dai condotti dell'acqua potabile (acqua Marcia), e svolgentesi a spire nella detta sala. Questo tubo attraversava la parete divisoria $S''' S'''$ accanto al serpentino dell'acqua calda, ed era esso pure munito di chiave graduata, analoga a quella del termosifone. Anche la manovra di questa chiave era regolata dalla osservazione continua dei termoscopi.

§ V. — Termometro metallico.

Oltre ai termometri a mercurio, per la valutazione delle temperature, si adoperò nelle prime esperienze un *termoscopio metallico*, destinato a rivelarne prontamente anche le piccole variazioni. Nelle ultime esperienze esso venne sostituito da un *termoscopio elettrico.*

Il principio del termoscopio metallico venne già esposto (V. M. § XVI): la sua costruzione venne però notevolmente modificata.

Nella fig. 1ª della tavola finale è disegnato l'insieme dell'apparecchio. Due mensolette robuste *a a'* portano superiormente due piani d'acciaio finamente lavorati e inca-

strati a forza nell'ottone (V. fig. 2ª in b e b'). Sopra questi si appoggiano due coltelli prismatici di acciaio $c\,c'$, analoghi a quelli delle bilancie, i cui tagli passano rispettivamente pei centri di due dischi di ottone, muniti ciascuno di un grande foro circolare h pel passaggio della mensola, e di due fori allungati k pel passaggio delle viti v che impediscono al sistema di sbilanciarsi. Due viti m ed n fissano all'orlo del disco d due fili di platino f e g. L'estremo del filo f è avvitato ad un pezzo r scorrevole a coulisse, mediante la vite w, entro il pezzo p fissato al muro. All'estremo inferiore del filo g si unisce un'asticina di ottone o, che porta il pezzo destinato alla collimazione. Questo si compone di un collare α saldato all'asticina da un secondo collare girevole β, che può venir fermato da una vite di pressione, e porta una delicatissima punta orizzontale per la collimazione; di un terzo collare girevole γ munito di due graduazioni, l'una in alto l'altra in basso, aventi lo scopo di facilitare il collocamento in azimut della punta.

Il disco d' porta un analogo sistema di due fili $f'\,g'$ di alluminio, il primo dei quali ha l'estremo fissato ad un pezzo analogo a quello già descritto pel filo f. Il secondo estremo termina pure con un'asticina di ottone o' alla quale invece del collare α è fissato il pezzo a vite δ': sopra questo si avvita il collare α', il quale girando si sposta quindi verticalmente accompagnato dai collari β' e γ'.

Le due punte di cui sono provvisti i collari $\beta\,\beta'$, affacciate l'una all'altra, vengono portate nel campo dell'uno o dell'altro dei microscopî D D', attraversanti il muro di divisione fra la sala del pendolo e la sala d'osservazione, di fianco ai microscopî di misura. Dei pesi applicati agli estremi delle asticine $o\,o'$, ed immersi in un recipiente pieno d'olio, smorzano le oscillazioni dei fili.

I grandi spostamenti delle due punte, l'una rispetto all'altra, si ottengono colla vite δ', mentre per i piccoli si ricorre alle viti w. Il movimento di queste viti non produce alcun spostamento orizzontale, perchè i fili discendono sempre tangenzialmente ai dischi d e d'. Gli spostamenti orizzontali si ottengono colle viti ϵ, colle quali si fa muovere a coulisse il pezzo di supporto delle due mensole a ed a'.

Il pezzo di sospensione è fissato alla testa di una sbarra robusta di ferro, cementata nel muro all'altezza della sospensione del pendolo. In modo analogo sono sostenuti i pezzi inferiori p e p' cui sono fissati i fili.

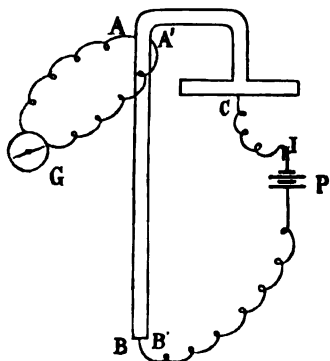
Due erano i vantaggi che si ottenevano con queste modificazioni: in primo luogo i fili, dei quali si osservava la dilatazione, avevano una lunghezza doppia di quella del filo del pendolo, ciò che aumentava di molto la sensibilità dell'apparecchio: in secondo luogo essendo le punte sostenute da pezzi completamente liberi e indipendenti, la dilatazione non trovava alcun impedimento, come invece poteva accadere nell'antico modello.

Per mettere poi il termoscopio in condizioni eguali a quelle del pendolo, si modificava la disposizione a seconda che il pendolo era lungo o corto: si cambiavano cioè i fili e si trasportavano i pezzi p ad altri sostegni posti a conveniente altezza. Lo stesso si faceva per la sospensione superiore, che si poteva fissare a due diverse altezze, come quella del pendolo (Vedi in seguito § VIII). L'esperienza però dimostrò che, nelle ottime condizioni termiche in cui si operava, tali trasporti erano superflui.

§ VI. — Termoscopio elettrico.

Il principale inconveniente del *termoscopio metallico* sta nella difficoltà della lettura. La collimazione col microscopio richiede sempre un tempo piuttosto lungo ed una attenzione speciale, ciò che diminuisce nello strumento il pregio della prontezza delle indicazioni. Questo difetto veniva poi aggravato dalla impossibilità di collocare il regolatore della temperatura (termosifone) a portata dell'osservatore, per cui doveva sempre scorrere un certo intervallo di tempo fra la lettura del microscopio e la corrispondente manovra della chiave del termosifone.

Questi inconvenienti furono completamente eliminati colla introduzione del *termoscopio elettrico* (1), col mezzo del quale le osservazioni si poterono fare in modo continuo ad un galvanometro collocato nella camera del termosifone, riducendosi ad una semplice lettura.

L'apparecchio consta di una combinazione di Wheatstone, insensibile alle variazioni della pila e del galvanometro. I quattro lati del ponte rimangono tutti alla medesima temperatura: due di essi sono costituiti da due fili A B, A′ B′ l'uno di rame, l'altro di packfong lunghi ambedue quant'è l'altezza della sala (circa 4 metri), e tesi verticalmente a pochi centimetri l'uno dall'altro. Gli estremi B B′ sono congiunti fra di loro; gli estremi A A′ sono uniti ad un filo di packfong che forma gli altri due lati del ponte A C, A′ C. In C sta un contatto formato da una pinza mobile lungo il filo mediante una vite micrometrica: C è congiunto con B — B′ attraverso l'interruttore I e la pila P (un elemento Meidinger) collocati in altra camera: A ed A′ sono congiunti attraverso un altro interruttore a un galvanometro Thomson (G) a immagine reale, posto presso il termosifone.

Le resistenze dei quattro lati del ponte si fecero pressochè eguali (circa 3,ω3); per ciò al filo di rame si diede il diametro di cm. 0,018, a quello di packfong di cm. 0,059.

L'equilibrio elettrico del sistema si ottiene per una certa temperatura (normale); al variare di questa il rapporto delle resistenze AB , A′ B′ varia, perchè i due metalli hanno un coefficiente di temperatura diverso; quello delle resistenze AC , A′ C rimane invariato. Per ciò parte del filo A C A′ si potè collocare fuori della sala del pendolo, e precisamente in quella di osservazione, dove del resto la temperatura variava pochissimo.

(1) Cfr. Moisè Ascoli, *Sopra un termoscopio elettrico*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. VI, 1890.

L'intensità della corrente nel galvanometro è sensibilmente proporzionale alle variazioni di temperatura.

Quando la temperatura si vuol mantenere al valor normale, le sue variazioni si compensano col termosifone. Se si vuol variare di τ la temperatura normale, si deve spostare C di una lunghezza x data dall'equazione

$$\frac{AC+x}{A'C-x}=\frac{AB(1+\alpha\tau)}{A'B'(1+\alpha'\tau)},$$

dove α ed α' sono i coefficienti di temperatura delle resistenze dei due metalli. Se ne deduce

$$x=\frac{AC}{2}(\alpha-\alpha')\tau.$$

Nel caso attuale, posto

$$\alpha=0,0037 \qquad \alpha'=0,0004$$

$$AC=\text{cm. } 307 \qquad \tau=1^\circ$$

si ottiene

$$x=\text{cm. } 0,491.$$

L'esperienza diede

$$x=\text{cm. } 0,444.$$

Osservando poi le deviazioni del galvanometro al variare della temperatura della sala, letta ai termometri a mercurio, si ottenne una deviazione di una parte della scala galvanometrica per 0°.00906 di variazione nella temperatura; cioè per ogni centesimo di grado si aveva circa un centimetro di deviazione. Occorrendo si sarebbero potute avvertire variazioni di un millesimo di grado.

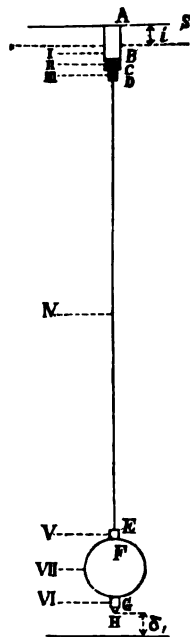
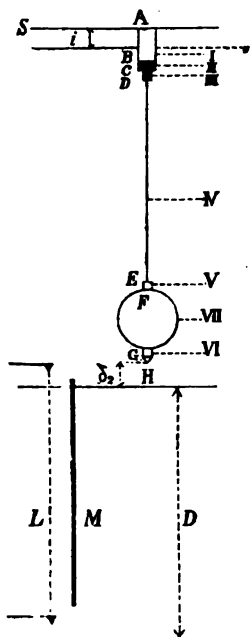
Lo strumento fu adoperato continuamente durante le ultime esperienze col pendolo, e diede sempre ottimi risultati, come risulta, nei *Quadri riassuntivi* finali, dai dati riguardanti la temperatura della sala.

§ VII. — Parti costituenti il pendolo.

Tanto il pendolo lungo quanto il pendolo corto si possono considerare costituiti da sette parti distinte cioè (Vedi la figura schematica dei pendoli):

I. La *lamina*, porzione AB di una lamina sottilissima di talco, variabile in lunghezza da una esperienza all'altra, avvolgentesi intorno al costolo SS del cilindretto di sospensione. — In tutte le esperienze venne impiegata la stessa lamina della larghezza di cm. 0,535, dello spessore di cm. 0,002, il peso per ogni centimetro di lunghezza essendo di gr. 0,01033.

II. La *saldatura* BC della lamina col filo, fatta a stagno. Le sue dimensioni sono le seguenti: altezza cm. 0,150, larghezza cm. 0,500, spessore cm. 0,096, ed il suo peso è di gr. 0,0538.

III. La *congiunzione superiore* CD comprendente la *vite della saldatura* e la *cappa di congiunzione*, nella quale viene ad impanarsi la vite. Nella cappa s'intende compresa anche la piccola porzione di filo da cui essa è attraversata, e la pallina d'argento che serve a fissare il filo alla cappa. Il peso della vite è di gr.0,1171; la cappa varia da una esperienza all'altra.

IV. Il *filo visibile* D E di packfong, del diametro di $0^{mm}.29$ per tutte le palle. Tutti i fili adoperati vennero prima assoggettati ad un trattamento speciale, avente per oggetto di eliminare le alterazioni dovute alla elasticità di seconda specie (V. M. § XIV), e consistente nel sottoporre il filo a forti trazioni e ad alte e basse temperature alternativamente, mentre lo si obbliga a torcersi e a storcersi intorno al proprio asse. Le lunghezze approssimate dei fili adoperati furono le seguenti:

Sospensione superiore.

Pendolo corto —	palle grosse —	cm.	147	circa
» »	» piccole	»	149	»

Sospensione inferiore.

Pendolo corto —	palle grosse —	cm.	97	circa
» »	» piccole	»	99	»

Le lunghezze approssimate dei fili, nelle corrispondenti esperienze coniugate a pendolo lungo, si ottengono dalle precedenti aggiungendo un metro.

V. La *congiunzione inferiore* EF, comprendente essa pure la *cappa di congiunzione* costituita dalla cappa propriamente detta, da una porzioncina di filo e dalla pallina d'argento, e l'*appendice della palla,* la quale è foggiata a vite, e s'impana nella cappa. — L'altezza dell'appendice è di cm. 0,068 per tutte le palle.

VI. La *mira* GH, applicata ad una seconda appendice della palla diametralmente opposta alla precedente, ed avente la identica forma e dimensione, in guisa da permettere il rovesciamento della palla. Le mire adoperate nelle esperienze furono due, conformate in guisa che il loro puntamento potesse effettuarsi contemporaneamente col microscopio di misura e con quello di spia. Per poter compiere automaticamente la osservazione dei passaggi del pendolo per la verticale, col metodo che verrà descritto in seguito, alla prima mira venne applicata una forcella metallica isolata dal resto della mira (V. Tav. finale, fig. 7ª), destinata a chiudere e ad aprire una corrente elettrica, mediante l'immersione e l'emersione delle sue due punte da due goccie di mercurio.

La seconda mira venne invece munita di due fili di platino riunentisi in una punta unica (V. Tav. finale, fig. 8ª), destinata essa pure, colla sua immersione in un menisco di mercurio, a trasmettere una corrente attraverso il filo di sostegno della palla.

VII. La *palla :* come già si è detto, le palle usate furono nove; esse furono lavorate con un tornio da sfere Goldmann. La fusione del platino venne eseguita a Londra, quella dell'alluminio a Parigi: siccome però la palla d'alluminio presentava qualche leggiera porosità, si credette utile ricoprirla da un sottilissimo strato di vernice. I diametri ed i pesi delle palle vennero già dati nel § II.

Le esatte dimensioni ed i pesi delle diverse parti costituenti il pendolo sono registrati nei *Quadri riassuntivi* finali, insieme agli altri elementi necessarî alla formazione delle equazioni generate.

§ VIII. — Sospensione del pendolo.

Per la sospensione del pendolo venne conservato il medesimo apparecchio già adottato nella serie di esperienze pubblicate (V. M. § XII). Esso viene sostenuto da un grosso parallelepipedo di legno compatto, bollito prima nell'olio e fissato nella sala del pendolo in alto del muro che porta i microscopî, con una delle sue facce disposta verticalmente e parallelamente alla superficie del muro.

Per variare quanto più fosse possibile le condizioni d' esperienza, si adottarono due diverse lunghezze tanto pei pendoli lunghi quanto pei pendoli corti, fissando l'apparecchio di sospensione per una metà delle esperienze alla parte inferiore del parallelepipedo, e per l'altra metà alla parte superiore (Vedi la Tavola finale, fig. 1ª ove la prima posizione F è segnata a tratto pieno, la seconda F′ con linee punteggiate). Queste due posizioni dell'apparecchio, distanti verticalmente l'una dall'altra di circa 50 cm., si distingueranno, come già si è fatto, colle denominazioni di *sospensione inferiore* e *sospensione superiore.*

Il cilindretto intorno a cui si avvolge la lamina, durante le oscillazioni del pendolo, è di packfong ed è fissato allo spigolo di un prisma solidamente connesso con tutto l'apparecchio. La orizzontalità del cilindretto si verificò parecchie volte durante le esperienze, col seguente procedimento.

Adattato all'apparecchio il pendolo lungo, e portatolo per mezzo della opportuna vite di correzione nella posizione più prossima al muro, si collocava sotto il pendolo un orizzonte fisso di mercurio, e, condotta la mira a piccola distanza dalla superficie libera, si misurava, per mezzo del microscopio inferiore, la distanza fra le due immagini diretta e riflessa della punta; si faceva quindi oscillare il pendolo per parecchie ore, misurandone la durata d'oscillazione. Si allontanava quindi il pendolo dal muro (l'allontanamento era di circa 5 mm.), si riconduceva la mira alla precedente distanza dalla superficie del mercurio, e si determinava di nuovo la durata d'oscillazione del pendolo. La differenza fra le due durate d' oscillazione, in tal modo misurate, riuscì sempre trascurabile, e ciò costituiva una prova palese della soddisfacente orizzontalità dell'asse di rotazione.

Per accertarsi della stabilità del cilindretto, cioè per convincersi che non erano da temersi oscillazioni isocrone od armoniche a quelle del pendolo, si conservò il me-

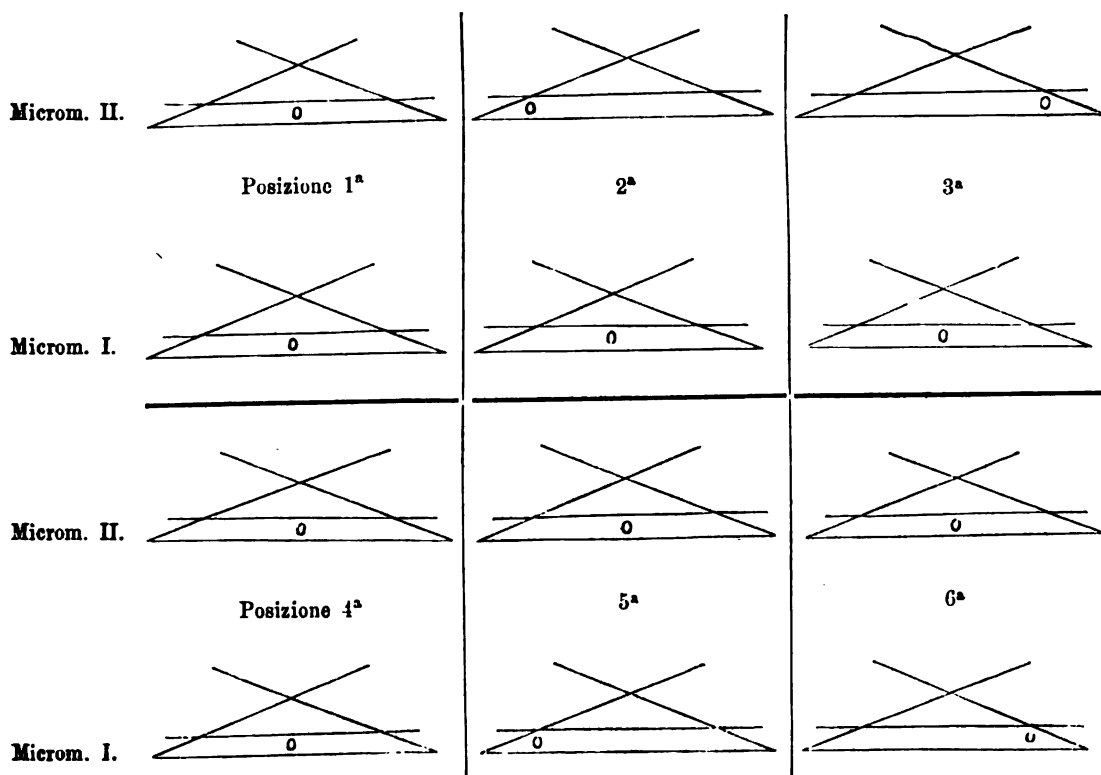
todo di osservare con un cannocchiale un raggio di luce riflesso da un piccolo specchio fissato all'estremità del cilindretto stesso.

Il pendolo si metteva poi in movimento col mezzo dell'*eccentrico* agente dall'alto in basso sulla lamina di sospensione, sincronamente alle oscillazioni del pendolo, col metodo cioè suggerito dal prof. M. Ascoli (V. M. § XIII); e veniva arrestato col sussidio delle frange di seta, colle quali circondavasi la palla oscillante (V. M. § XVII).

§ IX. — Microscopî di misura.

I *microscopî di misura,* sostenuti da armature incastrate in due finestre rettangolari praticate nel muro, alla distanza di circa un metro l'una sopra l'altra, si aggiustavano nella loro esatta posizione per mezzo di viti di correzione, delle quali sono fornite le armature stesse.

Il collocamento in un piano verticale degli assi dei due microscopî di spia conseguivasi colla osservazione dei due lembi di un filo a piombo.

La verificazione della orizzontalità delle due coppie di fili paralleli dei micrometri, dopo molti tentativi, che qui è inutile rammentare, si eseguì col seguente procedimento. Presentato ai microscopî il metro (munito di una punta su ciascuna delle testate), si teneva dapprima la punta inferiore sulla verticale dell' incrocicchio del micrometro I (inferiore), e si portava la punta superiore successivamente sulla verticale dell'incrocicchio del micrometro II (superiore), poi a sinistra ed infine a destra, misurando in queste tre posizioni le distanze fra gli zeri dei due micrometri.

Tenendo poi la punta superiore sulla verticale dell'incrocicchio del micrometro II, si portava l'altra punta successivamente sulla verticale dell'incrocicchio inferiore, indi a sinistra ed infine a destra, misurando di nuovo, nelle tre posizioni, la distanza fra gli zeri dei micrometri. Le deviazioni del metro a destra ed a sinistra si facevano simmetriche. Nella unita figura schematica le posizioni delle punte sono indicate da piccoli circoletti segnati fra i fili micrometrici. — Egli è evidente che un difetto nella orizzontalità dei fili micrometrici affetterebbe in senso opposto le due misure della distanza fra gli zeri dei micrometri, eseguite in due posizioni del metro simmetriche rispetto alla verticale.

Si riportano qui, per dare una chiara idea del metodo, i risultati ottenuti in una di queste verifiche (25 Febbraio 1884). Con D si indica la suaccennata distanza fra gli zeri dei micrometri, con M la lunghezza del metro. Le parti micrometriche furono tradotte in *micron* col valore della parte dato più sotto.

Posizione 1ª	Microscopio I $5^{giri},59^{\mu},07$ » II 5, 41, 06	I-II = $18^{\mu},01$	$D_1 = M + 18^{\mu},01$
» 2ª	» I 5, 61, 41 » II 5, 44, 26	I-II = 17, 15	$D_2 = M + 17, 15$
» 3ª	» I 5, 57, 38 » II 5, 39. 91	I-II = 17, 47	$D_3 = M + 17, 47$
» 4ª	» I 5, 58, 84 » II 5, 41, 48	I-II = 17, 36	$D_4 = M + 17, 36$
» 5ª	» I 5, 58, 30 » II 5, 40, 88	I-II = 17, 42	$D_5 = M + 17, 42$
» 6ª	» I 5, 59, 99 » II 5, 42, 68	I-II = 17, 31	$D_6 = M + 17. 31$

La coincidenza di questi risultati costituisce una prova convincente della orizzontalità dei fili.

Il valore della parte micrometrica dei due microscopî venne determinato per ciascuna delle tre epoche in cui vennero eseguite le esperienze (Vedi § II), ed i valori adottati furono i seguenti:

1ª Serie d'esperienze.

Microscopio I (inferiore) $1^{parte} = 0^{\mu}.3248$
» II (superiore) 1 = 0. 3518

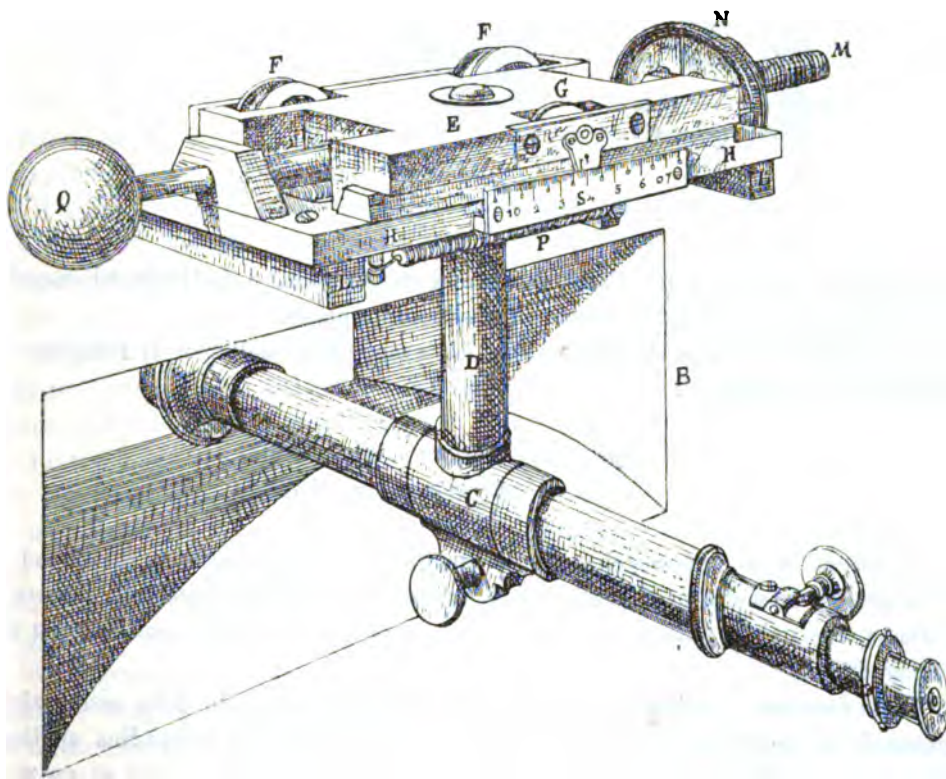
2ª Serie.

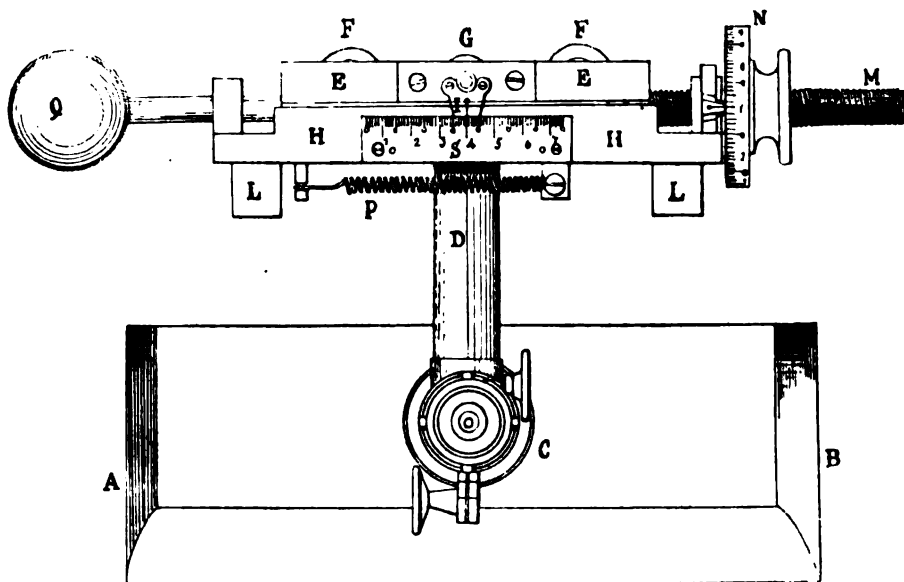
Microscopio	I (inferiore)	1^{parte}	$= 0^{\mu}.3255$
»	II (superiore)	1	$= 0.\ 3511$

3ª Serie.

Microscopio	I (inferiore)	1^{parte}	$= 0^{\mu}.3302$
»	II (superiore)	1	$= 0.\ 3511$

§ X. — Misura delle ampiezze d'oscillazione.

Una modificazione notevole venne introdotta nell'apparecchio per la misura delle *ampiezze d'oscillazione* (V. M. § XX). Praticata una finestra rettangolare AB (V. figure) nel muro di sostegno dei microscopî (nella fig. 1ª della tavola finale essa è disegnata in CC), sulla loro verticale, e chiusala con una lastra di cristallo, venne ad essa affacciato,

dalla parte della sala d'osservazione, un cannocchiale C coll'asse ortogonale al muro. Il cannocchiale, per mezzo della colonna verticale D, è fissato al carretto E, il quale, guidato dalle duc ruote scanalate FF e dalla ruota a toro G, è scorrevole sul sostegno H.

Tutto l'apparecchio è sorretto dalle sbarre LL infisse nel muro. Una vite M fissata al carretto E, col passo di un millimetro, attraversa la tamburella N munita di chiocciola corrispondente, di modo che un giro completo del tamburo produce uno scorrimento del carretto eguale ad un millimetro. Il numero intero dei millimetri è indicato dall'indice I e dalla scala S, mentre la rotella del tamburo, divisa in 100 parti, permette di valutare il centesimo di millimetro. La molla di contrasto P, fissata per

un estremo al carretto e per l'altro estremo al suo supporto, è destinata ad impedire l'errore del passo perduto: Q è una massa di contrappeso.

Le distanze dell'asse di collimazione del cannocchiale dall'asse di rotazione del pendolo sono le seguenti:

colla sospensione	inferiore	mm.	833,5
» »	superiore	»	1333,5.

In questo modo l'apparecchio per la misura delle ampiezze venne ridotto ad un vero e proprio istrumento di precisione, e venne completamente eliminato l'errore di parallasse, inevitabile quando si voglia leggere la proiezione del filo oscillante su una scala graduata.

Il puntamento si effettuava nel seguente modo. Nel momento della osservazione, abbassando la opportuna spina del commutatore, si accendeva la lampadina applicata alla opposta parete della sala del pendolo, la quale proiettava la sua luce su un vetro smerigliato interposto fra essa ed il pendolo, nella vicinanza del pendolo stesso. Il filo oscillante allora appariva nero in campo luminoso. Si portava il filo micrometrico verticale del cannocchiale in prossimità della estrema escursione del filo del pendolo, e si attendeva che questo, decrescendo le sue ampiezze d'oscillazione, rag-

giungesse il filo micrometrico. Con un tasto a mano si registrava al cronografo l'istante della coincidenza, e quindi si faceva la lettura della scala. Spostando il filo micrometrico verso la posizione d' equilibrio del filo oscillante, si compievano così quante osservazioni occorrevano.

Per rendere più precisa l'osservazione, il puntamento si faceva sopra uno dei bordi dell' immagine del filo; e precisamente durante la prima metà delle esperienze esso si fece collimando il bordo sinistro apparente, durante la seconda metà collimando il bordo destro apparente.

Naturalmente in questo sistema, invece degli angoli d'ampiezza, si leggevano le loro tangenti rispetto a due cerchi i cui raggi sono quelli sopra citati: queste tangenti verranno in seguito designate col nome di *elongazioni*. Ognuna di esse si otteneva per differenza, sottraendo dalla lettura, fatta sulla scala in ogni singolo puntamento, la media di quelle fatte prima e dopo l'esperienza nella posizione di quiete del pendolo (lettura origine).

§ XI. — Deformazioni del muro. — Indici o punte di spia.

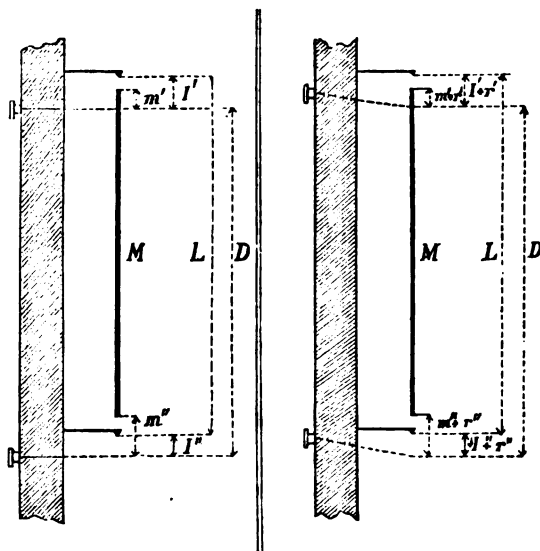
Coi metodi precedentemente esposti, e scegliendo convenientemente la temperatura della sala del pendolo di poco superiore alla media bimestrale delle temperature esterne, in ciascun periodo di esperienze, si riescì a limitarne le massime oscillazioni a tre o quattro centesimi di grado, ossia a ridurle così piccole da non avere più alcuna influenza apprezzabile sulle grandezze da misurare.

Il muro di sostegno dei microscopî venne difeso nel miglior modo possibile, con uno schelmo di flanella, dalle irradiazioni degli osservatori. Il termometro interno ad esso indicò sempre del resto con quale estrema lentezza il calore vi penetrasse; tanto che per ogni nuova temperatura media adottata, fu necessario mantenere riscaldate la sala del pendolo e quella d'osservazione per lunghi periodi, non mai inferiori a 12 o 15 giorni, prima che il suddetto termometro mostrasse essersi raggiunto, anche nell'interno del muro, l'equilibrio termico.

Restava però sempre il dubbio che, essendo il muro collegato col resto dell'edificio, esso potesse subire deformazioni, le quali producessero degli spostamenti negli assi dei microscopî di misura. Perciò si stabilirono davanti agli obbiettivi dei microscopi degli *indici*, dei quali è disegnata la forma nella fig. 3ª della tavola finale, consistenti, in ultima analisi, in punte sommamente delicate da collimarsi per mezzo dei micrometri.

Se le punte fossero fisse e indipendenti dal muro, è chiaro che qualunque inarcamento o irregolare dilatazione di questo si tradurrebbe in una variazione delle letture micrometriche fatte sulle punte. Ma queste essendo supportate da due sostegni fissati nel muro, ciascuno in prossimità di un microscopio, l'osservazione delle punte non può garantire altro che la stabilità degli assi dei microscopî rispetto alla porzione di muro nella quale essi sono infissi. Si può però determinare lo spostamento complessivo degli assi dei microscopî, l'uno rispetto all'altro, affacciando ad essi le estremità di un metro campione, e misurando la distanza fra gli zeri dei micrometri.

Siano

M	la lunghezza del metro campione,
D	la distanza fra gli assi dei microscopî,
L	la distanza fra gli indici,
m'	la lettura micrometrica sull'estremo superiore del metro,
m''	» » » » » inferiore » »
I'	» » » sull' indice superiore,
I'	» » » » » inferiore.

Ammessa la disposizione rappresentata dalla unita figura schematica a sinistra, si avrà:

$$D = M + m'' - m' ,$$
$$L = D + I' - I'' = M + m'' - m' + I' - I'' .$$

Ogni deformazione del muro, avendo per effetto di alterare le letture m' m'', comparirà intera nelle grandezze D ed L.

Si supponga ora che, come è indicato dalla figura a destra, le inclinazioni degli assi dei microscopî subiscano delle variazioni, per modo che siano $I_1' = I' + r'$, $I_1'' = I'' + r''$ le nuove letture fatte sugli indici: poichè gli estremi del metro si dispongono sulla stessa retta congiungente gli indici, si avrà analogamente $m_1' = m' + r'$, $m_1'' = m'' + r''$, e quindi sarà:

$$D = M + m'' - m' + r'' - r' ,$$
$$L = D + I' - I'' + r' - r'' = M + m'' - m' + I' - I'' .$$

Nella prima equazione compare tutto intero lo spostamento $r'' - r'$ degli assi dei due microscopî l'uno rispetto all'altro, dovuto alla variazione della loro inclina-

zione: esso invece è interamente eliminato dalla seconda. Cioè mentre le differenze fra i valori successivamente ottenuti per la distanza D risultano dall' insieme delle variazioni avvenute nel muro e nelle inclinazioni degli assi dei microscopî rispetto ad esso, le differenze fra i valori contemporaneamente ottenuti per L provengono solo dalle deformazioni del muro.

Per poter disporre le estremità del metro nella posizione occupata dagli indici, era necessario che questi potessero venire successivamente rimossi e ricondotti alla posizione di prima. La montatura degli indici fu perciò fatta fissando nel muro, in prossimità di ciascun microscopio, un asse d'acciaio A (Vedi fig. 3ª della tavola finale) finamente lavorato, come un asse di un teodolite, sul quale viene ad imperniarsi una colonna forata C che regge il supporto S della punta P, e permette a questa un movimento di rotazione intorno all'asse. Una vite V situata alla sommità della colonna C, munita di controdado D e terminata da una piccola sfera E, la quale si adagia in una corrispondente cavità conica praticata nell'asse, permette di regolare la frizione fra questo e la colonna, in modo che la rotazione avvenga con movimento dolce e senza ondulazioni.

Per disporre le punte nel campo del microscopio si fa ruotare tutto il sostegno intorno al perno, finchè l'appendice B viene ad incontrare un opportuno arresto contro cui vien mantenuta per mezzo di un pistolotto a spirale (Vedi la fig. 1ª dove gli indici sono disegnati in I ed I' ed i loro arresti in L ed L'). Col sussidio di tre coulisses, mosse da tre viti V_1 V_2 V_3, si comunicano allora alla punta tre movimenti ortogonali, coi quali si riesce a portarla sulla verticale del pendolo ed in prossimità dello zero del micrometro.

Si è verificato, spostando moltissime volte l' indice e rimettendolo a posto, che esso riprende sempre l'identica posizione di prima; cioè le differenze fra le letture fatte sull'indice, dopo ciascun spostamento, non eccedono mai in generale l'errore di puntamento del microscopio. Gli indici sono pertanto da ritenersi come invariabilmente collegati al muro.

A conferma di quanto è sopra riferito, si riportano qui alcune delle letture fatte sugli indici nei primi tempi delle esperienze:

	Indice inferiore	Indice superiore
	30 Novembre 1883	
	$5^g,129^p,6$	$5^g,143^p,6$
si spostano e si rimettono gli indici	» 128, 6	» 144, 3
» » »	» 131, 0	» 143, 3
» » »	» 129, 8	» 142, 4
	1 Dicembre	
	$5^g,131^p,2$	$5^g,145^p,8$
si spostano e si rimettono gli indici	» 130, 3	» 145 4
» » »	» 131, 4	» 145, 5
» » »	» 131, 2	» 145, 8

	Indice inferiore	Indice superiore
	2 Dicembre 1883	
	$5^g,130^p,9$	$5^g,145^p,4$
si spostano e si rimettono gli indici	» 130, 7	» 147, 1
» » »	» 131, 3	» 146, 3
» » »	» 130, 3	» 146, 9
	3 Dicembre	
	$5^g,132^p,2$	$5^g,150^p,3$
si spostano e si rimettono gli indici	» 132, 1	» 149, 4
» » »	» 133, 2	» 149, 2
» » »	» 133, 0	» 149, 6
	4 Dicembre	
	$5^g,129^p,2$	$5^g,149^p,4$
si spostano e si rimettono gli indici	» 130, 2	» 148, 9
» » »	» 130, 3	» 149, 3
» » »	» 129, 3	» 150, 0
	5 Dicembre	
	$5^g,129^p,7$	$5^g,152^p,5$
si spostano e si rimettono gli indici	» 130, 5	» 149, 9
» » »	» 130, 9	» 150, 8
» » »	» 130, 0	» 149, 9
	6 Dicembre	
	$5^g,130^p,7$	$5^g,149^p,8$
si spostano e si rimettono gli indici	» 130, 0	» 149, 0
» » »	» 130, 8	» 149, 5
» » »	» 130, 7	» 148, 4
	7 Dicembre	
	$5^g,130^p,5$	$5^g,148^p,9$
si spostano e si rimettono gli indici	» 130, 1	» 150, 2
» » »	» 130, 5	» 148, 8
» » »	» 130, 1	» 150, 1

Nei quadri riassuntivi finali si è preferito registrare le distanze L fra gli indici, invece delle distanze D fra gli zeri dei micrometri, appunto per essere quelle indipendenti dagli eventuali spostamenti dei microscopi rispetto al muro di sostegno.

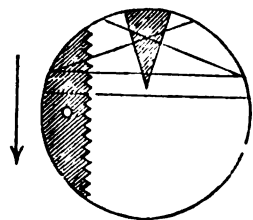
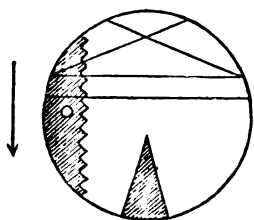
Per mettere in evidenza il modo di comportarsi delle due predette distanze, si riportano qui i valori per esse ottenuti durante il periodo delle prime sei esperienze.

Data	Temperatura del muro	I′ — I″	D	L
29 Novembre 1883	15°,14	7µ,62	cm. 100 + 21µ,73	cm. 100 + 29µ,35
1 Dicembre "	15, 10	8, 67	21, 83	30, 50
3 " "	15, 11	9, 61	23, 81	. 33, 42
4 " "	15, 10	10, 40	24, 51	34, 91
5 " "	15, 09	10, 73	24, 97	35, 70
6 " "	15, 06	10, 08	23, 29	33, 37
8 " "	15, 05	10, 08	26, 82	36, 90
11 " "	15, 02	9, 21	29, 59	38, 80
12 " "	15, 02	9, 33	27, 27	36, 60
13 " "	15, 02	9, 86	29, 64	39, 50
14 " "	15, 04	10, 82	29, 14	39, 96
15 " "	15, 01	10, 36	29, 44	39, 80
16 " "	15, 01	.....	30, 47	......
17 " "	15, 01	.....	30, 34	......
18 " "	15, 01	9, 52	30, 73	40, 25
19 " "	15, 01	9, 98	32, 35	42, 33
20 " "	15, 01	10, 72	31, 24	41, 96

Dalla ispezione di questa tavola risulta ad evidenza la veridicità della ipotesi sopraccennata, che il muro cioè subisca delle deformazioni, malgrado la cura impiegata nel mantenerne costante la temperatura. Mentre questa va lentissimamente diminuendo, le due distanze D ed L vanno crescendo, mostrando non essere qui il caso di parlare di dilatazione del muro. Qualunque siano però le cause ignote delle variazioni considerate, esse non agiscono saltuariamente, ma seguono una legge uniforme e pressochè lineare. Assumendo quindi per le due predette distanze, in ciascuna esperienza, la media di quelle determinate prima e dopo l'esperienza stessa, si verrà ad eliminare in gran parte, se non totalmente, l' errore proveniente dalla deformazione in parola.

§ XII. — Metri.

Nelle esperienze pubblicate, il metro, adoperato per la misura della distanza fra i microscopî, consisteva in una verga d'acciaio, sulle cui facce terminali erano fissate stabilmente due piccolissime punte di packfong, la lunghezza del campione essendo quella compresa fra le punte stesse: (Vedi fig. 4ª), dove sono rappresentate le due testate del metro. Questo metro presentava però l'inconveniente che le osservazioni fatte sulle due punte, l'inferiore rivolta in basso e la superiore rivolta in alto, non erano nelle medesime condizioni, a differenza di quelle fatte sulle mire dei due pendoli coniugati, dirette entrambe in basso.

Per eseguire il puntamento delle mire dei pendoli coi microscopî, i fili del micrometro oculare venivano portati a collimare il vertice della mira nel senso indicato dalla freccia, nella annessa figura: in quelle condizioni la collimazione si faceva con molta precisione, giacchè lo scostamento medio fra le osservazioni di diversi operatori di rado superava una parte del micrometro (circa $0^{\mu},3$). Quando invece si collimava la punta superiore del metro, facendo girare la vite del micrometro sempre nel senso diretto, allo scopo di evitare l'errore del passo perduto, cioè movendo come precedentemente i fili nel senso della freccia, l'osservazione riesciva notevolmente meno precisa, e le discordanze fra i diversi operatori erano più sentite di prima.

Per evitare questo inconveniente, e ridurre le osservazioni sul metro nelle identiche condizioni di quelle eseguite sulle mire dei pendoli, si fece costruire un nuovo metro pure d'acciaio, con entrambe le punte rivolte in basso, il quale in seguito verrà indicato con M′ (Vedi fig. 5ª). La estremità superiore è attraversata da due fori cilindrici ad assi ortogonali, cioè l'uno praticato nel senso della larghezza, l'altro nel senso dello spessore del metro. Nel punto d'incontro degli assi dei due fori è situata la prima punta di packfong, la quale così, quando il metro è disposto per la misura, riesce contemporaneamente visibile dal microscopio di osservazione e da quello di spia. La seconda punta, pure di packfong, è applicata alla testata inferiore sul prolungamento dell'asse del metro, ed è protetta da un cilindretto d'ottone, forato analogamente nel senso della larghezza e dello spessore del metro, in guisa da riescire anch'essa visibile ad un tempo dai due microscopî inferiori. Il cilindretto è ricoperto da un'armatura girevole, nella quale sono praticati dei fori in corrispondenza a quelli del cilindretto, in guisa da aprire o da intercettare a piacere l'adito alla punta.

Questo metro venne usato durante il periodo delle prime sei esperienze, nel quale si dovette però notare che esso presentava un altro inconveniente. Sulle punte terminali si andava depositando del pulviscolo, il quale aveva per effetto di aumentare la lunghezza apparente del metro, e, quantunque prima di incominciare una serie di osservazioni si avesse sempre la cura di pulire le punte con un delicato pennello, si aveva sempre il dubbio che vi restasse ancora aderente qualche impurità.

Per rimuovere anche questo dubbio, si fece costruire un nuovo metro d'acciaio M″, (Vedi fig. 6ª) colle testate costituite da due piastrine d'agata incastrate a coda di rondine nell'acciaio, alle quali per mezzo di due armature furono affacciate due punte. La lunghezza del campione era misurata dalla distanza fra i due piani d'agata, e la collimazione degli estremi si faceva col metodo di Fizeau, bisecando col filo micrometrico l'intervallo fra la immagine diretta e la riflessa di ciascuna punta. Anche qui le armature furono munite di fori laterali, in modo da rendere le punte visibili contemporaneamente ai microscopî di misura ed a quelli di spia. Con questo metro vennero eseguite tutte le rimanenti esperienze.

I coefficienti di dilatazione dei due metri M' ed M'' vennero determinati dal dott. Ascoli col *dilatometro di Fizeau* (Vedi Allegato), e sono i seguenti:

coefficienti di dilatazione del metro M' $\begin{cases} a = 10^{-9}(10232 \pm 38\ ) \\ b = 10^{-9}(\ \ 8,5 \pm 0,5) \end{cases}$

" " " M'' $\begin{cases} a = 10^{-9}(10006 \pm 38\ ) \\ b = 10^{-9}(\ \ 10,9 \pm 0,5) \end{cases}$

Il metro veniva sospeso verticalmente davanti ai microscopî per mezzo dell'armatura già descritta (V. M. § X), e disegnata in M nella fig. 1ª, le cui viti di rettifica permettevano di disporne con tutta esattezza le punte terminali sulla verticale fisicamente individuata dai due punti d'incontro degli assi dei microscopî inferiori e dei microscopî superiori.

§ XIII. — Comparazione dei metri.

I microscopî di misura, fissati nel muro sulla stessa verticale ed alla distanza di circa un metro l'uno dall'altro, costituivano, coi microscopî di spia e cogli indici, un eccellente *comparatore verticale*. Si è quindi approfittato di questa disposizione di apparecchi per eseguire la comparazione dei metri.

Ritenute le precedenti notazioni, (§ XI) si ha

$$\mathrm{D} - \mathrm{M} = m'' - m' ,$$
$$\mathrm{L} - \mathrm{M} = m'' - m' + \mathrm{I}' - \mathrm{I}'' .$$

La temperatura nella sala del pendolo, durante tutto il periodo delle osservazioni, venne mantenuta a 15°: le sue oscillazioni, come risulta dai quadri seguenti, non superarono mai i quattro o cinque centesimi di grado, mentre ancora più piccole e più lente furono le variazioni nella temperatura del muro, rivelate dal termometro interno ad esso.

Per tener conto delle prime si indichi con θ la temperatura del metro, con M_θ la corrispondente lunghezza, con M_{15} la sua lunghezza a 15°, con λ il suo coefficiente di dilatazione lineare per 1°. L'osservazione dà

$$\mathrm{D}_t - \mathrm{M}_\theta = m'' - m'$$

essendo D_t la distanza attuale fra gli zeri dei microscopî, alla temperatura t del muro. Ma

$$\mathrm{M}_\theta = \mathrm{M}_{15} + (\theta - 15)\,\lambda ,$$

quindi

$$\mathrm{D}_t - \mathrm{M}_\theta = \mathrm{D}_t - \mathrm{M}_{15} - (\theta - 15)\,\lambda .$$

Poichè θ, come si è detto, non differisce da 15° che per pochi centesimi di grado, si potrà porre $\lambda = 10^{\mu}$, epperò si avrà

$$\mathrm{D}_t - \mathrm{M}_{15} = m'' - m' + (\theta - 15)\,10^{\mu} .$$

È con questa piccola correzione che, dai valori $D_t - M_\theta$ direttamente osservati, furono dedotti i valori $D_t - M_{15}$ registrati nei quadri seguenti.

Non sarebbe stato possibile applicare una analoga riduzione alla distanza D_t fra gli assi dei microscopî, per avere la distanza D_{15} a 15°, essendo ignota la dilatazione del muro, ed essendo essa in ogni caso completamente mascherata dalla deformazione precedentemente dimostrata. Non restava che ricorrere ad una opportuna combinazione delle osservazioni, per eliminare questa causa d'errore, e si fece perciò uso delle *combinazioni alternate*.

Siano M′ ed M″ i metri da comparare. — Qualunque sia la legge di deformazione del muro, essa, come si è visto, agisce in modo continuo, epperò anche il termine correttivo, da aggiungersi alle grandezze M′ ed M″ misurate col comparatore, sarà rappresentabile da una funzione continua $f(\tau)$ del tempo τ. Se si sviluppa la funzione $f(\tau)$ in serie ordinata secondo le potenze crescenti della variabile, si arresta la serie al termine di 2° grado in τ, e si suppone di contare il tempo a partire dall'istante della prima osservazione, per la quale il termine correttivo si può supporre nullo, si ha

$$f(\tau) = a\tau + b\tau^2 ,$$

essendo a e b due coefficienti dei quali, come si vedrà, non occorre fare la determinazione.

Si supponga ora che dei due metri M′ ed M″ si siano fatte quattro misure nell'ordine seguente:

Nell'istante $\tau = 0$ si sia misurato M′, e la indicazione del comparatore sia H_1': si potrà scrivere

$$\text{(I)} \qquad M' = H_1' \qquad (\tau = 0)$$

Dopo l'intervallo τ_1 siasi misurato M″, e la indicazione del comparatore sia H_2'': per avere il vero valore della grandezza M″, bisognerà aggiungere il termine correttivo $a\tau_1 + b\tau_1^2$, quindi

$$\text{(II)} \qquad M'' = H_2'' + a\tau_1 + b\tau_1^2 \qquad (\tau = \tau_1)$$

Nella terza osservazione, fatta dopo l'intervallo $2\tau_1$ a partire dalla prima, siasi nuovamente misurato M′, e siasi ottenuta la indicazione H_3' del comparatore: aggiungendo il termine correttivo, si avrà l'equazione

$$\text{(III)} \qquad M' = H_3' + 2a\tau_1 + 4b\tau_1^2 \qquad (\tau = 2\tau_1)$$

In una quarta misura fatta sopra M″, dopo l'intervallo $3\tau_1$, siasi finalmente ottenuto H_4''; si avrà

$$\text{(IV)} \qquad M'' = H_4'' + 3a\tau_1 + 9b\tau_1^2 \qquad (\tau = 3\tau_1)$$

Facendo la media della prima e della terza misura, e confrontandola colla seconda, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Media di I e III} & M' = \dfrac{H_1' + H_3'}{2} + a\tau_1 + 2b\tau_1^2 \\ \text{II} & M'' = H_2'' + a\tau_1 + b\tau_1^2 \end{array}\right\} \quad M' - M'' = \frac{H_1' + H_3'}{2} - H_2'' + b\tau_1^2 .$$

Facendo la media della seconda e della quarta, e confrontandola colla terza, si ottiene invece:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Media di II e IV} & M''=\dfrac{H_2''+H_4''}{2}+2a\tau_1+5b\tau_1^2 \\ \text{III} & M'=H_3'+2a\tau_1+4b\tau_1^2\end{array}\right\} \quad M'-M''=H_3'-\frac{H_2''+H_4''}{2}-b\tau_1^2 .$$

La media dei due confronti dà quindi

$$M'-M''=\frac{H_1'+3H_3'-3H_2''-H_4''}{4} .$$

In questo modo si può eliminare l'errore proveniente dalla deformazione del muro, quando si ammetta che esso sia rappresentabile da una funzione quadratica del tempo.

Le prime esperienze di confronto vennero instituite nel Dicembre 1883 fra i due metri M' ed M'': esse sono distinte in quattro serie e formano il Gruppo A dei quadri seguenti.

Nel Febbraio 1884 i due metri M' ed M'' vennero comparati col metro N° 8 Gambey di acciaio, della Commissione Superiore dei pesi e misure, facendo uso ancora del comparatore verticale nella sala del pendolo. Le teste del metro Gambey vennero munite di armature con punte di packfong, per potere applicare il metodo di collimazione di Fizeau. I risultati di queste comparazioni sono distinti in sette serie, e formano il Gruppo B dei quadri seguenti.

Infine nel Marzo 1884 venne eseguito il confronto fra il metro Gambey N° 8 (N) ed il metro di platino (A) degli Archivi del Regno. — Questo confronto era già stato eseguito nel 1878 (Vedi Gazzetta Ufficiale n° 301, 23 Dicembre 1878), ed allora si era ottenuto il seguente risultato:

$$\text{alla temperatura di } 13^\circ{,}60 \qquad N=A+53^{\mu}{,}0$$

la quale equazione, ridotta a 0° coi coefficienti di dilatazione dati in seguito, diviene

$$\text{alla temperatura di } 0^\circ \qquad N_0=A_0+27^{\mu}{,}6 .$$

D'altra parte dal confronto fatto a Parigi nel Conservatorio d'Arti e Mestieri dal prof. Pisati (Settembre 1878), era risultato che il metro dei nostri Archivî supera il metro prototipo degli Archivî di Francia di $3^{\mu},5$. — La comparazione fatta nel 1878 dava quindi per equazione assoluta del metro Gambey N° 8

$$N_0=\text{cm. }100+31^{\mu}{,}1 .$$

Per eseguire il nuovo confronto dei metri N ed A, si fece uso del comparatore Gambey per metri a testate, tenuto per molti giorni nella sala del pendolo a temperatura costante. Si fecero due serie di confronti costituenti il Gruppo C dei quadri seguenti.

Senza entrare in particolari relativamente a questo apparecchio ben noto, qui si rammenterà solo che il confronto si effettua così: Si assume come costante C del comparatore la distanza fra la punta della vite micrometrica, quando il tamburo segna zero, e la punta della leva di sensibilità, quando la sua linea di fede cade nell'incrocicchio dei fili del microscopio. Questa distanza si assume un po' maggiore della lunghezza dei due metri che si vogliono comparare. Disponendo ciascun metro successivamente colle teste affacciate alle due punte, si gira la vite micrometrica spingendo il metro contro la leva di sensibilità, finchè la linea di fede di questa cade nell'incrocicchio dei fili del microscopio. Se a ed n sono le letture fatte sulla tamburella del micrometro col metro A e col metro N rispettivamente, si avrà

$$C - A = a \ ,$$
$$C - N = n \ ,$$

e quindi

$$N - A = a - n \ .$$

La comparazione venendo eseguita a temperatura costante, a meno di lievissime oscillazioni, riesce del tutto insensibile l'effetto della diversa dilatazione del metro e del banco di ghisa del comparatore.

Per rimuovere ogni possibilità di errori sistematici, si ebbe sempre l'avvertenza di spostare, fra un confronto e l'altro, tanto il banco quanto la vite micrometrica.

Per comprendere il modo col quale venne determinata la precisione dei risultati, si tenga presente che le comparazioni furono divise in tre gruppi, risultante ciascuno da parecchie serie di osservazioni, così:

Gruppo	Metri comparati	Serie di osservazioni
A	M′ ed M″	I II III IV
B	M′ M″ ed N	I II III IV V VI VII
C	A ed N	I II

I confronti dei primi due gruppi furono poi eseguiti in doppio modo, cioè prima tenendo conto delle sole letture fatte sugli estremi del metro, poi tenendo conto anche di quelle fatte sugli indici, corrispondentemente alle due equazioni

$$D - M = m'' - m' \ ,$$
$$L - M = m'' - m' + I' - I'' \ .$$

La precisione dei risultati ottenuti applicando la prima equazione, si ottenne nel seguente modo. Si determinarono gli errori medî dell'*unità di peso* E_A E_B dei gruppi A e B, facendo le medie dei valori ottenuti per $D_t - M_{15}$ in ogni serie, poi formando gli scostamenti δ dei singoli valori dalla media, ed applicando da ultimo la formola

$$E = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{\nu - \varkappa}}$$

ove ν è il numero totale delle osservazioni, $\varkappa$ il numero delle serie. L'errore medio unitario E_C corrispondente al terzo gruppo si ottenne trattando in modo analogo le differenze $a - n$. Si ebbero così i valori

$$E_A = 0^\mu{,}434 \ , \qquad E_B = 0^\mu{,}416 \ , \qquad E_C = 0^\mu{,}363 \ .$$

Gli errori medî dei risultati di ognuna delle serie si ottennero colla formola

$$\varepsilon = \frac{E}{\sqrt{n}} \ ,$$

dove n è il numero delle osservazioni costituenti la serie.

Gli errori medî dei risultati ottenuti colle combinazioni alternate si calcolarono infine colla formola

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon_1^2 + 9\varepsilon_2^2 + 9\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2} \ .$$

La precisione dei risultati avuti tenendo conto anche delle letture sugli indici si determinò colla formola

$$\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_{I'}^2 + \varepsilon_{I''}^2} \ ,$$

dove

$$\varepsilon_{I'} = 0^\mu{,}103 \qquad \varepsilon_{I''} = 0^\mu{,}095$$

sono gli errori medî delle letture fatte sugli indici. Più precisamente i valori di I' ed I'', dati nei quadri seguenti, sono ciascuno la media di quattro letture semplici, epperò anche i precedenti valori di $\varepsilon_{I'}$ ed $\varepsilon_{I''}$ sono quelli che corrispondono a dette medie.

La precisione del metro degli Archivî non essendo nota, si ritenne la sua lunghezza come data esattamente.

Nei risultati finali, cioè nelle equazioni assolute dei metri M' M'' ed N, si sostituì l'error probabile all'errore medio, scrivendolo di fianco ai risultati preceduto dal segno $\pm$.

I METRI COMPARATI SONO:

M' metro d'acciaio con punte rivolte in giù.
M'' metro d'acciaio con testa d'agata.
N metro d'acciaio N. 8 della Commissione metrica superiore.
A metro in platino degli archivi del Regno.

NOTAZIONI

ADOPERATE NELLE TAVOLE SEGUENTI:

I' = indice superiore.
I'' = » inferiore.
θ' = temperatura dell'aria indicata dal termometro alla parte superiore del metro.
θ'' = » » » » » inferiore del metro.
θ = $\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')$ temperatura media del metro.
t = temperatura del muro, indicata dal termometro posto nell'interno del muro.
D_t = distanza tra i microscopii alla temperatura t.
δ = scostamenti dei $D_t - M_{15}$ dalla loro media.

GRUPPO A.

Serie I. — Osservazioni sul metro M″.

(23 e 24 Dicembre 1883).

Oss. Prof. PISATI.

Posizione degli indici { al principio $I' = 52^{\alpha}.24$ $I'' = 47^{\beta}.48$; alla fine $I' = 51.71$ $I'' = 47.15$ }

Medie 51.98 47.32

differenza 4.66

N.	Data			θ′	θ″	θ	t	$D_t - M''_{15}$	δ	δδ
1	23^g	$4^h.30^m$	pom.	15°.01	14°.97	14°.99	15°.01	$+29^{\mu}.25$	$-0^{\mu}.21$	$0^{\alpha}.0441$
2	»	5.30	»	15.10	15.01	15.055	15.01	29.45	— 0.01	0.0001
3	»	6.30	»	14.96	14.94	14.95	15.01	29.74	+ 0.28	0.0784
4	»	10.30	»	14.95	14.93	14.94	15.01	29.97	+ 0.51	0.2601
5	24	0.00	—	15.01	14.96	14.985	15.02	30.04	+ 0.58	0.3364
6	»	2.00	ant.	15.02	14.95	14.985	15.02	30.31	+ 0.85	0.7225
7	»	2.45	»	15.03	14.96	14.995	15.02	28.89	— 0.57	0.3249
8	»	3.15	»	15.02	14.96	14.99	15.02	29.23	— 0.23	0.0529
9	»	4.00	»	15.02	14.96	14.99	15.02	29.44	— 0.02	0.0004
10	»	5.00	»	15.02	14.96	14.99	15.02	28.67	— 0.79	0.6241
11	»	6.30	»	15.02	14.96	14.99	15.02	29.47	+ 0.01	0.0001
12	»	7.00	»	15.02	14.96	14.99	15.02	29.04	— 0.42	0.1764
					Medie	14.99	15.02	29.46		[δδ] = 2.6204

$$D - M'' = +29^{\mu}.46 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.13$$

$$L - M'' = +29^{\mu}.46 + 4^{\mu}.66 = +34^{\mu}.12 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.19$$

Serie II. — Osservazioni sul metro M'.

(24 e 25 Dicembre 1883).

Oss. Prof. Pisati.

Posizione degli indici { al principio $I' = 51\overset{\mu}{.}71$ $I'' = 47\overset{\mu}{.}15$; alla fine $I' = 51.54$ $I'' = 46.93$

Medie 51.62 47.04

differenza 4.58

N.	Data			θ'	θ''	θ	t	$D_t - M'_{15}$	δ	$\delta\delta$
1	24^g	5.30$^{h\,m}$	pom.	15$\overset{o}{.}$01	14$\overset{o}{.}$98	15.00	15.01	+ 18$\overset{\mu}{.}$65	— 0$\overset{\mu}{.}$22	0$\overset{\mu}{.}$0484
2	"	6.00	"	15.02	15.00	15.01	15.02	18.37	— 0.50	0.2500
3	"	7.00	"	14.98	14.95	14.96	15.02	18.26	— 0.61	0.3721
4	"	10.00	"	15.00	14.97	14 99	15.02	19.00	+ 0.13	0.0169
5	25	0.00	—	14.98	14.94	14.96	15.02	18.99	+ 0.12	0.0144
6	"	1.00	ant.	15.00	14.97	14.98	15.02	18.46	— 0.41	0.1681
7	"	3.00	"	14.99	14.97	14 98	15.02	19.16	+ 0.29	0.0841
8	"	5.00	"	14.97	14.94	14.96	15.02	19.38	+ 0.51	0.2601
9	"	6.00	"	15.00	14.96	14.98	15.02	19.47	+ 0.60	0.3600
10	"	7.00	"	15.00	14.97	14.98	15.02	19.00	+ 0.13	0.0169
					Medie	14.98	15.02	18.87		$[\delta\delta] = 1.5910$

$$D - M' = + 18\overset{\mu}{,}87 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{,}14$$

$$L - M' = + 18\overset{\mu}{.}87 + 4\overset{\mu}{.}58 = + 23\overset{\mu}{.}45 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}20$$

Serie III. — Osservazioni sul metro M''.

(25 e 26 Dicembre 1883).

Oss. Prof. Pisati.

Posizione degli indici { al principio I' = 51.54 μ I'' = 46.93 μ ; alla fine I' = 51.92 I'' = 46.60

Medie 51.73 46.76

differenza 4.97

N.	Data			θ'	θ''	θ	t	$D_t - M''_{15}$	δ	δδ
	g	h m		o	o	o	o	μ	μ	μ
1	25	4.30	pom.	14.99	14.95	14.97	15.02	+ 30.26	— 0.40	0.1600
2	»	5.00	»	15 01	14.95	14.98	15.02	30.71	+ 0.05	0.0025
3	»	6.00	»	14.97	14.93	14 95	15.02	29.72	— 0.94	0.8836
4	»	7.00	»	15.07	14.99	15.03	15.01	30.30	— 0.36	0.1296
5	»	11.00	»	15.02	14.98	15.00	15.01	30.85	+ 0.19	0.0361
6	26	0.15	ant.	15.03	14.97	15.00	15.01	31.35	+ 0.69	0.4761
7	»	1.00	»	15.03	14.98	15.01	15.01	31.34	+ 0.68	0.4624
8	»	2.00	»	15.03	14.98	15.00	15.01	30.62	— 0.04	0.0016
9	»	3.00	»	14.98	14.94	14.96	15.01	30.76	+ 0.10	0.0100
10	»	6.15	»	15.02	14.96	14.99	15.01	30.67	+ 0.01	0.0001
					Medie	14.99	15.01	30.66	[δδ] = 2.1620	

$D - M'' = + 30.66$ μ $\varepsilon = 0.14$ μ

$L - M'' = + 30.66 + 4.97 = + 35.63$ μ $\varepsilon = 0.20$ μ

Serie IV. — Osservazioni sul metro M'.

(26 e 27 Dicembre 1883).

Oss. Prof. Pisati.

Posizione degli indici { al principio $I' = 51\overset{\mu}{.}92$ $I'' = 46\overset{\mu}{.}60$; alla fine $I' = 51.61$ $I'' = 46.67$

Medie 51.76 46.63

differenza 5.13

N.	Data			θ'	θ''	θ	t	$D_t - M'_{15}$	δ	δδ
1	26^g	6^h 00^m	pom.	15°.09	15°.02	15°.06	15°.01	+ 20$\overset{\mu}{.}$01	— 0$\overset{\mu}{.}$06	0$\overset{\mu}{.}$0036
2	"	6.30	"	15.03	14.97	15.00	15.01	19.54	— 0.53	0.2809
3	"	7.00	"	15.09	15.01	15.05	15.01	19.81	— 0.26	0.0676
4	"	10.00	"	15.02	14.96	14.99	15.01	20.29	+ 0.22	0.0484
5	"	11.00	"	15.02	14.96	14.99	15.01	20.22	+ 0.15	0.0225
6	"	11.15	"	15.02	14.96	14.99	15.01	20.24	+ 0.17	0.0289
7	27	0.00	—	14.98	14.93	14.96	15.01	20.07	—	—
8	"	1.00	ant.	15.03	14.99	15.01	15.01	20.30	+ 0.23	0.0529
9	"	2.00	"	14.98	14.94	14.96	15.01	20.26	+ 0.19	0.0361
10	"	3.00	"	15.00	14.95	14 97	15.01	19.57	— 0.50	0.2500
11	"	3.30	"	14.98	14.94	14.96	15.01	20.49	+ 0.42	0.1764
					Medie	14.99	15.01	20.07	[δδ] = 0.9673	

$$D - M' = + 20\overset{\mu}{.}07 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}18$$

$$L - M' = + 20\overset{\mu}{.}07 + 5\overset{\mu}{.}13 = + 25\overset{\mu}{.}20 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}19$$

GRUPPO B.

Serie I. — Osservazioni sul metro M″.

(14 e 15 Febbraio 1884).

Oss. Prof. PISATI.

Posizione degli indici { al principio $I' = 64\overset{\mu}{.}59$ $I'' = 46\overset{\mu}{.}60$; alla fine $I' = 64.87$ $I'' = 46.78$ }

Medie 64.73 46.69

differenza 18.04

N.	Data			θ′	θ″	θ	t	$D_t - M''_{15}$	δ	δδ
1	14^g	6.30^h m	pom.	15°.08	14°.98	15°.03	14°.96	+29^μ.41	−0^μ.20	0^μ.0400
2	"	7.00	"	15.07	14.97	15.02	14.96	30.40	+0.79	0.6241
3	"	7.30	"	15.06	14.96	15.01	14.96	29.90	+0 29	0.0841
4	"	9.00	"	15.06	14.97	15.02	14.98	29.83	+0.22	0.0484
5	"	9.30	"	15.04	14.95	14.99	14.98	29.83	+0.22	0.0484
6	"	10.00	"	15.03	14.94	14.99	14.98	30.03	+0.42	0.1764
7	15	3.00	ant.	15.03	14.94	14.98	14.99	29.52	−0.09	0.0081
8	"	3.30	"	15.03	14.94	14.98	14.98	29.43	−0.18	0.0324
9	"	4.00	"	15.04	14.94	14.99	14.99	29.24	−0.37	0.1369
10	"	4.30	"	15.05	14.94	15.00	15.00	28.89	−0.72	0.5184
11	"	5.00	"	15.05	14.95	15.00	14.99	29.22	−0.39	0.1521
					Medie	15.00	14.98	29.61	[δδ] =	1.8693

$$D - M'' = +29\overset{\mu}{.}61 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}13$$

$$L - M'' = +29\overset{\mu}{.}61 + 18\overset{\mu}{.}04 = +47\overset{\mu}{.}65 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}19$$

Serie II. — Osservazioni sul metro N. 8.

(15, 16 e 17 Febbraio 1884).

Oss. Prof. Pisati.

Posizione degli indici { al principio $I' = 64\overset{\mu}{.}87$ $I'' = 46\overset{\mu}{.}78$; alla fine $I' = 64.58$ $I'' = 46.62$ }

Medie 64.72 — 46.70

differenza 18.02

N.	Data			θ′	θ″	θ	t	$D_t - N_{15}$	δ	δδ
	g	h m		°	°	°	°	μ	μ	μ
1	15	6.30	pom.	15.05	14.97	15.01	15.00	— 157.25	— 0.65	0.4225
2	"	7.00	"	15.04	14.96	15.00	15.01	157.19	— 0.61	0.3721
3	"	7.45	"	15.04	14.97	15.00	15.01	156.96	+ 0.16	0.0256
4	"	9.15	"	15.04	14.96	15.00	15.00	157.89	+ 0.09	0.0081
5	"	10.00	"	15.05	14.96	15.00	15.00	157.84	+ 0.04	0.0016
6	"	10.30	"	15.05	14.97	15.01	15.00	158.41	+ 0.61	0.3721
7	"	11.00	"	15.05	14.97	15.01	15.01	158.74	+ 0.94	0.8836
8	"	11.30	"	15.05	14.97	15.01	15.02	158.64	+ 0.84	0.7056
9	16	0.00	—	15.04	14.96	15.00	15.00	157.97	+ 0.17	0.0289
10	"	3.00	ant.	15.04	14.96	15.00	15.00	158.03	+ 0.23	0.0529
11	"	3.35	"	15.04	14.96	15.00	15.01	158.45	+ 0.65	0.4225
12	"	4.00	"	15.04	14.97	15.01	15.00	158.40	+ 0.60	0.3600
13	"	4.30	"	15.05	14.97	15.01	15.01	158.61	+ 0.81	0.6561
14	"	5.00	"	15.04	14.96	15.00	15.00	157.77	— 0.03	0.0009
15	"	5.30	"	15.05	14.96	15.01	15.01	158.24	+ 0.44	0.0936
16	"	6.30	pom.	15.04	14.96	15.00	14.96	157.68	— 0.12	0.0144
17	"	7.00	"	15.03	14.95	14.99	14.96	157.63	— 0.17	0.0289
18	"	9.45	"	15.06	14.98	15.02	14.96	157.19	— 0.61	0.3721
19	"	10.15	"	15.03	14.95	14.99	14.96	157.78	— 0.02	0.0004
20	"	10.45	"	15.03	14.95	14.99	14.96	157.36	— 0.44	0.1936
21	17	3.00	ant.	15.05	14.95	15.00	14.98	157.97	+ 0.17	0.0289
22	"	3.30	"	15.06	14.96	15.01	14.98	157.27	— 0.53	0.2809
23	"	4.00	"	15.06	14.96	15.01	14.99	157.24	— 0.56	0.3136
24	"	5.30	"	15.03	14.95	14.99	15.00	157.35	— 0.45	0.2025
25	"	6.10	"	15.03	14.95	14.99	15.00	157.19	— 0.61	0.3721
					Medie	15.00	14.99	157.80		[δδ] = 6.3135

$D - N = -157\overset{\mu}{.}80$ $\varepsilon = 0\overset{\mu}{.}08$

$L - N = -157\overset{\mu}{.}80 + 18\overset{\mu}{.}02 = -139\overset{\mu}{.}78$ $\varepsilon = 0\overset{\mu}{.}16$

Serie III. — Osservazioni sul metro M″.

(17, 18 e 19 Febbraio 1884),

Oss. Prof. PISATI.

Posizione degli indici: al principio $I' = 64^{\mu}.58$ $I'' = 46^{\mu}.62$; 64.74 46.73; alla fine $I' = 64.89$ $I'' = 46.74$

Medie 64.74 46.70

differenza 18.04

N.	Data			θ′	θ″	θ	t	$D_t - M''_{15}$	δ	δδ
1	17^g	10^h.30^m	pom.	15°.03	14°.95	14°.99	15°.01	+ 28$^{\mu}$.00	0$^{\mu}$	0$^{\mu}$
2	»	11.00	»	15.02	14.95	14.98	15.00	28.57	+ 0.57	0.3249
3	»	11.30	»	15.02	14.95	14.99	15.00	28.24	+ 0.24	0.0576
4	18	0.00	—	15.03	14.96	14.99	15.01	27.84	— 0.16	0.0256
5	»	0.30	ant.	15.03	14.95	14.99	15.00	27.91	— 0.09	0.0081
6	»	3.45	»	15.06	14.96	15.01	15.00	27.81	— 0.19	0.0361
7	»	4.15	»	15.06	14.96	15.01	15.00	27.93	— 0.07	0.0049
8	»	4.45	»	15.06	14.95	15.00	14.99	27.83	— 0.17	0.0289

Fu spostato il metro rimessi e letti gli indici, indi rimesso il metro per le successive osservazioni.

N.	Data			θ′	θ″	θ	t	$D_t - M''_{15}$	δ	δδ
9	18	7.30	ant.	15.05	14.94	15.00	14.98	+ 28.39	+ 0.39	0.1521
10	»	10.00	»	15.04	14.94	14.99	14.96	28.34	+ 0.34	0.1156
11	»	10.30	»	15 07	14.96	15.01	14.95	28.27	+ 0.27	0.0729
12	»	11 00	»	15.05	14 95	15.00	14.95	28.05	+ 0.05	0.0025
13	19	00.00	—	15.04	14.93	14.98	14.98	27.70	— 0.30	0.0900
14	»	0.30	pom.	15.03	14.93	14 98	14 98	27.87	— 0.13	0.0169
15	»	1.00	»	15.03	14.93	14.98	15.00	27.60	— 0.40	0.1600
16	»	2.00	»	15.04	14.95	14.99	14.98	27.73	— 0.27	0.0729
17	»	2.30	»	15.05	14.95	15.00	15.00	27.74	— 0.26	0.0676
18	»	3.00	»	15.05	14.96	15.01	15.00	27.69	— 0.31	0.0961
19	»	4.15	»	15.04	14.95	14.99	15.00	28.01	+ 0.01	0.0001
20	»	4.45	»	15.04	14.95	15.00	15.00	28.53	+ 0.53	0.2809
					Medie	15.00	15.00	28.00		[δδ] = 1.6137

$D - M'' = + 28^{\mu}.00 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.09$

$L - M' = + 28^{\mu}.00 + 18^{\mu}.04 = + 46^{\mu}.04 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.17$

Serie IV. — Osservazioni sul metro N. 8.

(19, 20 e 21 Febbraio 1884).

Oss. Prof. Pisati.

Posizione degli indici	al principio	$I' = 64\overset{\mu}{.}89$	$I'' = 46\overset{\mu}{.}74$
		65.19	46.60
	alla fine	$I' = 65.40$	$I'' = 46.59$
	Medie	65.16	46.64
	differenza	18.52	

N.	Data			θ′	θ″	θ	t	$D_t - N_{15}$	δ	δδ
	g	h m		°	°	°	°	μ	μ	μ
1	19	6.30	pom.	15.03	14.96	14.99	15.02	— 156.93	— 1.03	1.0609
2	»	7.15	»	15.01	14.95	14.98	15.01	158.01	+ 0.05	0.0025
3	»	10 00	»	15.01	14.93	14.97	15.00	158.05	+ 0.09	0.0081
4	»	10.45	»	15.02	14.94	14.98	15.00	157.65	— 0.31	0.0961
5	20	3.50	ant.	15.04	14.96	15.00	15.01	158.68	— 0.28	0 0784
6	»	4.30	»	15.04	14.96	15.00	15.02	158.39	+ 0.43	0.1849
7	»	5.00	»	15.04	14 95	15.00	15 01	158.02	+ 0.06	0.0036
8	»	5.30	»	15.04	14.96	15.00	15.01	157.24	— 0.72	0.5184
Fu spostato il metro, rimessi e riletti gli indici, indi rimesso il metro per le successive osservazioni.										
9	20	6.30	pom.	15.06	14.96	15.01	15.00	— 157.45	— 0.51	0.2601
10	»	7.00	»	15.03	14.96	14 99	15.00	157.86	— 0.10	0.0100
11	»	7.15	»	15.02	14.95	14.99	15.00	158.57	+ 0.61	0.3721
12	»	7.30	»	15.01	14.94	14.97	15.00	157.66	— 0.30	0.0900
13	»	7.45	»	15.02	14.94	14.98	15.00	157.97	+ 0.01	0 0001
14	21	0.00	—	15.01	14 94	14.98	15.00	158.10	+ 0.14	0.0196
15	»	0.30	ant.	?	14.94	?	?	158.39	+ 0.43	0.1849
16	»	1.15	»	15.01	14.95	14.98	?	158.53	+ 0.57	0.3249
17	»	3.45	»	15.03	14.94	14.99	15.00	157.83	— 0.13	0.0169
18	»	4.15	»	15.02	14 95	14.98	15.01	158.10	+ 0.14	0.0196
19	»	4.45	»	15.04	14.96	15.00	15.01	157.72	— 0.24	0.0576
20	»	5.15	»	15.06	14.96	15.01	15.01	158.13	+ 0.17	0.0289
					Medie	14.99	15.005	— 157.96		[δδ] = 3.3376

$$D - N = -157\overset{\mu}{.}96 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}09$$

$$L - N = -157\overset{\mu}{.}96 + 18\overset{\mu}{.}52 = -139\overset{\mu}{.}44 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}17$$

Serie V. — Osservazioni sul metro M'.

(21 e 22 Febbraio 1884).

Oss. Prof. PISATI.

Posizione degli indici { al principio I' = 65.40μ I'' = 46.59μ ; alla fine I' = 65.28 I'' = 46.57

Medie 65.34 46 58

differenza 18.76

N.	Data			θ'	θ''	θ	t	$D_t - M'_{15}$	δ	δδ
1	21g	6h.45m	pom.	15°.06	14°.96	15°.01	14°.98	+ 17μ.41	+ 0μ.27	0μ.0729
2	"	7.15	"	15.04	14.95	15.00	14.98	17.16	+ 0.02	0.0004
3	"	7.45	"	15.06	14.95	15.01	14.98	16.92	— 0.22	0.0484
4	"	9.05	"	15.02	14.94	14.98	14.98	17.58	+ 0.44	0.1936
5	"	9.40	"	15.03	14.95	14.99	14.98	17.58	+ 0.44	0.1936
6	"	10.05	"	15.05	14.96	15.00	14.99	17.61	+ 0.47	0.2209
7	"	10.30	"	15.05	14.96	15.01	15.00	17.37	+ 0.23	0.0529
8	"	11.00	"	15.04	14.95	14.99	15.00	17.24	+ 0.10	0.0100
9	"	11.15	"	15.04	14.95	15.00	15.00	16.51	— 0.63	0.3969
10	"	11.30	"	15.04	14.95	14.99	15.00	17.25	+ 0.11	0.0121
11	"	11.45	"	15.03	14.95	14.99	15.01	16.62	— 0.52	0.2704
12	22	1.00	ant.	15.03	14.95	14.99	15.00	17.34	+ 0.20	0.0400
13	"	1.40	"	15.03	14.94	14.99	15.00	17.15	+ 0.01	0.0001
14	"	4.00	"	15.05	14.95	15.00	15.00	17.02	— 0.12	0.0144
15	"	4.30	"	15.05	14.95	15.00	15.00	16.98	— 0.16	0.0256
16	"	5.00	"	15.05	14.95	15.00	15.00	16.51	— 0.63	0.3969
					Medie	15.00	14.995	17.14		[δδ] = 1.9491

$$D - M' = + 17^{\mu}.14 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.10$$

$$L - M' = + 17^{\mu}.17 + 18^{\mu}.76 = + 35^{\mu}.90 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.17$$

Serie VI. — Osservazioni sul metro N. 8.

(22 e 23 Febbraio 1884).

Oss. Prof. PISATI.

Posizione degli indici { al principio $I' = 65\overset{\mu}{.}28$ $I'' = 46\overset{\mu}{.}57$; alla fine $I' = 64.96$ $I'' = 46.48$

Medie 65.12 46.52

differenza 18.60

N.	Data			θ'	θ''	θ	t	$D_t - N_{15}$	δ	δδ
1	22^g	6.30^{hm}	pom.	15°.07	14°.94	15°.01	15°.00	— 157$\overset{\mu}{.}$51	— 0$\overset{\mu}{.}$43	0$\overset{\mu}{.}$1849
2	»	6.50	»	15.06	14.95	15.00	14.98	158.03	+ 0.09	0.0081
3	»	7.05	»	15.06	14.95	15.00	15.00	157.92	— 0.02	0.0004
4	»	7.20	»	15.07	14.96	15.02	15.00	157.46	— 0.48	0.2304
5	»	7.35	»	15.07	14.96	15.01	15.00	157.69	— 0.25	0.0625
6	»	10.15	»	15.02	14.93	14.98	15.00	157.36	— 0.58	0.3364
7	»	10.50	»	15.06	14.95	15.00	15.01	157.93	— 0.01	0.0001
8	23	0.00	—	15.01	14.93	14.97	15.01	158.88	+ 0.94	0.8836
9	»	0.30	ant.	15.01	14.93	14.97	15.01	157.91	— 0.03	0.0009
10	»	1.00	»	15.01	14.93	14.97	15.01	157.88	— 0.06	0.0036
11	»	2.00	»	15.03	14.94	14.98	15.01	158.65	+ 0.71	0.5041
12	»	2.30	»	15.03	14.94	14.99	15.01	158.00	+ 0.06	0.0036
13	»	3.00	»	15.05	14.95	15.00	15.01	158.74	+ 0.80	0.6400
14	»	4.00	»	15.05	14.95	15.00	15.02	157.86	— 0.08	0.0064
15	»	4.30	»	15.05	14.95	15.00	15.02	157.53	— 0.41	0.1681
16	»	5.00	»	15.06	14.96	15.01	15.02	158.17	+ 0.23	0.0529
17	»	5.30	»	15.04	14.95	15.00	15.02	157.91	— 0.03	0.0009
18	»	6.00	»	15.04	14.94	14.99	15.02	157.52	— 0.42	0.1764
					Medie	15.00	15.01	— 157.94	[δδ] = 3.2638	

$D - N = - 157\overset{\mu}{.}94 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}10$

$L - N = - 157\overset{\mu}{.}94 + 18\overset{\mu}{.}60 = - 139\overset{\mu}{.}34 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}17$

Serie VII. — Osservazioni sul metro M'.

(23 e 24 Febbraio 1884).

Oss. Prof. Pisati.

Posizione degli indici { al principio $I' = 64\overset{\mu}{.}96$ $I'' = 46\overset{\mu}{.}48$; alla fine $I' = 64.83$ $I'' = 46.47$ }

Medie 64.90 — 46.48

differenza 18.42

N.	Data			θ'	θ''	θ	t	$D_t - M'_{15}$	δ	δδ
1	23^g	7.00^{hm}	pom.	15°.05	14°.95	15°.00	14°.98	+ 16$\overset{\mu}{.}$83	+ 0$\overset{\mu}{.}$20	0$\overset{\mu}{.}$0400
2	»	7.30	»	15.05	14.95	15.00	15.00	16.73	+ 0.10	0.0100
3	»	10.30	»	15.04	14.95	15.00	15.00	15.80	— 0.83	0.6889
4	»	10.45	»	15.05	14.95	15.00	15.00	16.43	— 0.20	0.0400
5	»	11.00	»	15.05	14.95	15.00	15.00	16.16	— 0.47	0.2209
6	»	11.30	»	15.06	14.96	15.01	15.00	16.52	— 0.11	0.0121
7	24	0.00	—	15.06	14.96	15.01	15.00	16.54	— 0.09	0.0081
8	»	4.00	ant.	15.06	14.96	15.01	15.02	16.78	+ 0.15	0.0225
9	»	4.30	»	15.07	14.97	15.02	15.02	16.71	+ 0.08	0.0064
10	»	5.00	»	15.06	14.96	15.01	15.02	16.83	+ 0.20	0.0400
11	»	5.30	»	15.06	14.97	15.01	15.03	16.97	+ 0.34	0.1156
12	»	6.00	»	15.07	14.96	15.02	15.03	17.21	+ 0.58	0.3364
					Medie	15.01	15.01	16.63		[δδ] = 1.5409

$$D - M' = + 16\overset{\mu}{.}63 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}12$$

$$L - M' = + 16\overset{\mu}{.}63 + 18\overset{\mu}{.}42 + = 35\overset{\mu}{.}05 \quad \varepsilon = 0\overset{\mu}{.}18$$

Comparazione del metro N. 8 col metro degli Archivii.

(dal 2 all'8 marzo 1884).

Si è adoperato il comparatore Gambey pei metri a teste. Il tamburo o testa della vite è diviso in 250 parti, che a 15°.00 corrispondono allo spostamento di $500^{\mu}.63$ nella punta della vite; perciò il valore di una parte del tamburo a 15°.00 è

$$1^{p} = 2^{\mu}.0026$$

Notazioni adoperate nelle tavole seguenti:

θ' temperatura iniziale,
θ'' » finale,
θ » media d'un gruppo di quattro osservazioni alternate,
A metro in platino degli archivii del Regno

$$A = \text{cm. } 100 + 3^{\mu}.5 \pm\ ?$$

N metro d'acciaio N. 8 della Commissione metrica superiore,
C costante del comparatore,

$$\left.\begin{array}{l} C - A = a \\ C - N = n \end{array}\right\}$$ ciascun valore di a e di n risulta dalla media di otto misure [1].

[1] La disposizione data ai valori di a e di n, nei quadri seguenti, indica l'ordine con cui si sono susseguite le osservazioni alternate.

GRUPPO C.

Serie I.

Data	θ′	θ″	θ	a	n	N—A	N	δ	δδ
2^g $3^h.00$ pom.	$15^o.00$	$15^o.10$	$15^o.05$	$60^p.51$ 60.59	$32^p.86$ 33.39	$27^p.69$ 27.47	A + $27^p.58$	+ $0^p.10$	$0^p.0100$
» 6.00 »	15.00	15.12	15.06	195.86 195.95	168.00 168.08	27.82 27.82	A + 27.82	+ 0.34	0.1156
» 10.00 »	14.93	15.15	15.04	102.93 103.01	75.32 75.68	27.65 27.51	A + 27.58	+ 0.10	0.0100
3 9.15 ant.	14.95	15.10	15.03	158.36 158.19	131.01 130.69	27.51 27.59	A + 27.55	+ 0.07	0.0049
» 3.— pom.	14.95	15.11	15.03	61.79 61.55	34.48 34.36	27.19 27.13	A + 27.16	— 0.32	0.1024
» 6 »	14.97	15.11	15.04	89.51 89.84	62.53 62.49	27.00 27.19	A + 27.10	— 0.38	0.1444
» 9.30 »	14.94	15.12	15.03	196.75 196.81	169.31 169.25	27.47 27.53	A + 27.50	+ 0.02	0.0004
4 0.00 »	14.93	15.10	15.02	53.69 53.71	26.39 26.35	27.32 27.35	A + 27.33	— 0.15	0.0225
» 3.00 aut.	14.95	15.11	15.03	234.13 233.95	206.40 206.32	27.64 27.59	A + 27.62	+ 0.14	0.0196
» 6.30 »	14.94	15.10	15.02	167.48 167.40	140.18 139.86	27.46 27.58	A + 27.52	+ 0.04	0.0016
		Medio	15.035				A + 27.48		0.4314

$N = A + 27^p.48 \quad \varepsilon = 0^p.06$

Serie II.

Data	θ'	θ''	θ	a	n	N − A	N	δ	$\delta\delta$
5 3.30 pom.	14.95	15.11	15.03	39.68 40.89	12.96 13.31	27.33 27.75	A + 27.54	+ 0.07	0.0049
6 8.30 ant.	14.94	15 10	15.02	32.04 32.12	4.70 4.78	27.30 27.30	A + 27.30	— 0.17	0.0289
» 11.45 »	14.94	15.12	15.03	60.12 60.20	32.90 32.90	27.26 27.30	A + 27.28	— 0.19	0.0361
» 2.45 pom.	15.00	15.10	15.05	88.82 88.84	61.49 61.40	27.37 27.43	A + 27.40	— 0.07	0.0049
» 6.00 »	14.95	15.05	15.00	119.88 119.96	92.47 92.31	27.45 27.57	A + 27.51	+ 0.04	0.0016
» 9.00 »	14.95	15.13	15.04	149.28 149.14	121.75 121.60	27.60 27.61	A + 27.60	+ 0.13	0.0169
7 8.30 ant.	14.95	15 05	15.00	179.64 179.59	152.17 151.73	27.45 27.64	A + 27.55	+ 0.08	0.0064
» 9.30 pom.	14.94	15.14	15.04	214.27 214.23	186.70 186 55	27.65 27.70	A + 27.67	+ 0.20	0.0400
8 8.15 ant.	14.94	15.02	14 98	243.66 243.75	216.31 216.15	27.39 27.52	A + 27.46	— 0.01	0.0001
» 11.30 »	14.93	15.05	14.99	34.09 33.76	6.69 6.61	27.44 27.31	A + 27.38	— 0.09	0.0081
		Medie	15.02				A + 27.47		0.1479

N = A + 27.47 ε = 0.06

Riassunto delle due Serie di comparazioni per N ed A.

Serie I	$N = A + 27^p.48$
Serie II	$N = A + 27.47$
Media	$N = A + 27^p.475$

Riducendo le parti del tamburo in *micron*, col valore della parte sopra riportato, si ottiene, alla temperatura di 15°.03:

$$N = A + 55^{\mu}.02 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.08$$

Supponendo la temperatura di 15°.00, ed ammettendo pel platino e per l'acciaio i coefficienti ammessi nella verificazione decennale del 1878, cioè

pel metro d'acciaio N. 8	$a = 10^{\mu}.52$	$b = 0^{\mu}.0062$
» di platino	$a = 8.68$	$b = 0.0039$

si ottiene, per la temperatura di 0°,

$$N_0 + 159.20 = A_0 + 131^{\mu}.08 + 55.02 = A_0 + 186.10,$$

da cui

$$N_0 = A_0 + 26^{\mu}.9$$

mentre nel 1878 erasi ottenuto $N_0 = A_0 + 27.6$

differenza (1884)-(1878) $= - 0^{\mu}.7$

Ritenendo la temperatura di 15°.03 si otterrebbe

$$N_0 = A_0 + 26.84,$$

il quale risultato non differisce da

$$\mathbf{N_0 = A_0 + 26^{\mu}.90 \pm 0^{\mu}.05}$$

se non per una quantità assolutamente trascurabile. Si adotterà pertanto questo risultato, ottenuto supponendo di 15°.00 la temperatura media delle osservazioni.

Confronti dei metri M′ ed M″.

(dicembre 1883).

La temperatura del muro si è mantenuta costante durante le quattro serie di osservazioni, infatti il termometro racchiuso nel muro ha oscillato fra 15°.01 e 15°02.

Anche le temperature medie dell'aria si sono mantenute molto costanti: hanno oscillato dalla 1ª alla 4ª serie fra 14°.98 e 15°.00. Si può ritenere senz'altro la temperatura di 15°.00.

Facendo la media dei valori osservati di D — M si ottengono i seguenti risultati:

Serie I $D - M'' = 29^{\mu}.46$	I e III $M'' = D - 30^{\mu}.06$	} $M' - M'' = 11^{\mu}.19$
» II $D - M' = 18\ 87$	II $M' = D - 18\ 87$	
» III $D - M'' = 30\ 66$	II e IV $M' = D - 19\ 47$	} $M' - M'' = 11\ 19$
» IV $D - M' = 20\ 07$	III $M'' = D - 30\ 66$	
	Iª Media	$M' - M'' = 11\ 19$ $\varepsilon = 0^{\mu}.15$

Tenendo conto della posizione degli indici si avrebbe:

Serie				
Serie I	$L-M''=34^{\mu}.12$	I e III	$M''=L-34^{\mu}.88$	$M'-M''=11^{\mu}.43$
» II	$L-M'=23\ 45$	II	$M'=L-23\ 45$	
» III	$L-M''=35\ 63$	II e IV	$M'=L-24\ 33$	$M'-M''=11\ 30$
» IV	$L-M'=25\ 20$	III	$M''=L-35\ 63$	

IIa Media $M'-M''=11\ 36$ $\varepsilon=0^{\mu}.22$

Confronti di M′ ed M″ col N. 8.

(febbraio 1884)

Facendo la media dei valori osservati di D — M, D — N, si ottengono i seguenti risultati:

Serie					
Serie I	$D-M''=+\ 29^{\mu}.61$	I e III	$M''=D-\ 28^{\mu}.80$	$M''=N-186^{\mu}.60$	$M''=N-186^{\mu}.24$ $\varepsilon=0^{\mu}.10$
» II	$D-N=-157.80$	II	$N=D+157.80$		
» III	$D-M''=+\ 28.00$	II e IV	$N=D+157.88$	$M''=N-185.88$	
» IV	$D-N=-157.96$	III	$M''=D-\ 28.00$		
» V	$D-M'=+\ 17.14$	IV e VI	$N=D+157.95$	$M'=N-175.09$	$M'=N-174.96$ $\varepsilon=0^{\mu}.11$
		V	$M'=D-\ 17.14$		
» VI	$D-N=-157.94$	V e VII	$M'=D-\ 16.88$	$M'=N-174.82$	
VII	$D-M'=+\ 16.63$	VI	$N=D+157.94$		

IIIa Media $M'-M''=11^{\mu}.28$ $\varepsilon=0^{\mu}.152$

Tenendo conto della posizione degli indici si avrebbe:

Serie					
Serie I	$L-M''=-\ 47^{\mu}.65$	I e III	$M''=L-\ 46^{\mu}.84$	$M''=N-186^{\mu}.62$	$M''=N-186^{\mu}.13$ $\varepsilon=0^{\mu}.19$
» II	$L-N=+139.78$	II	$N=L+139.78$		
» III	$L-M''=-\ 46.04$	II e IV	$N=L+139.61$	$M''=N-185.65$	
» IV	$L-N=+139.44$	III	$M''=L-\ 46.04$		
» V	$L-M'=-\ 35.90$	IV e VI	$N=L+139.39$	$M'=N-175.29$	$M'=N-175.05$ $\varepsilon=0^{\mu}.19$
		V	$M'=L-\ 35.90$		
» VI	$L-N=+139.34$	V e VII	$M'=L-\ 35.48$	$M'=N-174.82$	
» VII	$L-M'=-\ 35.05$	VI	$N=L+139.34$		

IVa Media $M'-M''=11^{\mu}.08$ $\varepsilon=0^{\mu}.27$

Riassunto.

Senza tener conto degli indici

I	$M'-M''=11^{\mu}.19$	$M'-M''=11^{\mu}.23$	$\varepsilon=0^{\mu}.11$
III	$M'-M''=11\ 28$		

Tenendo conto degli indici

II	$M'-M''=11^{\mu}.36$	$M'-M''=11^{\mu}.22$	$\varepsilon=0^{\mu}.17$
IV	$M'-M''=11\ 08$		

Equazioni dei metri d'acciaio M' ed M'' a 15°.00.

Dalle comparazioni del N. 8 col metro degli Archivii risulta

$$N_{15} = A_0 + 186^{\mu}.1 = \text{cm } 100 + 3^{\mu}.5 + 186^{\mu}.1 = \text{cm } 100 + 189^{\mu}.6 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.08$$

Se si tiene conto delle letture sugli indici si ha

$$M'_{15} = N_{15} - 175^{\mu}.05 = \text{cm } 100 + 14^{\mu}.55 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.21$$
$$M''_{15} = N_{15} - 186\ \ 13 = \text{cm } 100 + \ \ 3\ \ 47 \quad \varepsilon = 0\ \ 20$$

da cui $M' - M'' = 11^{\mu}.08 \quad \varepsilon = 0\ \ 29$

mentre il confronto diretto diede $M' - M'' = 11\ \ 36 \quad \varepsilon = 0\ \ 15$

Trascurando invece le letture sugli indici, si avrebbe

$$M'_{15} = N_{15} - 174^{\mu}.96 = \text{cm } 100 + 14^{\mu}.64 \quad \varepsilon = 0^{\mu}.14$$
$$M''_{15} = N_{15} - 186\ \ 24 = \text{cm } 100 + \ \ 3\ \ 36 \quad \varepsilon = 0\ \ 13$$

da cui $M' - M'' = 11^{\mu}.28 \quad \varepsilon = 0\ \ 19$

mentre il confronto diretto diede $M' - M'' = 11\ \ 19 \quad \varepsilon = 0\ \ 15$

Le differenze tra i metri M' ed M'', dedotte dai confronti dei due metri col N. 8, e quelle risultanti dal loro confronto diretto, tanto se si tien conto delle letture fatte sugli indici, quanto se si trascurano, sono dunque sufficientemente concordanti.

Poichè colla introduzione delle letture sugli indici si eliminano gli errori dovuti agli eventuali spostamenti degli assi dei microscopî l'uno rispetto all'altro (v. § XI) si è creduto conveniente di adottare per le *equazioni assolute* dei metri M' ed M'' quelle determinate tenendo conto di tali letture, cioè:

a 15° **$M' = \text{cm } 100 + 14^{\mu}.55 \quad \pm 0^{\mu}.14$**

a 15° **$M'' = \text{cm } 100 + \ \ 3.\ 47 \quad \pm 0\ \ 14$**

§ XIV. — Misura della durata d'oscillazione — Osservazione diretta dei passaggi del pendolo per la verticale.

Per misurare la durata degli intervalli di esperienza si adottarono, nelle diverse epoche, sistemi diversi. Nelle prime esperienze, cioè dalla 1ª alla 24ª, si fece uso esclusivamente, da entrambi gli operatori, delle *osservazioni dirette* e *reiterate* dei passaggi del pendolo per la verticale. Nelle esperienze 29ª, 38ª, 39ª si fece uso soltanto della *registrazione automatica* degli istanti dei passaggi. Nelle esperienze rimanenti si adottarono promiscuamente i due metodi.

Col primo sistema, tanto al principio che alla fine dell'intervallo d'esperienza, ciascun operatore osservava, facendo uso del cannocchiale per la misura delle ampiezze, cinque oppure dieci serie di passaggi del pendolo per la verticale, ogni serie essendo costituita da 11 osservazioni ed essendo separata per un breve intervallo dalla successiva. Gli istanti dei passaggi venivano trasmessi con un tasto a mano al cronografo registratore di Hipp, collocato nella sala Q (V. § II).

La media dei passaggi (equidistanti) di una serie al principio della esperienza, combinata colla media dei passaggi della serie omologa alla fine, dava così una durata dell'intervallo d'esperienza, e questa, divisa per il numero delle oscillazioni, determinato per via di successive approssimazioni col solito metodo (V. M. § XXV), forniva un valore della durata media d'oscillazione. In tal modo si ottenevano, a seconda dei casi, dieci oppure venti valori indipendenti della durata d'oscillazione.

L'errore medio della osservazione di un passaggio si determinò, per ciascuno dei due osservatori, ricostruendo a partire dal principio e dalla fine di ogni intervallo, colla durata media di oscillazione calcolata, i tempi che si sarebbero dovuti ottenere per gli istanti dei passaggi precedenti e successivi, formando gli scostamenti, ed applicando la solita formola.

Coi dati di una delle esperienze, scelta a caso, si ottennero i seguenti errori medi:

Osservatore prof. Pisati

Passaggi del pendolo lungo per la verticale $m = 0^s.065$
" corto " $m = 0^s.048$

Osservatore prof. Pucci

Passaggi del pendolo lungo per la verticale $m = 0^s.056$
" corto " $m = 0^s.036$.

L'ispezione delle tavole degli scostamenti non palesa alcuna dipendenza fra la loro grandezza e l'ampiezza d'oscillazione: per questa ragione, nel determinare i precedenti errori medi, vennero introdotte in calcolo contemporaneamente le osservazioni iniziali e le finali.

Altre determinazioni, fatte nello stesso modo, mostrarono che l'errore medio casuale di un passaggio non supera in generale $0^s.06$ per il pendolo lungo, e $0^s.05$ per il pendolo corto. Quanto all'errore sistematico, esso si può ritenere nullo, come venne già dimostrato nella Memoria pubblicata (§ XXI), e come risultò da successive esperienze instituite in modo analogo. Ne segue che la media degli 11 segnali, costituenti ogni serie, si può ritenere affetta da un errore non superiore a $0^s.018$ per il pendolo lungo, ed a $0^s.015$ per il pendolo corto.

Di qui si può facilmente dedurre l'errore medio della durata di una oscillazione, determinata coll'osservazione diretta dei passaggi del pendolo per la verticale. L'errore medio della determinazione di un intervallo d'esperienza è

per il pendolo lungo $0^s.018 \sqrt{2} = 0^s.025$,
" corto $0^s.015 \sqrt{2} = 0^s.021$.

Ammettendo che un intervallo d'esperienza sia in media costituito da 12000 oscillazioni nel caso del pendolo corto, e da 16000 oscillazioni nel caso del pendolo lungo, si ottengono i seguenti valori per l'errore medio di una determinazione semplice della durata d'oscillazione:

per il pendolo lungo $0^s,000002.1$,
" corto $0^s,000001.3$.

Nel caso più sfavorevole, in cui gli osservatori osservano cinque serie iniziali e cinque finali ciascuno, si hanno dieci intervalli, epperò si ottengono. per l'errore medio della durata d'oscillazione definitiva, i due valori

per il pendolo lungo $0^s,000000.67$,
» corto $0^s,000000.41$.

§ XV. — Registrazione automatica dei passaggi del pendolo per la verticale.

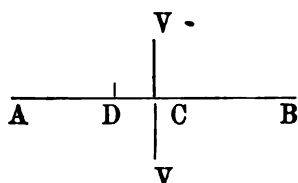
La *registrazione automatica* dei passaggi venne effettuata col medesimo apparecchio già descritto nella Memoria precedente (§ XIX), al quale venne solo apportata una lieve modificazione, avente per oggetto di regolare l'altezza del piano di sostegno delle due goccie di mercurio, dall'esterno della sala del pendolo. Volendo da principio evitare che la corrente si trasmettesse attraverso il filo di sospensione del pendolo, si imperniò sulla mira un cilindretto d'avorio attraversata da un esilo filo di platino piegato a guisa di forcella, colle punte rivolte in basso (fig. 7ª). Ruotando opportunamente il piano delle due punte, e disponendo le due goccie sotto il pendolo, si faceva in modo che le punte si immergessero contemporaneamente nelle due goccie, nell'istante del passaggio del pendolo per la verticale, producendo così automaticamente la chiusura e riapertura del circuito, e quindi la registrazione del passaggio al cronografo. Registrato l'istante iniziale dell'intervallo d'esperienza, si toglievano le goccie e non si riaffacciavano alle punte se non alla fine dell'intervallo, per registrare in modo analogo l'istante finale.

Questo modo di segnalazione si dovette però bentosto constatare affetto dal grave inconveniente che alla fine dell'esperienza, quando l'ampiezza d'oscillazione era ridotta più piccola, per effetto dell'urto della forcella contro le goccie, il pendolo subiva spesso un movimento oscillatorio di torsione intorno al proprio asse. Per questa ragione la mira con forcella venne adoperata soltanto nella esperienza 25ª, ed in tutte le successive si adottò una mira a punta unica (fig. 8ª), trasmettendo la corrente attraverso il filo di sospensione del pendolo.

A tal uopo al di sopra del pezzo in cui erano praticati i pozzetti, che prima si riempivano di mercurio, venne applicato un dischetto di sughero solcato diametralmente da una fessura. Questa riempivasi ridondantemente con mercurio, in guisa che esso venisse ad assumervi una superficie libera di forma prismatica, cioè costituita da due faccie piane intersecantisi in uno spigolo assai netto. Disponendo questo spigolo ortogonalmente al piano d'oscillazione del pendolo, e regolandone opportunamente l'altezza, si poteva fare in modo che la punta oscillante lo sfiorasse leggermente, chiudendo il circuito per un tempo brevissimo.

Le registrazioni del cronografo non riescivano naturalmente costituite da punti, ma da tratti tanto più lunghi quanto maggiore era la durata della chiusura del circuito: il punto di mezzo di tali tratti era quello che doveva assumersi a rappresentare l'istante del passaggio del pendolo per la verticale.

La determinazione di un intervallo, col presente metodo, si effettuava così: Si disponeva dapprima il menisco prismatico di mercurio colla maggiore approssimazione possibile sulla verticale del pendolo, spostandolo a destra od a sinistra colle opportune viti di correzione, fino a che due o più oscillazioni consecutive, registrate dal cronografo, risultassero della medesima durata. Così predisposto l'apparecchio, si registrava il principio dell'intervallo, raccogliendo tre passaggi consecutivi e poi ritirando il menisco di mercurio, in guisa da lasciare oscillare liberamente il pendolo. La segnalazione della fine dell'intervallo si faceva in modo analogo, riaffacciando il mercurio alla punta oscillante e raccogliendo di nuovo tre passaggi consecutivi. L'intervallo si intendeva determinato dall'istante del primo passaggio della serie iniziale e dall'istante del primo passaggio della serie finale. A questi due passaggi si dovevano però applicare due correzioni, l'una relativa alla posizione del menisco di mercurio, l'altra relativa alla parallasse della penna di registrazione.

Sia VV la verticale, AB i limiti della escursione del pendolo, e si supponga che, per effetto del non esatto collocamento del menisco di mercurio, la chiusura del circuito, invece di aver luogo nel punto centrale C, si effettui lateralmente in D. Supponendo il pendolo mobile dapprima da A verso B, all'istante registrato dal cronografo dovrà aggiungersi il tempuscolo θ, impiegato dal pendolo a percorrere il cammino DC. Questo tempuscolo si può determinare colla registrazione dei due passaggi successivi, perchè se T_1 e T_2 sono le due durate d'oscillazione da essi limitate, cioè i tempi impiegati dal pendolo a percorrere i due cammini DCBCD e DAD, sarà

$$T_1 - T_2 = 4\theta, \qquad \theta = \frac{T_1 - T_2}{4}.$$

I segnali automatici erano tracciati da una delle due penne del cronografo *Hipp*, mentre l'altra era adibita alla registrazione dei secondi dell'orologio *Dent*. Tanto al principio che alla fine di ogni esperienza, si determinava la parallasse delle due penne, l'una rispetto all'altra, includendole nel medesimo circuito coll'orologio *Dent*, ed obbligandole a tracciare contemporaneamente una serie di 14 o 15 secondi; poi senza toccarle, per mezzo della opportuna spina di commutazione si mettevano separatamente in comunicazione l'una coll'apparecchio automatico, l'altra col regolatore. La valutazione della parallasse e la lettura dei segnali automatici veniva effettuata colla tavoletta di *Oppolzer*, colla quale si può apprezzare con tutta sicurezza il centesimo di secondo: la cifra dei millesimi veniva ritenuta solo per accertare la precedente.

A meglio illustrare quanto precede, si riportano qui i risultati ottenuti nella esperienza 29ª. Le due correzioni relative alla posizione della goccia ed alla parallasse sono indicate con c_g e c_p rispettivamente.

Pendolo lungo.

Principio dell'intervallo.

	h m s	
I	6.38.45.095	$T_1 = 1.^s617$
II	46.712	$T_2 = 1.\ 610$
III	48.322	
c_g	— 0.002	
c_p	— 0.078	
Istante iniziale	6.38.45.015	
» finale	10.37.28.499	
Intervallo	h m s 3.58.43.484	

Fine dell'intervallo.

	h m s		
I	10.37.28.371 776	$28.^s573$	$T_1 = 1.^s598$
II	29.950 30.392	30. 171	$T_2 = 1.\ 614$
III	31.558 32.012	31. 785	
c_g =	— 0.004		
c_p =	— 0.070		
Istante finale	h m s 10.37.28.499		

Pendolo corto.

Principio dell'intervallo.

	h m s	
I	6.06.58.883	$T_1 = 1.^s255$
II	60.138	$T_2 = 1.\ 260$
III	61.398	
c_g	— 0.001	
c_p	— 0.073	
Istante iniziale	6.06.58.809	
» finale	10.18.33.573	
Intervallo	h m s 4.11.34.764	

Fine dell'intervallo.

	h m s		
I	10.18.33.390 906	$33.^s648$	$T_1 = 1.^s267$
II	34.623 35.207	34. 915	$T_2 = 1.\ 272$
III	35.883 36.491	36. 187	
c_g	— 0.001		
c_p	— 0.074		
Istante finale	h m s 10.18.33.573		

In principio dell'intervallo, essendo più rapidi i passaggi e quindi più brevi i segnali cronografici, si potè effettuare alla tavoletta di Oppolzer la lettura del loro punto di mezzo con un solo puntamento. Per i segnali finali si puntarono invece gli estremi del tratto, prendendo la media delle corrispondenti letture.

Nelle esperienze nelle quali si adottarono entrambi i metodi di registrazione dei passaggi (il diretto e l'automatico), si ritenne come durata della oscillazione la media di quelle ottenute nei due modi, avendo le molte prove di confronto dimostrata la loro equivalente precisione.

Come durata d'oscillazione definitiva di una esperienza completa si adottò poi la media di quelle ottenute nelle singole esperienze elementari, il cui numero venne determinato dietro i principî già esposti nella Memoria pubblicata (§ XXVII). Natu-

ralmente si eseguì un maggior numero di esperienze elementari coi pendoli a palle leggiere, i quali sono maggiormente influenzati dal mezzo ambiente, ed hanno le ampiezze d'oscillazione più rapidamente decrescenti. Volendo poi ritenere variabile entro i limiti più ristretti possibili il numero complessivo delle oscillazioni, venne in generale eseguita, coi pendoli lunghi, una esperienza elementare in più che coi pendoli corti (Vedi i Quadri riassuntivi).

§ XVI. — Osservazioni astronomiche. Strumento dei passaggi: livella.

Le durate degli intervalli d'esperienza e delle oscillazioni, determinate coi metodi precedentemente esposti, erano riferite all'orologio *Dent*, mantenuto esso pure a temperatura costante nella sala del pendolo, onde evitare gli errori eventuali di compensazione. Le osservazioni astronomiche, per regolare il pendolo *Dent*, furono eseguite con uno strumento a passaggi trasportabile della casa *Bamberg* di Berlino.

Esso è montato nel giardino adiacente alla Scuola degli Ingegneri, sopra un solido pilastro in muratura della forma di un tronco di piramide quadrangolare a spigoli smussati, colla base maggiore in basso, e la base superiore costituita da un parallelepipedo di travertino avente il lato di m. 1,10. Il pilastro è profondato per m. 3,50 nel sottosuolo del giardino, pesa circa tre tonnellate e poggia sopra un grosso strato di sabbia mista a carbone, avente per oggetto di smorzare i piccoli movimenti vibratorii del terreno: esso è di più isolato dall'osservatore, il quale si muove sopra una specie di terrazza circostante al pilastro, a livello del suolo. Una grossa corda di crine vegetale si avvolge a spira intorno alla porzione del pilastro sporgente dal suolo; una grossa coperta di lana lo copre superiormente, di modo che le esterne variazioni di temperatura non possono trasmettersi che molto lentamente al blocco di muratura.

Le tre delicate livelle applicate alla base dello strumento, e le due costanti di inclinazione e di azimut conservantisi pressochè invariate per lunghi pediodi di tempo, e solo soggette a lievi variazioni periodiche coll'ora e colla temperatura, confermarono sempre la più che sufficiente stabilità dello strumento.

Le principali costanti dello strumento sono le seguenti:

Apertura dell'obbiettivo . . .	$0^{m}.068$
Distanza focale dell'obbiettivo .	$0^{m}.90$
Valore della parte della livella	$0^{s}.0733$.

Il micrometro oculare porta 9 fili fissi distribuiti in un gruppo centrale di 5 fili e due coppie di fili laterali, ed un filo mobile. Le distanze angolari dei fili da quello centrale, ripetutamente determinate col metodo astronomico, espresse in tempo, sono le seguenti:

Filo I	$44^{s}.058$	Filo IX	$43^{s}.798$
» II	30.311	» VIII	28.350
» III	14.841	» VII	14.610
» IV	6.969	» VI	7.630

I fili sono numerati nell'ordine in cui essi sono incontrati dall'immagine di una stella al suo passaggio superiore, quando il cannocchiale è nella posizione diretta (oculare Est).

Valore della parte del micrometro oculare $0^s.0389$.

Alla grande livella venne apportato un leggiero perfezionamento, avente per oggetto di togliere od almeno di rendere costante l'errore di assestamento della bolla, dovuto alla viscosità dell'etere solforico. Ad una sua estremità venne applicata una vite per mezzo della quale si spostava ogni volta la bolla dello stesso numero di parti della graduazione, lasciandola poi libera a sè: si conseguiva così il risultato di far pervenire la bolla alla sua posizione d'equilibrio, non solo sempre nel senso crescente della graduazione (lo zero essendo laterale), ma anche sempre con identica velocità.

Il valore della parte della grande livella venne determinato replicate volte, adottando due diversi sistemi di misura. Nel primo sistema si fece uso dello stesso istrumento dei passaggi, tramutato, coll'aggiunta di due pezzi, in un sensibilissimo comparatore di livelle. Il sostegno dello strumento è costituito da due solidi pezzi triangolari di ghisa, l'uno fissato al pilastro, l'altro poggiante sopra il primo per mezzo di tre viti ABC, disposte in modo da formare un triangolo isoscele colla base AB $= 336^{mm}.65$ e l'altezza CD $= 839^{mm}.22$. In prossimità del vertice C viene fissato, alla porzione superiore del sostegno, un pezzo d'acciaio, portante tre piccoli piani di cristallo, sui quali si appoggiano le punte del piede di uno sferometro, disposto in modo che l'asse della vite di misura coincida coll'asse della vite C. Alla porzione inferiore del sostegno viene adottato un altro pezzo d'acciaio, col mezzo del quale alla punta della vite dello sferometro viene affacciato un piano d'agata. La livella da studiare viene adagiata sulla parte mobile superiore del sostegno parallelamente alla perpendicolare CD; per mezzo della vite C si fa ruotare questa intorno all'asse AB variandone l'inclinazione, mentre gli spostamenti verticali dell'estremo C si misurano collo sferometro.

Altre determinazioni furono fatte con un comparatore di livelle della Società Ginevrina: non essendo però questo per sè stesso troppo preciso, si studiò preventivamente il passo della vite, determinandone l'errore periodico. Con queste precauzioni si pervenne ad ottenere risultati paragonabili ai primi. Tutte queste determinazioni ebbero anche per effetto di mostrare la soddisfacente equabilità di curvatura della livella.

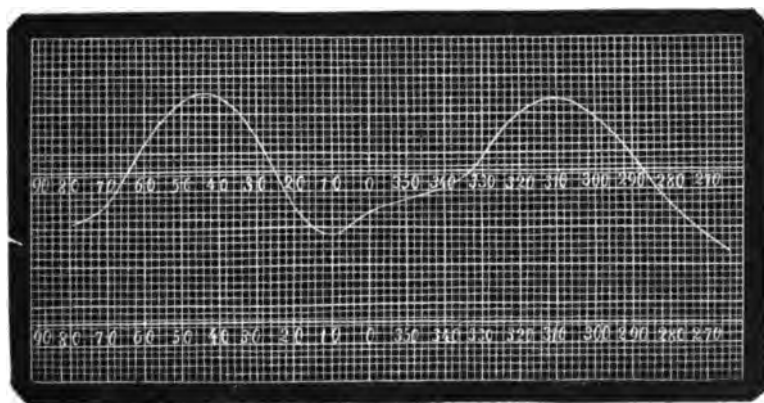
§ XVII. — Costante d'inclinazione. Conicità dei perni.

La costante d'inclinazione b (elevazione sull'orizzonte dell'estremo Ovest dell'asse di rotazione del cannocchiale) si determinava così: Fissato il cannocchiale in attesa del passaggio di una determinata stella, se ne notava la distanza zenitale, poi condotta la bolla alla posizione d'equilibrio colla precauzione sopra accennata, si facevano le letture E ed O sugli estremi della bolla situati verso Est e verso Ovest rispettivamente; rovesciata la livella si facevano le nuove letture E′ O′. La livella chiama-

vasi diretta o rovesciata a seconda che lo zero della graduazione era ad Est o ad Ovest. Se E, O erano le letture della livella diretta ($E < O$), E′, O′ quelle della livella rovesciata ($E' > O'$), la costante b si calcolava in parti di livella, col segno voluto, colla formola

$$b = \frac{(E + O) - (E' + O')}{4}.$$

I perni del cannocchiale vennero lungamente studiati dal sig. Silvio Marianni, calcolatore del Gabinetto di Geodesia, diligente e scrupoloso osservatore, morto immaturamente nel luglio 1888.

Se, per mezzo del piccolo cerchio cercatore, si fissa il cannocchiale alla distanza zenitale di 25°, e si determina la costante d'inclinazione b nella posizione diretta dello strumento (oculare Est) e nella posizione rovesciata (oculare Ovest), si trova che il primo valore supera il secondo di 4 parti di livella. Ciò deriva dal fatto che i perni presentano nel loro insieme una forma conica, e la generatrice su cui poggia la livella, corrispondente alla predetta distanza zenitale di 25°, è inclinata di una parte sull'asse del cono. Le altre generatrici del cono hanno sull'asse una inclinazione variabile colla distanza zenitale, letta sul cerchio cercatore: la legge di variazione venne dal predetto sig. Marianni compendiata in una curva, le ascisse dei punti della quale rappresentano

le distanze zenitali ζ, e le ordinate le correzioni da portarsi alla somma delle due letture, fatte per ogni posizione della livella.

Per poter far uso di un'unica curva nelle due posizioni del cannocchiale e della livella, si convenne di contare le ordinate a partire da due diversi assi a seconda dei diversi casi, dietro la seguente regola:

A cannocchiale diretto ed a livella diretta le ordinate si contano positivamente a partire dall'asse inferiore.

A cannochiale diretto ed a livella rovesciata le ordinate si contano negativamente a partire dall'asse superiore.

A cannocchiale rovesciato ed a livella diretta le ordinate si contano negativamente a partire dall'asse superiore.

A cannocchiale rovesciato ed a livella rovesciata le ordinate si contano positivamente a partire dall'asse inferiore.

Ogni centimetro delle ordinate rappresenta una parte di livella: la curva qui unita è stata ridotta nella scala di $\frac{1}{2}$.

Per meglio chiarire il modo di usare la curva si riporta qui un esempio.

Cannocchiale diretto (Oculare Est).

ζ	E	O	E + O	Correzioni	Somma delle letture corretta	Differenze
317°.40'	24.1	49.3	73.4	+ 5.6	79.0	
339.00	55 5	29.7	85.2	+ 0.4	85.6	— 6.6
69.10	26.2	51.8	78.0	+ 3.1	81.1	— 4.5
308.20	56.9	29.9	86.8	— 1.8	85.0	— 3.9
325.20	23.8	50.8	74.6	+ 5.1	79.7	— 5.3
51.30	57.2	30.0	87.2	— 1.8	85.4	— 5.7
51.30	22.5	50.3	72.8	+ 5.8	78.6	— 6.8
51.40	58.2	30.0	88.2	— 1.8	86.4	— 7.8

Valor medio di $b = -\frac{5.8}{4} = -1^p.45 = -0^s.106$

Cannocchiale rovesciato (Oculare Ovest).

ζ	E	O	E + O	Correzioni	Somma delle letture corretta	Differenze
19.20	26.3	55.0	81.3	+ 0.7	82.0	
2.25	54.3	25.7	80.0	+ 2.8	82.8	— 0.8
31.54	26.2	55.3	81.5	— 1.0	80.5	— 2 3
58.30	53.3	24.0	77.3	+ 5.1	82.4	— 1.9
7.50	25.1	54.8	79.9	+ 1.5	81.4	— 1.0
314.40	53.0	23.7	76.7	+ 5.7	82.4	— 1.0

Valor medio di $b = -\frac{1.4}{4} = -0^p.35 = -0^s.026$

L'uso della curva di correzione per la conicità dei perni venne però introdotto, in modo sistematico, soltanto nell'ultima serie di osservazioni (anno 1887). Per effetto di questa correzione l'errore medio della determinazione di b, che prima era di circa $0^s.1$, venne abbassato a circa $0^s.05$.

§ XVIII. — Costante di collimazione. Illuminazione.

Per la determinazione della costante di collimazione c si fece uso di due collimatori, situati nel meridiano l'uno a Nord e l'altro a Sud, effettuando il rovesciamento del cannocchiale. L'uso dei due collimatori ha per oggetto di eliminare l'errore dovuto ad una eventuale variazione dell'azimut, prodotta dal rovesciamento. I collimatori, aventi la distanza focale di $0^m.33$, sono a tratti brillanti in campo oscuro: questi sono forniti da un vetrino piano a faccie parallele, ricoperto su una faccia da uno strato sottilissimo d'argento, nel quale, per mezzo della macchina a dividere, vennero incisi dei tratti paralleli. Le immagini luminose nettissime di questi tratti, fornite da una lampadina elettrica collocata di fronte al vetrino, all'imboccatura del collimatore, si puntano con grande precisione per mezzo del filo micrometrico mobile. Usando tre di tali tratti per ciascun collimatore, e puntandoli successivamente, si possono avere sei determinazioni contemporanee della costante c.

Se c_V è il valore della costante c corrispondente alla visuale del filo V (filo centrale), se L_V è la lettura micrometrica fatta puntando il filo stesso col filo mobile, ed L la media delle letture ottenute puntando uno stesso tratto del collimatore, nelle due posizioni del cannocchiale, si ha

$$c_V = L_V - L \quad \text{a cannocchiale diretto}$$
$$c_V = -(L_V - L) \quad \text{» » rovesciato.}$$

Per dare una chiara idea del metodo sempre seguìto nella presente determinazione, si riporta qui un esempio numerico. Nelle colonne contrassegnate colle cifre I II III sono riportate le letture micrometriche fatte sui tre tratti luminosi dei collimatori.

Collimatore Sud.

	I	II	III
Oculare Est	$1129^p.0$	$1289^p.0$	$1451^p.0$
» Ovest	1363.0	1202.0	1040.5
Medie	1246.0	1245.5	1245.75

Collimatore Nord.

	I	II	III
Oculare Est	$1000^p.0$	$1351^p.0$	$1698^p.0$
» Ovest	1494.5	1143.0	798.0
Medie	1247.25	1247.0	1248.0

Lettura micrometrica sul filo V $L_V = 1248^p.5$
Media delle sei precedenti medie $L = 1246.6$

$L_V - L = 1.9$

Si ottiene quindi

$$c_v = +\overset{p}{1.9} = +\overset{s}{0.074} \quad \text{a cannocchiale diretto,}$$
$$c_v = -1.9 = -0.074 \quad \text{» rovesciato.}$$

Determinata la costante di collimazione c_v, quelle relative ai fili ideali aventi per letture le medie di quelle fatte sui 5 fili o sui 7 fili centrali o su tutti i 9 fili, venivano calcolate col seguente specchietto:

Cannocchiale diretto	*Cannocchiale rovesciato*
$c_5 = c_v - \overset{s}{0.086}$	$c_5 = -c_v + \overset{s}{0.086}$
$c_7 = c_v + 0.219$	$c_7 = -c_v - 0.219$
$c_9 = c_v + 0.199$	$c_9 = -c_v - 0.199$

L'errore medio di ogni singola determinazione di c risultò sempre all'incirca di una parte di micrometro $= 0^s.04$: l'errore medio del valore risultante da sei determinazioni, eseguite nel modo suesposto, era quindi di $0^s.016$ circa.

La costante c venne sempre determinata tanto in principio che in fine di ogni serata d'osservazione, ritenendosi in generale la media dei due valori iniziale e finale. Nei casi in cui risultò abbastanza rilevante la differenza fra questi due valori, si ritenne c variabile linearmente col tempo.

L'illuminazione del campo del cannocchiale si ottenne per mezzo di due grandi lanterne a petrolio, situate l'una ad Est e l'altra ad Ovest, a notevole distanza dallo strumento (circa 3 metri). La luce emanante da ciascuna di esse era raccolta in un fascio di raggi paralleli da una prima lente biconvessa, situata in prossimità della lampada, e poi concentrata sull'estremo dell'asse di rotazione del cannocchiale da una seconda lente di grande distanza focale. I fili del reticolo riescivano così illuminati sempre in modo centrale ed uniforme. Per la lettura della livella e del cerchio cercatore si adottò una lampada elettrica a mano, provvista di interruttore, in guisa da poterne avere la luce solo nei pochi secondi necessarî a ciascuna lettura.

§ XIX. — Metodi di osservazione e di calcolo.

Il metodo di osservazione fu informato al principio di confidare il meno possibile nella stabilità (per quanto provata) dello strumento. Perciò le stelle venivano scelte in modo da avere due gruppi completi ed indipendenti di osservazioni, l'uno a cannocchiale diretto, l'altro a cannocchiale rovesciato, ciascun gruppo essendo costituito da una stella circumpolare per la determinazione dell'azimut (o della costante n), da una o più stelle zenitali, da una o più stelle equatoriali.

Gli istanti dei passaggi delle stelle sotto i fili del reticolo venivano trasmessi elettricamente, per mezzo di un tasto a mano, a un cronografo sistema Hipp, distinto da quello già considerato, ma collocato nella stessa sala, ove una persona, a tal uopo incaricata, sorvegliava l'andamento delle penne e della striscia. Un filo telefonico manteneva la comunicazione fra l'osservatore e la persona al cronografo.

Per evitare la determinazione della parallasse delle due penne l'una rispetto all'altra, la penna registratrice delle osservazioni venne collegata a quella dell'orologio per modo che la prima tracciasse un piccolo punto, essenzialmente diverso dai segnali delle osservazioni, nello stesso tempo in cui questa segnava i secondi. In tal guisa, col sussidio di un doppio decimetro, si potevano leggere molto rapidamente e coll'approssimazione del centesimo di secondo, i segnali registrati sulla striscia.

Per evitare le correzioni relative all'equazione personale, le osservazioni allo strumento dei passaggi vennero eseguite da un solo osservatore (prof. Pucci), non solo nelle epoche in cui venivano eseguite le esperienze col pendolo, ma anche nelle serate precedenti e successive. Negli anni 1883, 84 e sul principio del 1885 si eseguirono le osservazioni anche nel mattino, come risulta dal seguente quadro riassuntivo degli andamenti diurni del pendolo Dent.

Quanto al metodo di calcolo, per tutte le osservazioni eseguite fra il 14 gennaio ed 2 il aprile 1884, venne adoperata la formola di Hansen

$$\Delta T = Æ - T - m - n \operatorname{tg} \delta - c \sec \delta,$$

dove T è, a seconda dei casi, il tempo (Dent) del passaggio della stella sotto il filo di mezzo, oppure sotto il filo ideale corrispondente alla media delle letture micrometriche dei 5 fili o dei 7 fili centrali, o di tutti i 9 fili, ΔT la correziene dell'orologio, $Æ$ l'ascensione retta della stella, δ la sua declinazione, c la costante di collimazione[1]. La costante n veniva calcolata colla formola

$$n = \frac{(T_2 - T_1) - (Æ_2 - Æ_1)}{\operatorname{sen}(\delta_1 - \delta_2)} \cos \delta_1 \cos \delta_2,$$

nella quale gli indici 1 e 2 si riferiscono a due stelle, l'una polare e l'altra equatoriale; T_1 e T_2 sono i tempi dell'orologio corretti per la costante di collimazione; infine m era definita dalla formula

$$m = b \sec \varphi - n \operatorname{tg} \varphi,$$

φ essendo la latitudine del luogo d'osservazione, b la costante di livella.

Tutte le rimanenti osservazioni vennero calcolate colla formola di Mayer

$$\Delta T = Æ - T - a \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - \frac{c}{\cos \delta},$$

nella quale le costanti b e c hanno il significato già dichiarato, ed a è la costante d'azimut calcolata colla formola

$$a = \frac{(Æ_2 - Æ_1) - (T_2 - T_1)}{\cos \varphi \operatorname{sen}(\delta_1 - \delta_2)} \cos \delta_1 \cos \delta_2.$$

[1] Cfr. Chauvenet, *Spherical and practical Astronomy*, vol. II, pag. 143 e seg.

In questa gli indici 1 e 2 si riferiscono come precedentemente a due stelle, l'una equatoriale e l'altra polare; T_1 e T_2 sono i tempi dell'orologio, corretti per le due costanti di livella e di collimazione. L'errore medio di una determinazione della costante d'azimut risultò in media di $0^s.05$.

Le ascensioni rette vennero ricavate per via di interpolazione dal *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, e, per le poche stelle non registrate in questa effemeride, dal *Nautical Almanac:* prima di introdurle in calcolo si applicò ad esse la correzione per l'aberrazione diurna

$$0^s.021 \cos \varphi \sec \delta = 0^s.0156 \sec \delta,$$

positiva per le stelle al passaggio superiore, negativa per quelle al passaggio inferiore.

Le correzioni dell'orologio, dedotte dalle varie stelle, vennero poi ridotte ad una stessa ora, facendo uso in tale riduzione dell'andamento approssimativo dell'orologio, risultante dal confronto dei tempi dei passaggi delle stesse stelle orarie in due sere d'osservazione consecutive. Dalla maggiore o minor concordanza di questi risultati si poteva avere una idea della maggiore o minor precisione raggiunta nella determinazione delle costanti istrumentali. I singoli risultati ottenuti, a cannocchiale diretto ed a cannocchiale rovesciato, furono poi riuniti in due medie delle quali si prese nuovamente la media.

Dal confronto delle correzioni dell'orologio, dedotte dalle varie stelle e ridotte ad una stessa ora, colla loro media si potè ancora dedurre l'errore medio delle stesse singole correzioni, il quale non supera in generale $0^s.08$, mentre l'errore medio di una determinazione serale raramente raggiunge $0^s.05$. Il valore così determinato, oltre l'errore proprio della osservazione, comprende naturalmente anche l'errore del catalogo.

Tutte le osservazieni fatte allo strumento dei passaggi si trovano registrate nei *Quadri delle osservazioni astronomiche.*

Per rendere visibile la marcia dell'orologio, tutte le correzioni dedotte dalle osservazioni astronomiche furono riunite nel seguente quadro riassuntivo, scrivendo di fianco ad esse i conseguenti andamenti diurni. Esse vennero distinte in 10 periodi, corrispondentemente alle varie epoche nelle quali vennero eseguite le esperienze, che trovansi registrate nell'ultima colonna.

QUADRO RIASSUNTIVO

DEGLI ANDAMENTI DIURNI DELL'OROLOGIO DENT.

I.° Periodo.

ANNO 1883.

DATA			Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
2 Dicembre		(sera)	23	s + 12.76			12	
3	»	(mattina)	11	12.37	0.39	0.80	6	
»	»	(sera)	23	11.96	0.41		12	1ª — Palla grossa d'ottone cava pesante.
4	»	»	»	10.96		1.00	2	
5	»	(mattina)	11	10.43	0.53	1.05	3	
»	»	(sera)	23	9 91	0.52		12	
6	»	»	»	9.08		0.83	5	
7	»	»	»	8.28		0.80	10	2ª — Palla piccola di platino.
8	»		—	—	1.15	0.76	—	
9	»	(mattina)	11	7.13		0.85	12	3ª — Palla piccola d'ottone cava pesante.
10	»		—	—	2.22	0.88	—	
11	»	(sera)	23	4.91		0.88	7	
12	»	(mattina)	11	4.48	0.43	0.88	10	4ª — Palla piccola d'ottone piena.
»	»	(sera)	23	4.03	0.45		6	
13	»	(mattina)	11	3.66	0.37	0.87	9	
»	»	(sera)	23	3.16	0.50		13	
14	»	»	»	2.36		0.80	13	5ª — Palla grossa d'ottone piena.
15	»	(mattina)	11	1.92		0.44	10	
15	»	(sera)	—	—		0.44	—	
16	»		—	—		0.88	—	
17	»		—	—	3.95	0.88	—	
18	»		—	—		0.88	—	
19	»	»	23	— 2.03		0.87	13	6ª — Palla piccola d'argento.
20	»	(mattina)	11	2.44	0.45	0.86	9	
»	»	(sera)	23	2.89	0.41		9	

II.° Periodo.

Anno 1884.

Data		Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
19 Gennaio	(sera)	2	s — 27.78		0.76	9	
20 »	»	2	28.54		0.90	12	
21 »	»	2	29.44	0.31	0.64	16	
22 »	(mattina)	14	29.75	0.33		12	7ª — Palla piccola d'argento.
» »	(sera)	2	30.08		0.88	11	
23 »	»	2	30.96		1.00	12	
24 »		—	—	2.01	1.01	—	
25 »	»	2	32.97		0.93	12	8ª — Palla piccola d'ottone cava pesante.
26 »	»	2	33.90		0.97	17	
27 »		—	—	1.95	0.98	—	
28 »	»	2	35.85	0.42	1.05	16	
29 »	(mattina)	14	36.27	0.63		14	
» »	(sera)	2	36.90		0.80	16	9ª — Palla piccola di platino.
30 »	»	2	37.70		0.92	15	
31 »		—	—		0.93	—	
1 Febbraio		—	—	3.71	0.93	—	
2 »		—	—		0.93	—	
3 »	»	2	41.41		0.81	13	
4 »	»	2	42.22		0.78	13	
5 »		—	—	1.56	0.78	—	
6 »	»	2	43.78	0.53		19	
7 »	(mattina)	14	44.31	0.46	0.99	6	
» »	(sera)	2	44.77	0.39		13	10ª — Palla grossa d'ottone piena.
8 »	(mattina)	14	45.16		0.88	10	
9 »		—	—	1.76	0.88	—	
10 »	(mattina)	14	46.92	0.46		18	
» »	(sera)	2	47.38	0.32		18	11ª — Palla grossa d'ottone cava pesante.
11 »	(mattina)	14	47.70	0.45	0.77	14	
» »	(sera)	2	48.15		0.84	14	
12 »	»	2	48.99		0.89	17	
13 »	»	2	49.88		0.80	15	12ª — Palla piccola d'ottone piena.
14 »	»	2	50.68			11	

III.° Periodo.

Anno 1884.

Data	Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
15 Marzo (sera)	6	m s —1.20.23			15	
16 » »	6	20.99		0.76	16	
17 » (mattina)	18	21.29	0.30	0.82	10	13ª — Palla grossa d'alluminio.
» » (sera)	6	21.81	0.52		16	
18 » »	6	22.78		0.97	15	
19 » »	6	23.86		1.08	14	
20 » (mattina)	18	24.25	0.39	0.96	7	
21 »	—	—		1.15	—	14ª — Palla grossa d'alluminio.
22 »	—	—	4.02	1.15	—	
23 » (sera)	6	28.27		1.15	11	
24 » (mattina)	18	28.82	0.55	1.10	9	
» » (sera)	6	29.37	0.55		15	15ª — Palla grossa di piombo e antimonio.
25 »	—	—	2.33	1.16	—	
26 » »	6	31.70		1.17	10	
27 » »	6	32.74		1.04	15	
28 » »	6	33.75		1.01	16	16ª — Palla grossa di piombo e antimonio.
29 » (mattina)	18	34.23	0.48	1.06	5	
30 »	—	—		1.14	—	
31 »	—	—		1.15	—	
1 Aprile	—	—	5.17	1.15	—	
2 » (sera)	6	39.40		1.15	13	

IV.° Periodo.

Anno 1885.

Data	Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
24 Gennaio (sera)	3	m s —7.44.57			11	
25 »	—	—		1.54	—	17ª — Palla grossa d'argento.
26 »	—	—	4.63	1.54	—	
27 » »	3	49.20		1.55	14	
28 » »	3	50.71		1.51	13	
29 » (mattina)	15	51.48	0.77	1.54	11	18ª — Palla grossa d'argento.
» » (sera)	3	52.25	0.77		13	
30 » (mattina)	15	53.06	0.81	1.62	11	

V.° Periodo.

ANNO 1885.

DATA			Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
15	Marzo	(sera)	3	m s —8.54.23	0.69		15	19ª — Palla grossa d'argento.
16	»	(mattina)	15	54.92	0.70	1.39	12	
»	»	(sera)	3	55.62	0.65		15	
17	»	(mattina)	15	56.27		1.30	12	
17	»	(sera)	3	52 99		1.69	10	
18	»	»	—	—		1.69	—	
19	»	»	—	—	6.77	1.69	—	
20	»	»	—.	—		1.70	—	
21	»	»	3	59.76		1.68	12	20ª — Palla grossa d'alluminio.
22	»	»	—	—	3.36	1.68	—	
23	»	»	3	9.03.12			11	

VI.° Periodo.

DATA			Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
20	Aprile	(sera)	15	m s —9 38.48		1.63	12	21ª — Palla grossa d'ottone cava pesante.
21	»	»	15	40.11		1.63	11	
22	»	»	15	41.74		1.64	12	
23	»	»	—	—	3.29	1.65	—	
24	»	»	15	45.03		1.85	11	22ª — Palla piccola d'ottone piena.
25	»	»	15	46.88			9	

VII.° Periodo.

DATA			Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
16	Maggio	(sera)	12	s +41.96		0.30	12	23ª — Palla piccola d'argento.
17	»	»	12	41.66		0.52	10	
18	»	»	—	—	1.04	0.52	—	
19	»	»	12	40.62			12	

VIII.° Periodo.

ANNO 1885.

DATA	Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
15 Giugno (sera)	15	s + 35.12			12	
16 » »	—	—	0.50	0.25	—	
17 » »	15	34.62		0.25	9	24ª — Palla grossa d'argento.
18 » »	15	34.36		0.26	9	

IX.° Periodo.

ANNO 1887.

DATA	Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
22 Gennaio (sera)	0	m s —8.17.07			10	
23 » »	0	19.33		2.26	12	
24 » »	0	21.48		2.15	10	25ª — Palla grossa d'ottone piena.
25 » »	0	23.69		2.21	7	
26 »	—	—		2.14	—	
27 »	—	—	6.41	2.14	—	26ª — Palla piccola di platino.
28 » »	0	30.10		2.13	9	
29 » »	0	32.28		2.18	12	
30 » »	0	34.45		2.17	11	
31 »	—	—		2.28	—	
1 Febbraio	—	—	9.11	2.28	—	27ª — Palla piccola d'argento.
2 »	—	—		2.28	—	
3 » »	3	43.56		2.27	11	28ª — Palla piccola d'ottone piena.
4 » »	3	45.72		2.16	13	
5 » »	3	47.84		2.12	12	
6 » »	3	49.99		2.15	10	29ª — Palla grossa d'alluminio.
7 » »	3	52.26		2.27	11	

X.° Periodo.

Anno 1887.

Data			Riduzione ad ore	Correzione dell'orologio	Andamento diurno		Numero delle stelle orarie osservate	Esperienze eseguite
5	Marzo	(sera)	6	m s —9.32.90		1.73	12	
6	»		—	—	3.46	1.73	—	
7	»	»	6	36.36		1.65	6	30ª — Palla grossa di piombo e antimonio.
8	»	»	6	38.01		1.70	10	
9	»		—	—	5.10	1.70	—	
10	»		—	—		1.70	—	
11	»	»	6	43.11		1.81	6	31ª — Palla grossa di piombo e antimonio.
12	»		—	—	3.63	1.82	—	
13	»	»	6	46.74		1.85	7	
14	»		—	—		1.86	—	32ª — Palla grossa d'ottone cava pesante.
15	»		—	—		1.86	—	
16	»		—	—	11.15	1.86	—	
17	»		—	—		1 86	—	
18	»		—	—		1.86	—	
19	»	»	6	57.89		1.71	12	
20	»	»	6	59.60		1.69	9	33ª — Palla grossa d'argento.
21	»		—	—	3.38	1.69	—	
22	»	»	6	—10.02.98		1.69	7	
23	»	»	6	04.67		1.77	6	34ª — Palla piccola di platino.
24	»		—	—	3 83	1.77	—	
25	»	»	10	08 50	1.38	1.67	10	
26	»	»	6	09.88		1.72	12	35ª — Palla piccola di platino.
27	»	»	6	11.60		1.80	11	
28	»		—	—	3.61	1.81	—	
29	»	»	6	15.21		1.78	12	36ª — Palla grossa d'argento.
30	»	»	6	16.99		1.84	10	
31	»	»	6	18.83		1.82	10	37ª — Palla piccola di platino.
1	Aprile	»	6	20.65		1.81	9	
2	»		—	—	3.63	1.82	—	
3	»	»	6	24.28	2.09	1.79	10	
4	»	»	10	26.37		1.89	10	
5	»	»	10	28.26		1.95	6	
6	»		—	—		1.95	—	38ª — Palla piccola d'ottone cava pesante.
7	»		—	—		1.95	—	
8	»		—	—	9.73	1.94	—	39ª — Palla piccola d'ottone cava pesante.
9	»		—	—		1.94	—	
10	»	»	10 .	37.99			10	

§ XX. — Valore definitivo della durata d'oscillazione per archi infinitamente piccoli ed in tempo medio.

Cogli andamenti diurni, registrati nel precedente quadro, si ridussero in tempo siderale gli intervalli delle singole esperienze elementari, già espressi in tempo Dent. Se Δ è l'andamento, T la durata di un intervallo d'esperienza, in secondi dell'orologio, la correzione τ da farsi a T per ridurla in tempo siderale è espressa dalla formola

$$\tau = \frac{T}{86400} \Delta .$$

Entrambi i numeri T e τ sono registrati nei *Quadri riassuntivi finali*: la correzione τ risultò sempre negativa, avendo l'orologio sempre mantenuto un andamento accelerato.

La durata media d'oscillazione in tempo siderale, si ottenne dividendo il precedente intervallo corretto per il numero totale delle oscillazioni compiute dal pendolo.

A questa durata d'oscillazione vennero però ancora applicate le seguenti correzioni:

1.° *Riduzione ad archi infinitamente piccoli.* — Si calcolò colla formola

$$r = -\frac{t\,(e_0 + e_1)\,(e_0 - e_1)}{73.682\ R^2\,(\log e_0 - \log e_1)} ,$$

t essendo la durata d'oscillazione, e_0 ed e_1 le due elongazioni iniziale e finale, lette col cannocchiale delle ampiezze (vedi § X), R la distanza dell'asse del cannocchiale dall'asse di rotazione del pendolo. I valori delle elongazioni introdotti in calcolo sono quelli che si riferiscono agli istanti medî delle due serie di passaggi iniziale e finale, determinanti ciascun intervallo d'esperienza. Nelle esperienze nelle quali l'intervallo fu determinato automaticamente, l'elongazione iniziale venne osservata un momento dopo la registrazione del principio, e la finale un momento avanti la registrazione della fine dell'intervallo.

Tutte e tre le grandezze e_0 e_1 r sono registrate nei *Quadri riassuntivi finali.*

2.° *Riduzione alla temperatura normale* θ_m dell'esperienza, ossia alla media delle temperature osservate durante le due esperienze coniugate. Grazie alle precauzioni precedentemente esposte, usate per mantenere la temperatura costante, le oscillazioni di questa risultarono sempre così piccole, durante il tempo di due esperienze coniugate, da rendere superflua, nella quasi totalità dei casi, la precedente riduzione. Nei rari casi nei quali si credette di applicarla, si fece uso della formola

$$\Delta t = t\,\frac{\Delta l}{2l} ,$$

che si ottiene differenziando logaritmicamente la relazione

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

L'allungamento Δl del pendolo, corrispondente ad un incremento $\Delta\theta$ della temperatura, è quasi completamente dovuto alla dilatazione del filo di packfong. Indicando con q questo coefficiente si ha

$$\Delta l = lq \Delta\theta ,$$

e la riduzione Δt della durata d'oscillazione alla temperatura normale viene quindi ad essere espressa da

$$\Delta t = \frac{tq(\theta_m - \theta)}{2} .$$

I due coefficienti di dilatazione del packfong, determinati dal prof. M. Ascoli col dilatometro di Fizeau, sono

$$a = 10^{-9}(16563 \pm 0{,}38)$$
$$b = 10^{-9}(\quad 9.8 \pm 0{,}5\ ).$$

Nella applicazione della precedente formola si ritenne però come più che sufficiente il valore

$$q = 0{,}0000166.$$

3.° *Riduzione del pendolo corto a livello del pendolo lungo.* — Se si ammette che la variazione della gravità, nella vicinanza della superficie fisica terrestre, abbia luogo secondo la formola [1]:

$$g_H = g_0 \left\{ 1 - \frac{2H}{a_0}(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 2\,\mathfrak{a}\,\text{sen}^2\varphi) \right\} ,$$

dove H è l'altitudine del punto considerato sul livello del mare, g_0 l'intensità della gravità a livello del mare,

$$a_0 = 6377397 \ , \ \mathfrak{a} = 0{,}0033416 \ , \ \mathfrak{c} = 0{,}0034672 \ ,$$

si ha per la latitudine di Roma

$$g_H = g_0(1 - 0{,}000000315\ H) .$$

La differenza d'altezza fra le palle dei due pendoli coniugati è di un metro, epperò fra le loro durate d'oscillazione avrà luogo la relazione

$$\frac{t_H}{t_{H+1}} = \sqrt{\frac{g_{H+1}}{g_H}} = 1 - 0{,}000000157 .$$

Di qui si ha

$$t_H - t_{H+1} = - 0{,}000000157\ t_{H+1} .$$

[1] Cfr. Helmert, *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie* (II Teil. S. 97).

Essendo prossimamente la durata d'oscillazione del pendolo corto

$t = 1^s.04$ nella sospensione inferiore,
$t = 1^s.25$ » » superiore,

si ritenne in media

$t_H - t_{H+1} = - 0^s.000000163$ per la sospensione inferiore,
$t_H - t_{H+1} = - 0,000000196$ » » superiore;

cioè per ridurre la palla del pendolo corto allo stesso livello di quella del pendolo lungo, si diminuirono di 16 centesimi di *microsecondo* le durate d'oscillazione osservate nel caso della sospensione inferiore, e di 20 centesimi di *microsecondo* quelle osservate nella sospensione superiore.

4.° *Riduzione a tempo medio.* — Si applicò la nota formola

$$t_m = t_s - 0{,}0027304335\ t_s,$$

essendo t_s e t_m le durate di una oscillazione in tempo siderale ed in tempo medio rispettivamente. Entrambe le durate d'oscillazione t_m t_s sono registrate nei quadri finali.

§ XXI. — Determinazione delle grandezze lineari h_1 h_2.

Le due grandezze h_1 h_2, che entrano nella formazione dei coefficienti delle equazioni finali, furono determinate come segue. Sia δ_1 la lettura fatta sulla mira del pendolo lungo, l_1 la sua lunghezza, θ_1 la temperatura osservata: la correzione da farsi a δ_1, per avere il valore che si riferisce alla temperatura normale θ_m, è

$$l_1\, q\, (\theta_1 - \theta_m)\,,$$

essendo, come precedentemente, q il coefficiente di dilatazione del filo. Alla temperatura normale si ha quindi

$$h_1 = \delta_1 + l_1\, q\, (\theta_1 - \theta_m) + C\,,$$

dove C rappresenta la distanza fra la punta della mira e il baricentro della palla.

Indicando analogamente con δ_2 la lettura fatta col microscopio superiore sulla mira del pendolo corto, con l_2 la lunghezza del filo, con D la distanza fra gli assi dei microscopî, con θ_2 la temperatura osservata, il valore di h_2, corrispondente alla temperatura normale, è dato da

$$h_2 = D + \delta_2 + l_2\, q\, (\theta_2 - \theta_m) + C\,.$$

Il valore di D introdotto in questa formola, essendo la media di quelli osservati prima e dopo le due esperienze coniugate, si può ritenere come quello corrispondente alla temperatura media θ_m (Vedi § XI). La costante C viene poi eliminata perchè nelle formole non si presenta che la differenza $h_2 - h_1$.

Le condizioni nelle quali vennero effettuate le letture δ_1 δ_2 essendo pressochè identiche a quelle accompagnanti le letture I′ I″ fatte sugli indici, si trovò per le prime un errore poco dissimile da quello già determinato per le seconde (Vedi § XIII).

Le letture δ, insieme alle letture I. sono date nei quadri finali.

§ XXII. Elementi dei pendoli. Determinazione dei loro pesi.

Nei quadri riassuntivi, per ciascuna delle esperienze coniugate, è dato uno specchietto degli elementi dei pendoli. Nella colonna segnata colla lettera l sono date le altezze delle singole parti, espresse in centimetri.

L'altezza della porzione oscillante della lamina, variabile da esperienza a esperienza, si misurò per mezzo di un compasso di precisione, munito di vite micrometrica, fissandone una punta al centro di oscillazione apparente, individuato da un piccolo foro conico fatto col tornio alla estremità dell'asse del cilindretto di sospensione, e conducendo l'altra punta alla estremità inferiore della lamina.

La lunghezza della porzione visibile del filo adoperato per ogni palla, venne determinata sperimentalmente alla temperatura di 15° col metodo già esposto nella precedente Memoria (§ XXX), deducendo poi per mezzo del coefficiente di dilatazione la lunghezza corrispondente alla temperatura d'esperienza.

I raggi delle palle a 15° vennero già dati (§ II) coi corrispondenti coefficienti di dilatazione totale: se ne deducevano quindi immediatamente i diametri per la temperatura della esperienza.

La determinazione dell'altezza delle altre piccole parti accessorie non presentava alcuna difficoltà.

Nella colonna successiva, indicata con m, sono date le masse delle singole parti, espresse in grammi. I valori dei pesi campioni, che servirono a determinare tali masse, furono dedotti dal kg. di platino esistente negli Archivî generali del Regno.

L'equazione di questo kg., riferita al kg. degli Archivî di Francia, e determinata nel 1878 dai prof.ri Cannizzaro e Pisati mediante il kg C'n.1 del Conservatorio di arti e mestieri di Parigi, era la seguente

$$\text{kg. italiano} = 1^{\text{kg.}} - 2^{\text{mg.}}96\,,$$

ammettendo il suo volume = ml. 47,266 a 0°, come risulta dal relativo processo verbale in data del Settembre 1878.

Il kg. degli Archivî non servì però direttamente alla verificazione dei pesi campioni: questa fu fatta col kg. di platino Fortin della Commissione Superiore metrica italiana. La relazione fra questi due kg.mi ottenuta nel 1878, era la seguente

$$\text{kg. Fortin} = \text{kg. degli Archivî} + 2^{\text{mg.}},67.$$

Nel 1883 si ottenne

$$\text{kg. Fortin} = \text{Kg. degli Archivî} + 2^{mg.},65 \pm 0^{mg.}033,$$

essendo il volume del kg. Fortin, determinato idrostaticamente, = ml. 47,8062 a 0°, ed ammettendo il coefficiente di dilatazione cubica del platino $= 26,2 \times 10^{-6}$.

La verificazione della serie dei pesi campioni (di ottone fortemente dorato dal kg. al gr. e di platino dal gr. al mgr.), si fece usando le due bilancie Bunge e Gambey della Commissione superiore metrica. Servirono come strumenti ausiliarî: un barometro Baudin, vecchio campione di laboratorio, ed un igrometro a capello, aventi tutte le costanti determinate.

La bilancia Bunge della portata di 5 kg., servì principalmente alla determinazione dei volumi: il risultato di una pesata semplice, nelle condizioni d'esperienza, risultò affetto in media dall'errore probabile ± mg. 0,06.

La bilancia Gambey, della portata di 1 kg., servì alla verificazione di tutta la serie (dal kg. al mgr.): il risultato di una pesata semplice, nelle condizioni d'esperienza, risultò in media affetto dall'errore probabile ± mg. 0,04.

Ambedue le bilancie erano munite dell'apparecchio di lettura a riflessione, con cannocchiale e scala illuminata, e si maneggiavano a distanza.

Per la verificazione di ciascun peso furono fatte non meno di 10 pesate, combinate poi opportunamente, e i dati relativi alle costanti fisiche, per la riduzione delle pesate stesse, furono tolte dalle tavole dell'Ufficio Metrico internazionale (1).

Nello specchio seguente sono registrati il peso reale ed il volume dei singoli pezzi componenti la serie.

Serie dei pesi (ottone dorato)	Correzioni	Volumi a 0°	Serie dei pesi (platino)	Correzioni	Volumi a 0°
grammi	milligrammi	millilitri	grammi	milligrammi	microlitri
1000	— 6,32 ± 0,078	121,5879	0,500	— 0,07 ± 0,018	23,24
500	+ 3,48 ± 25	61,3226	0,200	+ 0,07 ± 20	9,30
200	+ 2,17 ± 22	24,6238	0,100	— 0,12 ± 17	4,65
100	+ 0,90 ± 18	12,1750	0,100	+ 0,04 ± 13	4,65
100	+ 0,84 ± 13	12,2009	0,050	+ 0,09 ± 17	2,32
50	+ 0,88 ± 17	5,9764	0,020	+ 0,05 ± 20	0,93
20	+ 0,16 ± 21	2,4426	0,010	— 0,02 ± 17	0,46
10	— 0,03 ± 17	1,2467	0,010	+ 0,05 ± 13	0,46
10	+ 0,17 ± 13	1,2148	0,005	+ 0,03 ± 17	0,23
5	— 0,06 ± 17	0,6029	0,002	+ 0,08 ± 20	0,09
2	+ 0,03 ± 20	0,2378	0,001	+ 0,05 ± 17	0,05
2	— 0,26 ± 21	0,2375	0,001	+ 0,03 ± 13	0,05
1	— 0,05 ± 17	0,1181	0,001	+ 0,06 ± 23	0,05

(1) *Travaux et Mémoires du bureau international des poids et mésures.* Vol. I.

Le determinazioni del peso degli elementi componenti i pendoli furono fatte collo stesso procedimento e colle stesse cautele seguite nella verificazione dei pesi campioni. I pesi delle grosse palle furono di preferenza determinati colla bilancia *Bunge*, perchè più comoda. Tenuto conto degli errori probabili dei pesi campioni, l'approssimazione del peso di una di tali palle, nel caso più sfavorevole, cioè quando concorrono 17 pesi campioni ad ottenerlo, è $= \pm$ mg. 0.118. Per gli altri elementi: *lamine*, *cappe*, *filo*, ecc., l'approssimazione del peso è dello stesso ordine di qnella indicata per i pesi campioni.

§ XXIII. — Momenti d'inerzia.

Nella colonna indicata con u degli specchietti sopra accennati, sono dati i momenti d'inerzia delle diverse parti costituenti i pendoli, rispetto ad assi passanti pei loro baricentri e paralleli all'asse di sospensione.

Il momento d'inerzia della lamina venne calcolato colla formola

$$u_1 = m_1 \frac{l^2_1}{12};$$

per quello della saldatura, tenendo conto degli elementi già dati, (V. § VII), si trovò il valore

$$u_2 = 0,00014,$$

ed è perciò che nei quadri riassuntivi, dove si sono sempre tenute tre cifre decimali, si è posto $u_2 = 0$.

Per la congiunzione superiore, indicando con l_3 e d_3 l'altezza ed il diametro della cappa, con m_3 il peso complessivo della cappa e della vite, si impiegò la formola

$$u_3 = m_3 \frac{l^2_3}{12} + m_3 \frac{d^2_3}{16},$$

per il filo visibile

$$u_4 = m_4 \frac{l^2_4}{12},$$

per la congiunzione inferiore

$$u_5 = m_5 \frac{l^2_5}{12} + m_5 \frac{d^2_5}{16},$$

e per la mira

$$u_7 = m_7 \frac{l^2_7}{12} + m_7 \frac{d^2_7}{16}.$$

Riguardo alle palle, si determinò dapprima per ciascuna di esse il momento d'inerzia alla temperatura di 15°, ed ai valori così calcolati venne applicata, in ciascuna esperienza, una correzione per la corrispondente differenza di temperatura.

Se r è il raggio, m la massa di una palla piena, il suo momento d'inerzia è espresso da

$$a) \qquad u = \frac{2}{5} mr^2.$$

Per una palla cava si ha

$$b) \qquad u = u_e - u_i + u_a ,$$

u_e essendo il momento d'inerzia della palla considerata come tutta piena di metallo, u_i quello della cavità sferica interna supposta piena di metallo, u_a quello della stessa cavità ripiena d'aria. Indicando con r_i ed r_e i due raggi interno ed esterno, con D la densità del metallo, con ϱ quella dell'aria, questa formola si può anche scrivere

$$u = \frac{1.6}{3} \pi \{ Dr^5_e - (D - \varrho) r^5_i \}.$$

Si supponga ora che la temperatura subisca la variazione dt: la a) differenziata darà

$$du = \frac{4}{5} mrdr,$$

e se k è il coefficiente di dilatazione lineare della palla, per modo che $dr = krdt$, si avrà

$$du = 2\, kudt.$$

Operando in modo analogo sulla b), si avrà per la variazione del momento d'inerzia della palla cava, corrispondente alla variazione dt nella temperatura,

$$du = 2ku_e\, dt - 2ku_i\, dt + 2ku_a\, dt = 2ku\, dt.$$

Applicando queste formole si sono ottenuti i seguenti valori pei momenti d'inerzia delle palle a 15°, e per le loro variazioni $\frac{du}{dt}$, corrispondenti alla variazione di un grado nella temperatura.

		u	$\frac{du}{dt}$
Palle grosse	Ottone piena	4604.286	0.1667
	» cava	3251.134	0.1177
	Alluminio	1453.3068	0.0676
	Piombo-antimonio	5716.862	0.3276
	Argento	5756.146	0.2170
Palle piccole	Ottone piena	765.1527	0.0277
	» cava	627.3282	0.0227
	Argento	960.545	0.0362
	Platino iridiato	1969.737	0.0341

Per eliminare l'errore dovuto ad una non omogenea distribuzione della densità, ogni esperienza venne eseguita con palla diritta e rovesciata.

§ XXIV. — Riduzione del pendolo composto a pendolo semplice. Riduzione idrostatica.

Nella colonna segnata colla lettera s, degli specchietti più volte accennati, sono date le distanze fra i baricentri degli elementi del pendolo e l'asse di sospensione. Esse vengono in primo luogo adoperate nel calcolo della riduzione c del pendolo composto a pendolo semplice, la quale, nel caso attuale, è definita dalla formola (cfr. § II)

$$c = \frac{\sum\limits_{r=1}^{r=6} m_r s_r (s_7 - s_r) - \sum\limits_{r=1}^{r=7} u_r}{\sum\limits_{r=1}^{r=7} m_r s_r} - \frac{(s_7 - S)\, u^2_7}{S\, s^3_7\, m^2_7}.$$

Nel 2° termine, che rappresenta la correzione di Laplace, la grandezza

$$S = l_5 + r,$$

dove r è il raggio della palla, rappresenta, con approssimazione più che sufficiente, la distanza fra il baricentro del corpo sospeso al filo (palla, congiunzione inferiore e mira) ed il punto di sospensione al filo stesso.

Poichè l'asse reale dista dall'asse ideale di sospensione di una piccola quantità i, le distanze da introdurre nella formola precedente dovrebbero essere

$$s_1 - \frac{i}{2} \quad s_2 - i \quad s_3 - i \quad s_4 - i \quad s_5 - i \quad s_6 - i \quad s_7 - i\,.$$

Effettuando questa sostituzione, trascurando i termini in i^2, e ponendo

$$A = \sum_1^6 m_r s_r (s_7 - s_r) - \sum_1^7 u_r \qquad B = \sum_1^7 m_r s_r$$

$$P = \sum_1^6 m_r (s_7 - s_r) \qquad Q = \sum_1^7 m_r$$

si ottiene

$$c = \frac{A - iP}{B - iQ} - \alpha,$$

dove con α si indica per brevità la correzione di Laplace, ossia, trascurando sempre i termini in i^2,

$$c = \frac{A}{B} + i\left(\frac{AQ}{B^2} - \frac{P}{B}\right) - \alpha.$$

In tutte le determinazioni della costante c si è fatto il calcolo anche del coefficiente di i, il quale risultò sempre molto piccolo. D'altra parte la distanza ignota i essendo pure piccolissima, ed in ogni caso certamente minore di $0^{mm}.3$, come lo dimostrarono apposite esperienze (V. M. § XXX), il contributo portato dal secondo termine non poteva ammontare che a pochi centesimi di micron. Per tal ragione nel

computo dei valori definitivi di c, registrati nei quadri riassuntivi, non si tenne conto di tal termine, ritenendo semplicemente la formola

$$c=\frac{A}{B}-\alpha.$$

Per la formazione delle equazioni occorrono ancora i rapporti $\frac{m'}{m}$, $\frac{m's'}{ms}$ fra le masse ed i momenti statici dei pendoli aerei e dei pendoli oscillanti, intendendo per aerei quei pendoli ideali aventi la medesima forma dei pendoli reali, ma costituiti dall'aria spostata. Nelle esperienze eseguite colle palle d'ottone piene, indicando con β il rapporto fra la densità dell'aria e quella dell'ottone, nelle condizioni della misura, e ritenendo le piccole parti accessorie come aventi la stessa densità dell'ottone, si pose (V. M. § XXX):

$$\frac{m'}{m}=\beta,$$

$$\frac{m's'}{ms}=\beta.$$

Per le palle d'ottone cave si adottarono invece le formole

$$\frac{m'}{m}=\beta+\frac{m_a(1-\beta)}{\Sigma m},$$

$$\frac{m's'}{ms}=\beta+\frac{m_a s_6(1-\beta)}{\Sigma m_r s_r}$$

essendo m_a la massa dell'aria racchiusa.

Finalmente per le palle costituite da metallo diverso dall'ottone, indicando con β' il rapporto fra la densità dell'aria e quella del metallo, con m_6 la massa della palla senza le appendici, le quali, senza errore sensibile, si possono considerare come se fossero d'ottone, si fece uso delle formole

$$\frac{m'}{m}=\beta+\frac{m_6(\beta'-\beta)}{\Sigma m_r},$$

$$\frac{m's'}{ms}=\beta+\frac{m_6 s_6(\beta'-\beta)}{\Sigma m_r s_r}.$$

Il peso ϱ di un millilitro d'aria, nelle condizioni dell'esperienza, cioè alla temperatura θ, sotto la pressione B (in millimetri normali ed all'altezza della palla del pendolo lungo), e colla tensione f del vapor acquoso, si calcolò colla formola

$$\varrho=\frac{0^{gr}.001293052}{760\,(1+0{,}00367\,\theta)}(B-0{,}3779\,f).$$

Nei quadri riassuntivi, insieme ai valori di B e di f, sono dati $\log\varrho$, $\log\frac{m'}{m}$, $\log\left(1-\frac{m's'}{ms}\right)$.

§ XXV. — Equazioni generate; loro risoluzione.

Calcolando per ciascuna esperienza i coefficienti 8) (§ II) coi dati dei quadri riassuntivi, si sono ottenute le seguenti 39 equazioni generate, alle quali tutte si è ascritto il medesimo peso

Esperienza	Palla		
5	Palle grosse	Ottone piena	$1.00649\,x - 5.554\,y + 0.00751 = v_1$
10			$1.00647\,x - 5.572\,y + 0.00812 = v_2$
25			$1.00647\,x - 6.043\,y + 0.01054 = v_3$
1		Ottone cava	$1.00632\,x - 10.132\,y + 0.00861 = v_4$
11			$1.00635\,x - 10.129\,y + 0.01586 = v_5$
21			$1.00633\,x - 10.918\,y + 0.01557 = v_6$
32			$1.00629\,x - 10.850\,y + 0.01489 = v_7$
13		Alluminio	$1.00631\,x - 17.596\,y + 0.01949 = v_8$
14			$1.00632\,x - 17.400\,y + 0.02008 = v_9$
20			$1.00611\,x - 18.660\,y + 0.02210 = v_{10}$
29			$1.00607\,x - 18.730\,y + 0.01988 = v_{11}$
15		Piombo e Antimonio	$1.00650\,x - 4.454\,y + 0.00832 = v_{12}$
16			$1.00649\,x - 4.477\,y + 0.00733 = v_{13}$
30			$1.00651\,x - 4.826\,y + 0.00758 = v_{14}$
31			$1.00648\,x - 4.806\,y + 0.00642 = v_{15}$
17		Argento	$1.00648\,x - 4.442\,y + 0.00691 = v_{16}$
18			$1.00647\,x - 4.442\,y + 0.00691 = v_{17}$
19			$1.00651\,x - 4.793\,y + 0.00803 = v_{18}$
24			$1.00655\,x - 4.759\,y + 0.01113 = v_{19}$
33			$1.00651\,x - 4.759\,y + 0.00845 = v_{20}$
36			$1.00653\,x - 4.417\,y + 0.00860 = v_{21}$
4	Palle piccole	Ottone piena	$1.00618\,x - 7.933\,y + 0.00737 = v_{22}$
12			$1.00622\,x - 7.967\,y + 0.01139 = v_{23}$
22			$1.00605\,x - 8.548\,y + 0.01296 = v_{24}$
28			$1.00603\,x - 8.605\,y + 0.01135 = v_{25}$
3		Ottone cava	$1.00595\,x - 11.945\,y + 0.01306 = v_{26}$
8			$1.00598\,x - 11.982\,y + 0.01954 = v_{27}$
38			$1.00575\,x - 12.820\,y + 0.02307 = v_{28}$
39			$1.00569\,x - 12.814\,y + 0.01750 = v_{29}$
6		Argento	$1.00634\,x - 6.354\,y + 0.01288 = v_{30}$
7			$1.00636\,x - 6.407\,y + 0.01261 = v_{31}$
23			$1.00617\,x - 6.836\,y + 0.00947 = v_{32}$
27			$1.00618\,x - 6.855\,y + 0.01258 = v_{33}$
2		Platino	$1.00650\,x - 3.090\,y + 0.00751 = v_{34}$
9			$1.00652\,x - 3.105\,y + 0.00931 = v_{35}$
26			$1.00641\,x - 3.362\,y + 0.00548 = v_{36}$
34			$1.00647\,x - 3.347\,y + 0.01080 = v_{37}$
35			$1.00648\,x - 3.112\,y + 0.00699 = v_{38}$
37			$1.00656\,x - 3.100\,y + 0.01187 = v_{39}$

Trattando queste equazioni col metodo dei minimi quadrati, si giunge alle due equazioni normali

$$39.494\,x - 307.844\,y + 0,4602 = 0$$
$$-307.844\,x + 3189.958\,y - 4,3190 = 0\,,$$

la cui soluzione dà

$$x = -0^{cm},0044^{\mu}.35 \qquad\qquad y = 0,000926.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni generate, per avere i valori più probabili dei residui, si ottengono i seguenti risultati:

Esperienze		Palla	Palla diretta o rovesciata	Sospensione superiore o inferiore	$a\,x$	$b\,y$	c	v	v^2
5	Palle grosse	Ottone piena.	D	I	−0,0044.6	−0,0051.4	+0,0075.1	— 20.9	436.81
10			R	I	44.6	51.6	81.2	— 15.0	225.00
25			R	S	44.6	56.0	105.4	+ 4.8	23.04
1		Ottone cava.	D	I	44.6	93.8	86.1	— 52.3	2735.29
11			R	I	44.6	93.8	158.6	+ 20.2	408.04
21			D	S	44.6	101.1	155.7	+ 10.0	100.00
32			R	S	44 6	100.5	148.9	+ 3.8	14.44
13		Alluminio. .	D	I	44.6	163.0	194.9	— 12.7	161.29
14			R	I	44.6	161.1	200.8	— 4.9	24.01
20			D	S	44.6	172.8	221.0	+ 3.6	12.96
29			R	S	44.6	173.4	198.8	— 19.2	368.64
15		Piombo e Antimonio . .	D	I	44.6	41.2	83.2	— 2.6	6.76
16			R	I	44.6	41.5	73.3	— 12.8	163.84
30			D	S	44.6	44.7	75.8	— 13.5	182.25
31			R	S	44.6	44.5	64.2	— 24.9	620.01
17		Argento . . .	R	I	44.6	41.1	69.1	— 16.6	275.56
18			D	I	44.6	41.1	61.9	— 23.8	566.44
19			D	S	44.6	44.4	80.3	— 8.7	75.69
24			R	S	44.6	44.1	111.3	+ 22.6	510.76
33			R	S	44.6	44.1	84.5	— 4.2	17.64
36			R	I	44.6	40.9	86.0	+ 0.5	0.25
4	Palle piccole	Ottone piena.	D	I	44.6	73 5	73.7	— 44.4	1971.36
12			R	I	44.6	73.8	113.9	— 4.5	20.25
22			D	S	44.6	79.2	129.5	+ 5.8	33.64
28			R	S	44.6	79.7	113.5	— 10.8	116.64
3		Ottone cava.	D	I	44.6	110.6	130.6	— 24.6	605.16
8			R	I	44.6	111.0	195.4	+ 39.8	1584.04
38			R	S	44.6	118.7	230.7	+ 67.4	4542.76
39			D	S	44.6	118.7	175.0	+ 11.7	136.89
6		Argento . . .	D	I	44.6	58.8	128.8	+ 25.4	645.16
7			R	I	44.6	59.3	126.1	+ 22.2	492.84
23			D	S	44.6	63.3	94.7	— 13.2	174.24
27			R	S	44.6	63.5	125.8	+ 17.7	313.29
2		Platino. . . .	D	I	44.6	28.6	75.1	+ 1.9	3.61
9			R	I	44.6	28.8	93.1	+ 19.7	388.09
26			R	S	44.6	31.1	54.8	— 20.9	436.81
34			D	S	44.6	31.0	108.0	+ 32.4	1049.76
35			D	I	44.6	28.8	69.9	— 3.5	12.25
37			R	I	44.6	28.7	118.7	+ 45.4	2061.16
									21516.67

Applicando la formola che dà l'errore medio dell'unità di peso

$$M = \sqrt{\frac{[vv]}{n-\omega}},$$

dove con n si rappresenta il numero delle equazioni, con ω quello dell'incognite, si ottiene

$$M = \sqrt{\frac{21516.67}{37}} = 24^{\mu},11 .$$

Applicando l'altra formola

$$M = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-\omega}} \quad , \quad [\lambda\lambda] = [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc\,1]^2}{[bb\,1]} ,$$

si ottiene

$$M = 24^{\mu}.10 ,$$

la cui coincidenza col valore precedente fornisce una riprova della esattezza del calcolo.

Per avere i pesi e gli errori medi delle due incognite si formino e si risolvano i due sistemi di equazioni del peso, cioè (1)

$$39,494\,[\alpha\alpha] - 307,844\,[\alpha\beta] = 1$$
$$-307,844\,[\alpha\alpha] + 3189,958\,[\alpha\beta] = 0$$

per la incognita x, e

$$39,494\,[\alpha\beta] - 307,844\,[\beta\beta] = 0$$
$$-307.844\,[\alpha\beta] + 3189,958\,[\beta\beta] = 1$$

per l'incognita y. Indicando con $p_x\, p_y\, m_x\, m_y$ i pesi e gli errori medi delle due incognite, si ha

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = 9.786$$

$$p_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = 794.4$$

epperò

$$m_x = M\sqrt{[\alpha\alpha]} = 7^{\mu},71$$
$$m_y = M\sqrt{[\beta\beta]} = 0.000086.$$

Applicando la correzione x al valore approssimato $\lambda_0 = 99^{cm}.3339$, e trasformando l'errore medio in errore probabile, si trova per la lunghezza del pendolo semplice a secondi a Roma

$$\lambda = \mathbf{99^{cm}.3295 \pm 5^{\mu}.1}$$

(1) Cfr. Pucci, *Fondamenti di Geodesia*. Vol. I, cap. VII.

e quindi

$$g = 980^{cm}.3429 \pm 50^{\mu}.7.$$

Il valore di y, sostituito nella relazione $\eta_0 = y^2$, dà il seguente valore per il coefficiente d'attrito dell'aria

$$\eta_0 = 0{,}000000857 \pm 0{,}000000107.$$

§ XXVI. — Discussione del risultato.

Come si rileva dal procedente specchio, i due residui più grossi — $52^{\mu}{,}3$, $+ 67^{\mu}.4$, sono quelli corrispondenti alle esperienze 1ª (palla grossa d'ottone cava) e 38ª (palla piccola d'ottone cava). Malgrado essi eccedano di molto i limiti degli errori temibili, avuto riguardo alla cura scrupolosa con cui furono misurate tutte le grandezze occorrenti in ogni esperienza, non si credette conveniente di escludere le corrispondenti equazioni. A questa determinazione si fu indotti anche dal riflesso che, essendo i suaccennati residui poco dissimili in valore assoluto e di segno contrario, una tale esclusione non avrebbe avuto per effetto di alterare sensibilmente il valore di x, ma solo di diminuirne l'errore medio.

La distribuzione irregolare e del tutto accidentale dei residui (considerati in valore assoluto ed in segno), non permette di formulare alcuna legge sul loro modo di variabilità corrispondentemente al mutare delle palle, nè di giudicare se gli errori più grandi siano più da temere colle palle pesanti o colle leggiere, colle grosse o colle piccole.

Ad indagare dove possano risiedere le maggiori cause d'errore, si prestano le seguenti considerazioni. Se in una delle equazioni generate

$$ax + by + c = v$$

si considerano x ed y come costanti, l'errore medio del residuo v (errore medio dell'unità di peso), si potrà in via d'approssimazione, esprimere colla formola

$$m_v = \sqrt{x^2 m_a^2 + y^2 m_b^2 + m_c^2}\ ,$$

dove con $m_a\, m_b\, m_c$ si intendono gli errori medi corrispondenti alle determinazioni dei coefficienti $a\, b\, c$ (¹). Tenute presenti le espressioni 8) (§ II) dei coefficienti, ed avuto riguardo alla piccolezza dei rapporti $\frac{m'}{m}\,\frac{m'''}{m''}\,\frac{m's'}{ms}\,\frac{m'''s'''}{m''s''}$, si riconosce subito che gli errori medi $m_a\, m_b$ sono di molto inferiori ad m_c. D'altra parte nella formola precedente, m_a ed m_b debbono essere moltiplicati rispettivamente per x ed y, i cui va-

(¹) La formola è rigorosa solo quando i coefficienti $a\, b\, c$ sono osservati indipendentemente l'uno dall'altro.

lori , come già si è trovato, sono molto piccoli: sarà quindi lecito porre, con una approssimazione più che sufficiente,

$$m_v = m_c .$$

Se si ritengono gli elementi più sostanziali, nella composizione di c, si può scrivere

$$c = h_1 - h_2 + c_1 - c_2 + \lambda_0 (t_1^2 - t_2^2):$$

ma c_1 e c_2, per il modo con cui sono determinati, risultano affetti da errori così piccoli, da potersi ritenere come dati esattamente, rispetto agli altri elementi, quindi sarà

$$m_v^2 = m^2_{h_1} + m^2_{h_2} + 4\lambda_0^2 (t_1^2 m^2_{t_1} + t_2^2 m^2_{t_2}) .$$

Come si è già visto

$$h_1 = \delta_1 \qquad h_2 = D + \delta_2 ,$$

e per l'errore medio corrispondente alla determinazione di δ_1 e δ_2, coincidente prossimamente con quello da cui sono affette le letture I_1 ed I_2, (vedi § XIII) si può assumere il valore

$$m_\delta = 0^\mu.2 .$$

L'errore medio d una determinazione della distanza D fra i microscopi è

$$m_D = 0^\mu.4 .$$

Gli errori medi delle oscillazioni, espresse in tempo dell'orologio, vennero già determinati nel § XIV: volendo tener conto degli errori commessi nelle osservazioni astronomiche e di quelli corrispondenti alle riduzioni ad archi infinitamente piccoli ed alla temperatura normale, si potranno ritenere i seguenti valori *massimi* per tali errori medi:

$$m_{t_1} = 0^s.000001.5 \text{ per il pendolo lungo},$$
$$m_{t_2} = 0 .000001.0 \quad " \quad " \quad " \quad \text{corto} .$$

Se si sostituiscono questi valori nella formola precedente, e si ritiene in media

$$t_1 = 1^s.5 \qquad t_2 = 1^s.1 ,$$

si ottiene

$$m_v = 5^\mu ,$$

mentre col precedente calcolo di compensazione si era trovato, per l'errore medio dei residui

$$M = 24^\mu.1.$$

La discordanza dei due risultati mostra che le maggiori cause d'errore non risiedono nella incertezza con cui vengono misurate le grandezze lineari e le durate d'oscillazione, che entrano a costituire i coefficienti delle equazioni, ma bensì nelle condizioni fisiche del mezzo ambiente, variabili di volta in volta e solo parzialmente assoggettabili a calcolo, ed in altre circostanze sottraentisi all'analisi. Essa può forse

ne ha venire in parte giustificata dalla non completa verificazione di una delle ipotesi alle quali è appoggiato il metodo di *Bessel*, cioè che la lamina di sospensione eserciti la medesima influenza sui due pendoli coniugati. Ad ogni modo, facendo astrazione dalle cause d'errore di importanza secondaria, egli è indispensabile, quando si voglia raggiungere una precisione maggiore nelle determinazioni della gravità, effettuate col metodo presente, instituire delle ricerche supplementari sulla resistenza opposta dal mezzo al moto dei pendoli, in guisa da poter assegnare a ciascuno di essi le proprie costanti di correzione.

Allo scopo di fare il confronto fra il precedente valore di λ e quelli determinati da altri osservatori, occorre farne la riduzione a livello del mare e ad una data latitudine. Questo confronto venne già eseguito, col valore λ_0 pubblicato, dal prof. Helmert in un rapporto *Sulle misure del pendolo eseguite negli ultimi anni* (1) inserito nelle pubblicazioni della Commissione internazionale per la misura del grado. Si riporta qui un brano della tabella comparativa del prof. Helmert, introducendovi le opportune correzioni.

Nelle prime tre colonne sono dati il nome, l'altitudine e la latitudine della stazione; nella 4ª il valore osservato per la lunghezza del pendolo a secondi; nella 5ª colonna segnata col nome di Faye è data la lunghezza del pendolo ridotta a livello del mare, senza tener conto dell'attrazione del terreno; nella 6ª segnata Bouguer la lunghezza del pendolo ridotta tenendo conto dell'attrazione del terreno; nella 7ª e nella 8ª colonna sono date le lunghezze del pendolo ridotte alla latitudine di 45° in corrispondenza ai due casi precedenti. Questa riduzione venne fatta colla formola interpolatrice di Helmert (2).

$$L = 0{,}993549 - 0{,}002631 \cos 2\varphi ,$$

ove φ rappresenta la latitudine. Nella 9ª colonna è registrato il nome dell'osservatore (3).

Nome delle stazioni (1)	Altitudine in metri (2)	Latitudine geografica (3)	Valore osservato in metri (4)	Lunghezza del pendolo a secondi a livello del mare		Lunghezza del pendolo a secondi a livello del mare ed a 45° di latitudine		Osservatori (9)
				Faye (5)	Bouguer (6)	Faye (7)	Bouguer (8)	
Altona	31	° ′ ″ 53.32.45	0.994293.3	0.994349	0.994347	0.993576	0.993575	C. F. W. Peters
Koenigsberg.	22	54.42.50	0.994398.9	0.994452	0.994450	574	575	» »
Parigi	74	48.50.14	0.993917.5	0.993940	0.993934	588	582	Peirce
Kew	7	51.28.06	0.994161.4	0.994164	0.994163	575	574	»
Berlino. . . .	38	52.30.17	0.994223.7	0.994236	0.994232	553	549	»
Madrid. . . .	657	40.24.30	0.992954	0.993159	0.993082	579	502	Barraquer
Roma.	59	41.53.35	0.993295	0.993313	0.993306	598	591	Pisati e Pucci
Monaco. . . .	529	48.08.45	0.993694	0.993859	0.993811	571	523	v. Orff.
Parigi	74	48.50.14	0.993903	0.993926	0.993920	574	568	Defforges
Mosca	142	55.45.20	—	0.994567	0.994550	602	585	Bredichin

(1) Comptes-rendus des séances de la Commission permanente de l'Association géodésique internationale réunie a l'Observatoire de Nice, 1888.
(2) Opera citata, II, p. 240.
(3) Nell'epoca nella quale venne presentato all'Accademia questo lavoro (maggio 1892) non eravi

Dal confronto di questo specchio colla precedente formola interpolatrice, risulterebbe l'esistenza in Roma di una *anomalia locale*

di $+49^\mu$ oppure di $+42^\mu$,

a seconda che, nella riduzione a livello del mare, non si tiene conto oppure si tiene conto dell'attrazione del terreno sottostante.

§ XXVII. — Altitudine e latitudine del luogo d'osservazione.

Durante i mesi di giugno e di luglio 1891, venne eseguita in Roma, per conto dell'Istituto geografico militare, una livellazione di precisione nella quale venne portata la *quota* anche sulla soglia della porta d'ingresso alla Scuola degli Ingegneri. Si volle approfittare di questa favorevole circostanza per dare con tutta esattezza la quota del luogo d'osservazione, malgrado nella presente ricerca sarebbe sufficiente conoscerla dentro il metro. Il sig. generale Annibale Ferrero, direttore dell'Istituto geografico militare, al quale a tale oggetto mi rivolsi, gentilmente, e con tutta sollecitudine, mi fece trasmettere i seguenti dati:
Quota del circolo inciso nel secondo gradino a sinistra della porta d'ingresso alla Scuola degli Ingegneri

$47^m.910$.

---

altro modo di confrontare le lunghezze del pendolo, ottenute in luoghi diversi, che quello qui indicato. Moltiplicatesi recentemente le *determinazioni relative* di gravità, grazie all'apparecchio di Sterneck (mirabile per semplicità) ed a quello Defforges, si poterono instituire dei confronti diretti ed assai istruttivi fra parecchi dei valori assoluti. Qui mi limiterò a citare i risultati delle misure effettuate dal prof. G. Lorenzoni negli anni 1891 e 1892 e nell'ottobre 1893 per determinare la differenza di gravità fra Padova, Vienna, Parigi, Milano e Roma, quali essi sono consegnati nell'ultima pubblicazione (*Determinazione relativa della gravità terrestre a Padova, a Milano ed a Roma fatta nell'autunno 1893 mediante l'apparato pendolare dello Sterneck.* Atti del R. Istituto Veneto: tomo V, serie 7ª, 1893-94, pag. 293):

« Riducendo le determinazioni del Biot e quella dei professori Pucci e Pisati all'Istituto geo- « grafico Militare di Vienna col mezzo delle differenze misurate direttamente

« Padova-Parigi $= -281^\mu$; Padova-Milano $= +106^\mu$; Padova-Roma $= +312^\mu$; Vienna (Tür- « kenschanze) — Padova $= +197^\mu$ per la mia stazione e $+195$ per quella di Biot; Istituto geo- « grafico militare — Türkenschanze $= +11^\mu$, si ha:

« *Lunghezza del pendolo semplice a secondi all'Istituto predetto:*

« 993769^μ	dalle	osservazioni di Biot	fatte nel	1824	in Parigi	»
« 993812	»	»	»	»	» Milano	»
« 993803	»	»	»	1825	» Padova	»
« 993815	»	»	dei prof. Pucci e Pisati		» Roma	».

Quota della piastrina metallica murata sulla parete a sinistra della porta suddetta

$50^{m}.294$.

Queste quote sono riferite al livello medio del mare determinato dal mareografo di Genova, e provengono dalla livellazione di precisione eseguita lungo la linea Genova-Pisa-Livorno-Civitavecchia-Roma. Esse dovranno però ancora subire una piccola correzione dovuta al Calcolo di compensazione.

Partendo dalla prima di queste quote, con una livellazione diretta, si è determinata l'altezza del luogo d'osservazione, ottenendo il seguente risultato:
Quota dell'asse del microscopio di misura inferiore

$59^{m}.097$.

Nel mese di luglio 1887, per incarico avuto dal prof. Pucci, il sig. Silvio Marianni eseguì una serie di osservazioni di latitudine, facendo uso dello strumento a passaggi di Bamberg, ed impiegando il metodo di Talcott. Le stelle furono prese dal Catalogo del prof. Respighi [1] colle variazioni annue fornite dal Catalogo stesso. La riduzione all'epoca della osservazione venne effettuata coi coefficienti del *Nautical Almanac for 1887*. Per il valore della parte di micrometro si ritenne quello già dato precedentemente.

La livelletta zenitale venne assoggettata ad una scrupolosa verifica, prima di effettuare la riduzione delle osservazioni, e si riconobbe non regolare nella sua curvatura. Il valore angolare della parte risultò di 0''.72 alla divisione decima, di 0''.81 alla ventesima, di 0''.94 alla trentesima, come si rileva da apposita curva dedotta da 7 serie di osservazioni indipendenti, e sufficientemente concordanti fra loro.

I risultati di queste osservazioni sono riassunti nel seguente quadro, dove con k si intende il numero delle coppie di stelle osservate, con N il numero delle determinazioni semplici di latitudine. I diversi valori della latitudine dedotti da ciascuna coppia di stelle vennero riuniti in una media, determinandosi poi gli scostamenti v fra questa ed i singoli valori. Le latitudini medie corrispondenti alle diverse coppie di stelle furono riunite in una nuova media, col mezzo della quale si calcolarono gli scostamenti v' ed i loro quadrati, registrati nelle ultime due colonne.

[1] *Catalogo delle declinazioni medie pel 1875.0 di 1463 stelle comprese fra i paralleli 20° e 64° Nord.* R. Acc. dei Lincei, 1879-80.

k	Nome delle stelle	N	Latitudine	v	vv	Latitudine media	v^1	v^1v^1
1	BAC 4965 " 5026	1	41°.53'.35",73			41°.53'.35",73	1,33	1,7689
2	β Bootis	2	36,46	0,65	0,4225	35,81	1,41	1,9881
	BAC 5033	3	35,17	0,64	4096			
3	BAC 5033	4	35,79	0,00	0000	35,79	1,39	1,9321
	ν^1 Bootis	5	35,79	0,00	0000			
4	BAC 5033	6	37,03	0,09	0081	36,94	2,54	6,4516
	ν^2 Bootis	7	36,85	0,09	0081			
5	BAC 5033	8	36,54	0,12	0144	36,42	2,02	4,0804
	φ Bootis	9	36,30	0,12	0144			
6	BAC 5071 ϑ Coronae	10	34,02	0,48	2304	34,50	0,10	0,0100
		11	34,86	0,36	1296			
		12	34,72	0,22	0484			
		13	34,40	0,10	0100			
7	BAC 5076 " 5157	14	35,39	0,63	3969	36,02	1,62	2,6244
		15	36,51	0,49	2401			
		16	36,15	0,13	0169			
8	ν^1 Bootis χ Herculis	17	33,20	0,82	6724	34,02	0,38	0,1444
		18	33,97	0,05	0025			
		19	34,89	0,87	7589			
9	ν^1 Bootis 4 Herculis	20	33,48	0,31	0961	33,79	0,61	0,3721
		21	34,09	0,30	0900			
		22	(*) [35,61]					
10	ν^2 Bootis χ Herculis	23	34,44	0,65	4225	35,09	0,69	0,4761
		24	35,02	0,07	0049			
		25	35,81	0,72	5184			
11	ν^2 Bootis 4 Herculis	26	34,71	0,21	0441	34,92	0,52	0,2704
		27	35,14	0 22	0484			
		28	[36,58]					
12	BAC 5157 φ Bootis	29	33,13	0,58	3364	33,71	0,69	0,4761
		30	33,70	0,01	0001			
		31	34,31	0,60	3600			

(*) I valori racchiusi fra le [ ] vennero scartati dietro applicazione del criterio di Peirce.

k	Nome delle stelle	N	Latitudine	v	vv	Latitudine media	v'	v'v'
13	φ Bootis χ Herculis	32 33 34 35	41°.53'.33",98 34,47 34,96 34,25	0,43 0,06 0,55 0,16	0,1849 0036 3025 0256	41°.53'.34",41	0,01	0,0001
14	φ Bootis 2 Herculis	36 37	35,81 36,15	0,17 0,17	0289 0289	35,98	1,58	2,4964
15	φ Bootis 4 Herculis	38 39 40 41	34,25 34,59 35,02 34,50	0,34 0,00 0,43 0,09	1156 0000 1849 0081	34,59	0,19	0,0361
16	BAC 5181 π Coronae	42 43 44 45 46 47	33,31 33,13 32,29 32,88 32,98 32,52	0,46 0,28 0,56 0,03 0,13 0,33	2116 0784 3136 0009 0169 1089	32,85	1,55	2,4025
17	BAC 5279 ε Coronae	48 49 50 51	34,99 34,09 34,29 33,95	0,66 0,24 0,04 0,38	4356 0576 0016 1444	34,33	0,07	0,0049
18	BAC 5310 υ Herculis	52 53 54 55 56	34,67 34,04 34,56 35,01 34,60	0,09 0,54 0,02 0,43 0,02	0081 2916 0004 1849 0004	34,58	0,18	0,0324
19	BAC 5316 ρ Coronae	57 58 59	34,50 33,49 33,58	0,64 0,37 0,28	4096 1369 0784	33,86	0,54	0,2916
20	ι Coronae BAC 5341	60 61 62	33,00 33,07 33,93	0,33 0,26 0,60	1089 0676 3600	33,33	1,07	1,1449
21	BAC 5336 τ Herculis	63 64 65	34,74 35,57 34,93	0,34 0,49 0,15	1156 2401 0225	35,08	0,68	0,4624

k	Nome delle stelle	N	Latitudine	v	vv	Latitudine media	v^1	$v^1 v^1$
22	τ Coronae	66	41°.53′.34″,60	0,59	0,3481			
	τ Herculis	67	35,75	0,56	3136	41°.53′.35″,19	0,79	0,6241
		68	35,23	0,04	0016			
23	10 Herculis	69	34,03	0,47	2209			
	BAC 5459	70	34,94	0,44	1936	34,50	0,10	0,0100
		71	34,52	0,02	0004			
24	14 Herculis	72	32,93	0,11	0121			
	BAC 5460	73	33,14	0,10	0100	33,04	1,36	1,8496
		74	33,04	0,00	0000			
25	BAC 5411	75	34,37	0,19	0361			
	τ Herculis	76	35,15	0,59	3481	34,56	0,16	0,0256
		77	34,17	0,39	1521			
26		78	33,42	0,30	0900			
	σ^1 Coronae	79	33,61	0,11	0121	33,72	0,68	0,4624
	BAC 5461	80	33,42	0,30	0900			
		81	33,43	0,71	5041			
27	17 Herculis	82	35,35	0,69	4761			
	BAC 5459	83	34,18	0,48	2304	34,66	0,26	0,0676
		84	34,45	0,21	0441			
28	BAC 5461	85	33,44	0,19	0361	33,63	0,77	0,5929
	ν^1 Coronae	86	33,81	0,18	0324			
29		87	34,67	0,32	1024			
	ξ Coronae	88	[32,76]			34,35	0,05	0,0025
	BAC 5499	89	34,13	0,22	0484			
		90	34,24	0,11	0121			
30	BAC 5499	91	[32,77]					
	32 Herculis	92	34,39	0,34	1156	34,73	0,33	0,1089
		93	35,07	0,34	1156			
31	η^2 Draconis	94	34,96	0,41	1681			
	β Herculis	95	35,53	0,16	0256	35,37	0,97	0.9409
		96	35,62	0,25	0625			
52	η^2 Draconis	97	32,89	0,97	9409			
	BAC 5530	98	34,69	0,83	6889	33,86	0,54	0,2916
		99	33,99	0,13	0169			

k	Nome delle stelle	N	Latitudine	v	vv	Latitudine media	v¹	v¹v¹
33	BAC 5530 " 5560	100 101 102 103	41°.53′.34″,54 35,14 34,04 35,28	0,21 0,39 0,71 0,53	0,0441 1521 5041 2809	41°.53′.34″,75	0,35	0,1225
34	32 Herculis 16 Draconis	104 105	34,25 33,95	0,15 0,15	0225 0225	34,10	0,30	0,0900
35	32 Herculis 17 Draconis	106 107	33,92 33,97	0,03 0,02	0009 0004	33,95	0,45	0,2025
36	BAC 5559 ζ Herculis	108 109 110 111	35,55 37,19 36,58 36,44	0,89 0,75 0,14 0,00	7921 5625 0196 0000	36,44	2,04	4,1616
37	42 Herculis BAC 5619	112 113 114 115	33,80 34,07 34,00 34,25	0,23 0,04 0,03 0,22	0529 0016 0009 0484	34,03	0,37	0,1369
38	BAC 5615 " 5706	116 117 118 119	34,51 33,88 34,25 34,52	0,22 0,41 0,04 0,23	0484 1681 0016 0529	34,29	0,11	0,0121
39	BAC 5775 " 5874	120 121	32,60 33,26	0,33 0,33	1089 1089	32,93	1,47	2,1609
40	BAC 5797 δ Herculis	122 123 124 125	35,08 36,52 35,46 35,69	0,61 0,83 0,23 0,00	3721 6889 0529 0000	35,69	1,29	1,6641
41	BAC 5795 u Herculis	126 127 128	35,83 33,90 34,96	0,93 1,00 0,06	8649 1,0000 0,0036	34,90	0,50	0,2500
42	δ Herculis BAC 5918	129 130 131	35,37 34,49 35,58	0,22 0,66 0,43	0484 4356 1849	35,15	0,75	0,5625

k	Nome delle stelle	N	Latitudine	v	vv	Latitudine media	v¹	v¹v¹
43	e Herculis	132	41°.53′.33″,31	0,37	0,1369			
	74 Herculis	133	34,71	1,03	1,0609	41°.53′.33″,68	0,72	0,5184
		134	33,02	0,66	0,4356			
44	70 Herculis	135	35,04	0,30	0900			
	BAC 5918	136	34,12	0,62	3844	34,74	0,34	0,1156
		137	35,06	0,32	1024			
45	74 Herculis	138	34,25	0,12	0144			
	ρ² Herculis	139	34,21	0,08	0064	34,13	0,27	0,0729
		149	33,94	0,19	0361			
46	BAC 5902	141	32,84	0,60	3600	33,44	0,96	0,9216
	λ Herculis	142	34,04	0,60	3600			
47	BAC 5918	143	33,77	0,13	0169			
	„ 5988	144	33,30	0,34	1156	33,64	0,76	0,5776
		145	33,86	0,22	0484			
48	BAC 5918	146	35,49	0,29	0841			
	83 Herculis	147	35,87	0,09	0081	35,78	1,38	1,9044
		148	35,97	0,19	0361			
49	78 Herculis	149	34,41	0,20	0400			
	ν¹ Draconis	150	34,53	0,32	1024	34,21	0,19	0,0361
		151	33,68	0,53	2809			
50	78 Herculis	152	35,36	1,02	1,0404			
	ν² Draconis	153	34,08	0,26	0,0676	34,34	0,06	0,0036
		154	33,59	0,75	5625			
51	β Draconis	155	34,33	0,37	1369	34,70	0,30	0,0900
	BAC 5962	156	35,07	0,37	1369			
52	β Draconis	157	33,75	0,09	0081	33,66	0,74	0,5476
	BAC 5986	158	33,57	0,09	0081			
53	BAC 5997	159	32,64	0,09	0081	32,55	1,85	3,4225
	„ 6062	160	32,46	0,09	0081			
54	BAC 5997	161	32,65	0,60	3600			
	f Herculis	162	31,61	0,43	1849	32,05	2,35	5,5225
		163	31,88	0,17	0289			

k	Nome delle stelle	N	Latitudine	v	vv	Latitudine media	v'	$v'v'$
55	BAC 6013	164	41°.53'.32",53	0,32	0,1024	41°.53'.32",85	1,55	2,4025
	" 6062	165	33,16	0,31	0961			
56	BAC 6013	166	32,83	0,03	0009	32,86	1,54	2,3716
	f Herculis	167	32,89	0,03	0009			
57		168	34,53	0,13	0169	34,40	0,00	0,0000
	BAC 6062	169	34,89	0,49	2401			
	" 6095	170	34,18	0,22	0484			
		171	33,98	0,42	1764			
58		172	33,68	0,11	0121	33,79	0,61	0,3721
	f Herculis	173	34,17	0,38	1444			
	BAC 6095	174	33,68	0,11	0121			
		175	33,62	0,17	0289			
59	BAC 6062	176	34,16	0,03	0009	34,13	0,27	0,0729
	" 6162	177	34,09	0,04	0016			
60	*f* Herculis	178	33,66	0,04	0016	33,70	0,70	0,4900
	BAC 6162	179	33,73	0,03	0009			
				[vv]	28,7228		[$v'v'$]	61,2470

Calcolando coi dati di questo quadro l'errore probabile e di un'osservazione semplice di latitudine, si trova [1]

$$e = 0{,}6745 \sqrt{\frac{[vv]}{\mathrm{N}-k}} = 0''.337.$$

Se z_1 e z_2 sono le distanze zenitali delle due stelle osservate in una determinazione della latitudine φ, si avrà per l'errore probabile di una distanza zenitale osservata

$$e_z = e\sqrt{2} = 0''.477.$$

Sia ε l'errore probabile d'osservazione del valore medio della latitudine dedotto da tutte le osservazioni di una singola coppia, E_δ l'errore probabile della media di

(1) Cfr. Chauvenet, Opera citata, vol. II, pag. 351.

due declinazioni, E_φ l'errore probabile della latitudine costituito dagli errori di osservazione e di declinazione corrispondentemente alla formola

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2}(z_1 - z_2):$$

si avrà

$$E^2_\varphi = E^2_\delta + \varepsilon^2.$$

Il valore di E_φ e di ε si possono determinare coi dati precedenti: da questa formola si potrà allora ricavare il valore di E_δ per le stelle osservate.

L'errore probabile E_φ si ottiene dal confronto di tutte le latitudini medie ricavate dalle diverse coppie di stelle, esso è dato da

$$E_\varphi = 0{,}6745 \sqrt{\frac{[v'v']}{k-1}} = 0''.687.$$

Il valore di ε, per ogni coppia di stelle, sarebbe dato dalla formola $\varepsilon = \frac{e}{\sqrt{n}}$, essendo n il numero di osservazioni semplici fatte colla coppia considerata: ma volendo tener conto di tutte le coppie, se ne può determinare il valor medio colla formola

$$\varepsilon = e \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{n}\right]}{k-1}} = 0''.21.$$

La precedente equazione darà quindi

$$E_\delta = 0''.65$$

e conseguentemente, per l'errore probabile di una declinazione del Catalogo Respighi, si otterrà

$$E_\delta \sqrt{2} = 0''.93.$$

Qui è superfluo avvertire che questo valore stabilito solo in vista di assegnare alle osservazioni i proprî pesi, è costituito di due parti di cui l'una è propria del Catalogo, ma l'altra dipende ancora dagli errori di osservazione.

Per determinare i pesi da attribuire ai valori della latitudine dedotti dalle diverse coppie di stelle, si noti che tali valori sono affetti dall'errore medio

$$\sqrt{E_\delta^2 + \frac{e^2}{n}}:$$

si potrà quindi assumere come misura del loro peso la quantità

$$p = \frac{1}{E_\delta^2 + \frac{e^2}{n}} = \frac{1}{0{,}429 + \frac{0.114}{n}}.$$

I pesi così ottenuti per ciascuna coppia di stelle sono registrati nel seguente specchio:

k	Coppie di stelle	Latitudine φ	Peso p	k	Coppie di stelle	Latitudine φ	Peso p
1	BAC - 4965 con BAC - 5026	41°.53′.35″.73	1.84	31	η'' Draconis con β Herculis	41°.53′.35″.37	2.14
2	β Bootis » BAC - 5033	35.81	2.06	32	η'' Draconis » BAC - 5530	33.86	2.14
3	BAC - 5033 » ν' Bootis	35.79	2.06	33	BAC - 5530 » BAC - 5560	34.75	2.19
4	BAC - 5033 » ν'' Bootis	36.94	2.06	34	32 Herculis » 16 Draconis	34.10	2.06
5	BAC - 5033 » φ Bootis	36.42	2.06	35	32 Herculis » 17 Draconis	33.95	2.06
6	BAC - 5071 » ϑ Coronae	34.50	2.19	36	BAC - 5559 » ς Herculis	36.44	2.19
7	BAC - 5076 » BAC - 5157	36 02	2.14	37	42 Herculis » BAC - 5619	34.03	2.19
8	ν' Bootis » $\varkappa$ Herculis	34.02	2.14	38	BAC - 5615 » BAC - 5706	34.29	2.19
9	ν' Bootis » 4 Herculis	33.79	2.06	39	BAC - 5775 » BAC - 5874	32.93	2.06
10	ν'' Bootis » χ Herculis	35.09	2.14	40	BAC - 5797 » δ Herculis	35.69	2.19
11	ν'' Bootis » 4 Herculis	34.92	2.06	41	BAC - 5795 » u Herculis	34.90	2.14
12	BAC - 5157 » φ Bootis	33.71	2.14	42	δ Herculis » BAC - 5918	35.15	2.14
13	φ Bootis » χ Herculis	34.41	2.19	43	e Herculi » 74 Herculis	33.68	2.14
14	φ Bootis » 2 Herculis	35.98	2.06	44	70 Herculis » BAC - 5918	34.74	2.14
15	φ Bootis » 4 Herculis	34.59	2.19	45	74 Herculis » ϱ^2 Herculis	34.13	2.14
16	BAC - 5181 » π Coronae	32.85	2.23	46	BAC - 5902 » λ Herculis	33.44	2.06
17	BAC - 5279 » ε Coronae	34.83	2.19	47	BAC - 5918 » BAC - 5988	33.64	2.14
18	BAC - 5310 » υ Herculis	34 58	2.21	48	BAC - 5918 » 83 Herculis	35.78	2.14
19	BAC - 5316 » ϱ Coronae	33.86	2 14	49	78 Herculis » ν^1 Draconis	34.21	2.14
20	ι Coronae » BAC - 5341	33.33	2.14	50	78 Herculis » ν^2 Draconis	34.34	2.14
21	BAC - 5336 » τ Herculis	35.08	2.14	51	β Draconis » BAC - 5962	34.70	2.06
22	τ Coronae » τ Herculis	35.19	2.14	52	β Draconis » BAC - 5986	33.66	2.06
23	10 Herculis » BAC - 5459	34.50	2.14	53	BAC - 5997 » BAC - 6062	32.55	2.06
24	14 Herculis » BAC - 5460	33.04	2.14	54	BAC - 5997 » f Herculis	32.05	2.14
25	BAC - 5411 » τ Herculis	34.56	2.14	55	BAC - 6013 » BAC - 6062	32 85	2.06
26	σ' Coronae » BAC - 5461	33.72	2.19	56	BAC - 6013 » f Herculis	32.86	2.06
27	17 Herculis » BAC - 5459	34.66	2.14	57	BAC - 6062 » BAC - 6095	34.40	2.19
28	BAC - 5461 » ν' Coronae	33.63	2.06	58	f Herculis » BAC - 6095	33.79	2.19
29	ξ Coronae » BAC - 5499	34.35	2.14	59	BAC - 6062 » BAC - 6162	34.13	2.06
30	BAC - 5499 » 32 Herculis	34.73	2.06	60	f Herculis » BAC - 6162	33.70	2.06

Da questi dati si deduce il valore della latitudine media definitiva (pilastro dello strumento a passaggi),

$$\varphi_m = \frac{[p\varphi]}{[p]} = 41°.53'.34''.416\,,$$

coll'errore probabile

$$\pm 0.6745 \sqrt{\frac{[pvv]}{(k-1)[p]}} = \pm 0''.088.$$

Resta ancora a ridurre la precedente latitudine al luogo occupato dal pendolo. Da una piccola triangolazione di collegamento della Torretta annessa alla Scuola degli Ingegneri collo strumento dei passaggi, si ottennero i seguenti risultati (1):

Distanza della Torretta della Scuola (centro del pilastrino) dallo strumento dei passaggi . . . . $s = 121^m.80$

Azimut della Torretta sullo strumento dei passaggi . . $\alpha = 278°.53',21''$.

Di qui si ottiene per la riduzione della latitudine dallo strumento dei passaggi alla Torretta

$$\Delta\varphi = \frac{s \cos \alpha}{\varrho \operatorname{sen} 1''} = +0''.610.$$

Mediante una misura diretta si ottenne:

Distanza del luogo del pendolo dalla Torretta . . . . $s = 20^m.30$

Azimut del luogo del pendolo sull'orizzonte della Torretta $\alpha = 54°.23'$

coi quali dati si calcola la nuova riduzione

$$\Delta\varphi = +0''.383.$$

La latitudine del luogo del pendolo risulta quindi di

$$41°.53'.35''.409 \pm 0''.088.$$

(1) Cfr. V. Reina, *Collegamento della Specola Geodetica di S. Pietro in Vincoli cogli osservatori astronomici del Collegio Romano e del Campidoglio.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1893.

NOTAZIONI ADOPERATE NEI SEGUENTI QUADRI RIASSUNTIVI

Stato dell'aria.

B = pressione barometrica a 0° in millimetri normali ed a livello del microscopio inferiore.
f = tensione del vapore acqueo.
ρ = peso di un millilitro d'aria.
θ_f = temperatura media del filo.
θ_p = " " della palla.

Elementi dei pendoli.

I Lamina.
II Saldatura.
III Congiunzione superiore.
IV Filo visibile.
V Congiunzione inferiore.
VI Mira.
VII Palla.

Per ogni elemento del pendolo.

l = dimensione in altezza.
m = massa.
u = momento d'inerzia.
s = distanza del baricentro dall'asse di sospensione.

Misura delle grandezze lineari.

I' = lettura sull'indice superiore.
I'' = " " inferiore.
δ = " sulla mira del pendolo.
L = distanza fra gli indici.

Misura delle durate d'oscillazione.

O = ora media dell'esperienza in tempo dell'orologio Dent.
T = intervallo medio d'esperienza " " "
τ = riduzione a tempo siderale.
e = elongazione.
N = numero medio delle oscillazioni.
t_s = durata d'oscillazione in tempo siderale.
r = riduzione ad archi infinitamente piccoli.
t_m = durata d'oscillazione in tempo medio e per archi infinitamente piccoli.

---

m = massa complessiva del pendolo.
m' = " dell'aria spostata.
$1 - \frac{m' s'}{m s}$ = correzione idrostatica.
C = riduzione del pendolo composto a pendolo semplice.

L'indice 0 si riferisce al principio dell'esperienza, l'indice 1 alla fine.
Le osservazioni dei due operatori sono contrassegnate cogli accenti ′ e ″ rispettivamente.

Esperienza 1ª.

(Dal 3 al 5 Dicembre 1883).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 740{,}1$	$\theta_{f_0} = 15{,}063$	$\theta_{p_0} = 15{,}065$	$\log \varrho = \bar{3}{,}07479$
	$15{,}080$	$15{,}090$	
$f =$	$\theta_{f_1} = 15{,}070$	$\theta_{p_1} = 15{,}080$	$\log \dfrac{m'}{m} = \bar{4}{,}4159744$
	$\theta_f = 15{,}071$	$\theta_p = 15{,}078$	$\log\left(1 - \dfrac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9998868$

Elementi	l	m	u	s
I	3,89	0,040	0,051	1,945
II	0,15	0,054	0,000	3,965
III	0,429	0,484	0,013	4,254
IV	97,667	0,428	340,537	53,302
V	0,498	0,559	0,018	102.385
VI	0,468	0,462	0,013	109,212
VII	6,3444	599,644	3251,131	105,806

$I' = 53{,}05$ (μ)

$I'' = 42{,}32$

$\delta_0 = 44{,}96$

$\delta_1 = 43{,}55$

$\delta = 44{,}26$

$L = \left\{ \begin{array}{l} 100\ cm. + 35{,}70\ (\mu) \\ a\ 15^\circ{,}052 \end{array} \right.$

$$C = -0{,}03417\ \text{cm}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = 3.25.18$ (h m s)	$e'_0 = 12{,}77$	$t'_s = 1{,}035375.93$	$O'' = 3.23.40$ (h m s)	$e''_0 = 12{,}47$	$t''_s = 1{,}035373.14$
$T' = 15792{,}56$	$e'_1 = 1{,}80$	$r' = 3.77$	$T'' = 14922{,}81$	$e''_1 = 1{,}96$	$r'' = 3.78$
$\tau' = -0{,}18$	$N' = \dfrac{76264}{5}$	$t'_m = 1{,}032545.15$	$\tau'' = -0{,}18$	$N'' = \dfrac{72064}{5}$	$t''_m = 1{,}032542.34$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}032543.74$$

2ª Esperienza elementare

$O' = 8.44.22$ (h m s)	$e'_0 = 9{,}04$	$t'_s = 1{,}035368.06$	$O'' = 8\ 25.36$ (h m s)	$e''_0 = 10{,}38$	$t''_s = 1{,}035368.01$
$T' = 16040{,}14$	$e'_1 = 1{,}22$	$r' = 1.83$	$T'' = 15146{,}39$	$e''_1 = 1{,}29$	$r'' = 2.32$
$\tau' = -0{,}22$	$N' = \dfrac{77460}{5}$	$t'_m = 1{,}032539.23$	$\tau'' = -0{,}20$	$N'' = \dfrac{73144}{5}$	$t''_m = 1{,}032538.72$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}032538.97$$

Esperienza 1ª.

(dal 3 al 5 Dicembre 1883).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 754,0	$\theta_{f_0} = 15,047$	$\theta_{p_0} = 15,04$	$\log \varrho = \bar{3},08291$
$f =$	15,053	15,05	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},4202859$
	$\theta_{f_1} = 15,027$	$\theta_{p_1} = 15,025$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9998856$
	$\theta_f = 15,042$	$\theta_p = 15,038$	

Elementi	l	m	u	s
I	3,63	0,037	0,041	1,815
II	0,15	0,056	0,000	3,705
III	0,431	0,483	0,013	3,995
IV	197,928	0,868	2833,367	103,175
V	0,497	0,559	0,018	202,387
VI	0,468	0,462	0,013	209,214
VII	6,3444	599,644	3251,134	205,808

$I' = 52{,}56\ \mu$

$I'' = 42{,}16$

$\delta_0 = 40{,}76$

$\delta_1 = 39{,}37$

$\delta = 40{,}07$

$L = \left\{ \begin{array}{l} 100\ cm. + 34{,}91\ \mu \\ a\ 15^\circ{,}025 \end{array} \right.$

$C = + 0{,}02898$ cm

1ª Esperienza elementare

$O' = 14.59.37$ (h m s)	$e'_0 = 15,85$	$t'_s = 1,443644.05$	$O'' = 14.59.55$ (h m s)	$e''_0 = 15,70$	$t''_s = 1,443653.02$
$T' = 16017,10$	$e'_1 = 1,61$	$r' = 7.11$	$T'' = 15206,45$	$e''_1 = 1,35$	$r'' = 6.46$
$\imath' = -0,16$	$N' = \frac{55474}{5}$	$t'_m = 1,439695.17$	$\imath'' = -0,16$	$N'' = \frac{52666}{5}$	$t''_m = 1,439704.76$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439699.96$$

2ª Esperienza elementare

$O' = 8.10.43$ (h m s)	$e'_0 = 13,28$	$t'_s = 1,443640.94$	$O'' = 8.17.55$ (h m s)	$e''_0 = 13,45$	$t''_s = 1,443644.55$
$T' = 15606,51$	$e'_1 = 1,32$	$r' = 4.89$	$T'' = 15607,70$	$e''_1 = 1,32$	$r'' = 4.97$
$\imath' = -0,17$	$N' = \frac{54052}{5}$	$t'_m = 1,439694.28$	$\imath'' = -0,17$	$N'' = \frac{54056}{5}$	$t''_m = 1,439697.80$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439696.04$$

Esperienza 2ª.

(dal 6 all'8 Dicembre 1883).

Palla piccola di platino *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 755,9	$\theta_{f_0} = 15,065$	$\theta_{p_0} = 15,06$	$\log \varrho = \bar{3},08401$
	$\theta_{f_1} = 15,042$	$\theta_{p_1} = 15,04$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7525862$
f =	$\theta_f = 15,053$	$\theta_p = 15,05$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999754$

Elementi	l	m	u	s	
					$I' = 52{,}49$ μ
I	3,75	0,039	0,045	1,875	$I'' = 42{,}41$
II	0,15	0,054	0,000	3,825	$\delta_0 = 28{,}81$
III	0,425	0.466	0,012	4,112	$\delta_1 = 26{,}56$
IV	99,708	0,439	363,866	54,179	
V	0,495	0,845	0,027	104,280	$\delta = 27.68$
VI	0,468	0,764	0,022	109,213	L = { 100 *cm.* + 33,38 μ
VII	4,4508	994,286	1969,737	106,753	a 15°,025 }

C = — 0,00807 cm

O′ = 8.42.36 (h m s)	e'_0 = 6,43	t'_s = 1,039717.97	O″ = 8.42.07 (h m s)	e''_0 = 6,59	t''_s = 1,039719.06
T′ = 24692,69	e'_1 = 1,88	r' = 1.44	T″ = 25410,12	e''_1 = 1,86	r'' = 1.50
τ' = − 0,22	N′ = 118746 / 5	t'_m = 1,036877.65	τ'' = − 0,22	N″ = 122196 / 5	t''_m = 1,036878.68

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036878.16$$

Pendolo lungo

B = 751,2	$\theta_{f_0} = 15,055$	$\theta_{p_0} = 15,06$	$\log \varrho = \bar{3},08129$
	$\theta_{f_1} = 15,035$	$\theta_{p_1} = 15,03$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7501997$
f =	$\theta_f = 15,045$	$\theta_p = 15,045$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999756$

Elementi	l	m	u	s	
					$I' = 51{,}89$ μ
I	3,51	0,036	0,037	1,755	$I'' = 41{,}81$
II	0,15	0,054	0,000	3,585	$\delta_0 = 39{,}01$
III	0,430	0,475	0,013	3,874	$\delta_1 = 36{,}09$
IV	199,944	0,873	2907,039	104,060	
V	0,498	0,853	0,027	204.281	$\delta = 37{,}55$
VI	0,468	0,764	0,022	209,215	L = { 100 *cm.* + 36,91 μ
VII	4,4508	994,286	1969,737	206,755	a 15°,02 }

C = + 0,02381 cm

O′ = 5.56.13 (h m s)	e'_0 = 7,91	t'_s = 1,446753.41	O″ = 5.58.01 (h m s)	e''_0 = 7,75	t''_s = 1,446754.86
T′ = 34233,98	e'_1 = 1,02	r' = 1.93	T″ = 33272,21	e''_1 = 1,00	r'' = 1.87
τ' = − 0,32	N′ = 118312 / 5	t'_m = 1,442801.22	τ'' = − 0,32	N″ = 114988 / 5	t''_m = 1,442802.74

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442801.98$$

Esperienza 3ª.

(dall'8 all'11 Dicembre 1883).

Palla piccola d'ottone cava *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 759,2	$\theta_{f_0} = 15,04$	$\theta_{p_0} = 15,04$	$\log \varrho = \bar{3},08591$
	$\theta_{f_1} = 15,04$	$\theta_{p_0} = 15,04$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},3398488$
$f =$	$\theta_f = 15,04$	$\theta_p = 15,04$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999049$

Elementi	l	m	u	s
I	3,86	0,040	0,050	1,930
II	0,15	0,054	0,000	3,935
III	0,425	0,466	0,012	4,222
IV	99,605	0,439	363,114	54,237
V	0,495	0,543	0,017	104,287
VI	0,468	0,462	0,013	109,211
VII	4.4424	249,964	627,328	106,756

$I' = 51{,}89^{\mu}$

$I'' = 41,81$

$\delta_0 = 48,44$

$\delta_1 = 48,20$

$\delta = 48,32$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 36{,}91^{\mu} \\ a\ 15°,02 \end{cases}$

$C = + 0{,}01877^{cm}$

1ª Esperienza elementare

$O' = 1^h.57^m.07^s$	$e'_0 = 14,19$	$t'_s = 1,039562.46$	$O'' = 1^h.52^m.09^s$	$e''_0 = 15,24$	$t''_s = 1,039559.05$
$T' = 11860,69$	$e'_1 = 1,29$	$r' = 3.82$	$T'' = 11967,10$	$e''_1 = 1,35$	$r'' = 4.39$
$\tau' = -0,11$	$N' = \frac{57046}{5}$	$t'_m = 1,036720.14$	$\tau'' = -0,11$	$N'' = \frac{57558}{5}$	$t''_m = 1,036716.21$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036718.17$$

2ª Esperienza elementare

$O' = 7^h.07^m.43^s$	$e'_0 = 16,90$	$t'_s = 1,0\ 9570.63$	$O'' = 7^h.15^m.46^s$	$e''_0 = 13,57$	$t''_s = 1,039560.22$
$T' = 14483,43$	$e'_1 = 1,05$	$r' = 4.76$	$T'' = 14041,05$	$e''_1 = 1,01$	$r'' = 3.26$
$\tau' = -0,13$	$N' = \frac{69660}{5}$	$t'_m = 1,036727.39$	$\tau'' = -0,13$	$N'' = \frac{67533}{5}$	$t''_m = 1,036718.51$

$$t = \frac{2}{1}(t'_m + t''_m) = 1,036722.95$$

Esperienza 3a.

(dall'8 all'11 Dicembre 1883).

Palla piccola d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 752,5	$\theta_{f_0} = 15,05$	$\theta_{p_0} = 15,055$	$\log \rho = \bar{3},08204$
	$\theta_{f_0} = 15,022$	$\theta_{p_1} = 15,02$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},3370597$
$f =$	$\theta_f = 15.036$	$\theta_p = 15,037$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999055$

Elementi	l	m	u	s
I	3,80	0,039	0,047	1,900
II	0,15	0,054	0,000	3,875
III	0,428	0,475	0,013	4,164
IV	199,662	0,873	2898,844	104,209
V	0,498	0,551	0,018	204,289
VI	0,468	0,462	627,328	209,214
VII	4,4424	249,964	0,013	206,759

$I' = 51{,}78^{\mu}$

$I'' = 42,57$

$\delta_0 = 51,55$

$\delta_1 = 50,73$

$\delta = 51,14$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 38{,}81^{\mu} \\ a\ 15°{,}035 \end{cases}$

$C = + 0{,}12109^{cm}$

1a Esperienza elementare

$O' = 2.38.18^{h\,m\,s}$	$e'_0 = 13,34$	$t'_s = 1,446506.74$	$O'' = 2.31.37^{h\,m\,s}$	$e''_0 = 14,47$	$t''_s = 1,446501.03$
$T' = 11462,82$	$e'_1 = 0,87$	$r' = 4,25$	$T'' = 11492,86$	$e''_1 = 0,92$	$r'' = 4.97$
$\iota' = -0,12$	$N' = \frac{39622}{5}$	$t'_m = 1,442552.90$	$\iota'' = -0,12$	$N'' = \frac{39726}{5}$	$t''_m = 1,442546.49$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442549.69$$

2a Esperienza elementare

$O' = 6.28.53^{h\,m\,s}$	$e'_0 = 12,95$	$t'_s = 1,446505.85$	$O'' = 6.15.52^{h\,m\,s}$	$e''_0 = 15,57$	$t''_s = 1,446504.46$
$T' = 11519,51$	$e'_1 = 0,61$	$r' = 3.58$	$T'' = 12169,57$	$e''_1 = 0,69$	$r'' = 5.08$
$\iota' = -0,12$	$N' = \frac{39818}{5}$	$t'_m = 1,442552.68$	$\iota'' = -0,13$	$N'' = \frac{42065}{5}$	$t''_m = 1,442549.80$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442551.24$$

3a Esperienza elementare

$O' = 9.51.34^{h\,m\,s}$	$e'_0 = 11,64$	$t'_s = 1,446506.29$	$O'' = 9.39.49^{h\,m\,s}$	$e''_0 = 13,98$	$t''_s = 1,446497.89$
$T' = 8556,46$	$e'_1 = 1,52$	$r' = 4.19$	$T'' = 8696,15$	$e''_1 = 1,61$	$r'' = 5.78$
$\iota' = -0,09$	$N' = \frac{29576}{5}$	$t'_m = 1,442552.51$	$\iota'' = -0,09$	$N'' = \frac{30059}{5}$	$t''_m = 1,442542.54$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442547.52$$

Eseperienza 4ª.

(dall'11 al 13 Dicembre 1883).

Palla piccola d'ottone piena — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 749,2 | $\theta_{f_0} = 15,037$ | $\theta_{p_0} = 15,015$ | $\log \varrho = \bar{3},08012$

| $\theta_{f_1} = 15,063$ | $\theta_{p_1} = 15,045$ | $\log \frac{m'}{m} = \bar{4},15642$

$f =$ | $\theta_f = 15,050$ | $\theta_p = 15,030$ | $\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999378$

Elementi	l	m	u	s
I	3,88	0,040	0,050	1,940
II	0,15	0,054	0,000	3,955
III	0,425	0,466	0,012	4,242
IV	99,580	0,439	362,932	54,245
V	0,495	0,543	0,017	104,282
VI	0,468	0,462	0,013	109,212
VII	4,4484	386,660	765,153	106,754

I′ = 51,92 μ

I″ = 42,06

δ_0 = 38,94

δ_1 = 37,12

δ = 38,03

L = { 100 cm. + 39,50 μ ; a 15°,022 }

C = + 0,00884 cm

1ª Esperienza elementare

O′ = 3.33.33 (h m s)	e'_0 = 10,37	t'_s = 1,039708.78	O″ = 3.33.47 (h m s)	e''_0 = 10,05	t''_s = 1,039709.89
T′ = 17258,49	e'_1 = 1,13	r' = 2.24	T″ = 16607,86	e''_1 = 1,16	r'' = 2.15
τ' = − 0,16	N′ = 82996 / 5	t'_m = 1,036867.68	τ'' = − 0,16	N″ = 79867 / 5	t''_m = 1,036868.88

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036868,28$$

2ª Esperienza elementare

O′ = 8.30.07 (h m s)	e'_0 = 12,05	t'_s = 1,039714.17	O″ = 8.35.47 (h m s)	e''_0 = 11,39	t''_s = 1,039711.29
T′ = 16427,24	e'_1 = 1,40	r' = 3.05	T″ = 16371,46	e''_1 = 1,35	r'' = 2.78
τ' = − 0,17	N′ = 78998 / 5	t'_m = 1,036872.25	τ'' = − 0,17	N″ = 78730 / 5	t''_m = 1,036869.65

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036870.95$$

Esperienza 4ª.

(dall'11 al 13 Dicembre 1883).

Palla piccola d'ottone piena — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 752,4	$\theta_{f_0} = 15{,}03$	$\theta_{p_0} = 15{,}00$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08198$
	$\theta_{f_1} = 15{,}015$	$\theta_{p_1} = 14.995$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}15828$
$f =$	$\theta_f = 15{,}022$	$\theta_p = 14{,}997$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999375$

Elementi	l	m	u	s
I	3,73	0,039	0,045	1,865
II	0,15	0,054	0,000	3,805
III	0,428	0,475	0,013	4,094
IV	199,725	0,873	2900,673	104,170
V	0,498	0,551	0,018	204,282
VI	0,468	0,462	0,013	209,213
VII	4,4484	386,660	765,153	206,755

$I' = 52{,}20$ μ

$I'' = 42{,}87$

$\delta_0 = 57{,}59$

$\delta_1 = 56{,}81$

$\delta = 57{,}20$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 36{,}65\ \mu \\ a\ 15^\circ{,}015 \end{cases}$

$C = +0{,}07659$ cm

1ª Esperienza elementare

$O' = 3.13.58$ (h m s)	$e'_0 = 12{,}41$	$t'_s = 1{,}446672.87$	$O'' = 3.06.48$ (h m s)	$e''_0 = 14{,}51$	$t''_s = 1{,}446662.91$
$T' = 15855{,}12$	$e'_1 = 0{,}98$	$r' = 3\ 94$	$T'' = 15916{,}06$	$e''_1 = 1{,}03$	$r'' = 5.10$
$\tau' = -0{,}16$	$N' = \frac{54798}{5}$	$t'_m = 1{,}442718.89$	$\tau'' = -0{,}16$	$N'' = \frac{55009}{5}$	$t''_s = 1{,}442707.79$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442713.34$$

2ª Esperienza elementare

$O' = 8.03.00$ (h m s)	$e'_0 = 11{,}43$	$t'_s = 1{,}446673.70$	$O'' = 8.02.56$ (h m s)	$e''_0 = 10{,}37$	$t''_m = 1{,}446669.75$
$T' = 17271{,}72$	$e'_1 = 0{,}75$	$r' = 3.13$	$T'' = 16246{,}85$	$e''_1 = 0{,}79$	$r'' = 2.70$
$\tau' = -0{,}17$	$N' = \frac{59694}{5}$	$t'_m = 1{,}442720.52$	$\tau'' = -0{,}17$	$N'' = \frac{56152}{5}$	$t''_m = 1{,}442717.01$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442718.76$$

Esperienza 5ª.

(dal 13 al 15 Dicembre 1883).

Palla grossa d'ottone piena — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 759,4	$\theta_{f_0} = 15,015$	$\theta_{p_0} = 15,00$	$\log \varrho = \bar{3},08602$
	$\theta_{f_1} = 14,95$	$\theta_{p_1} = 14,93$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},16328$
$f =$	$\theta_f = 14,982$	$\theta_p = 14,965$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999367$

Elementi	l	m	u	s
I	3,75	0,039	0,045	1,875
II	0,15	0,054	0,000	3,825
III	0,429	0,484	0,013	4,114
IV	97,780	0,428	341,325	53,219
V	0,498	0,559	0,018	102,358
VI	0,468	0,462	0,013	109,213
VII	6,3722	1133,946	4604,286	105,793

I' = 52,53 μ
I'' = 41,71
δ_0 = 33.77
δ_1 = 31,87
δ = 32,82
L = { 100 cm. + 39,96 μ ; a 15°,015 }

C = — 0,02945 cm

O' = 6h.21m.29s	e'_0 = 16,21	t'_s = 1,035206.90	O'' = 6h.30m.00s	e''_0 = 15,92	t''_s = 1,035207.26
T' = 31862,74	e'_1 = 1,47	r' = 5.04	T'' = 32285,94	e''_1 = 1,43	r'' = 4.68
τ' = — 0,31	N' = 153894/5	t'_m = 1,032375.30	τ'' = — 0,31	N'' = 155938/5	t''_m = 1,032376.02

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032375.66$$

Pendolo lungo

B = 758,6	$\theta_{f_0} = 15,007$	$\theta_{p_0} = 14,99$	$\log \varrho = \bar{3},08556$
	$\theta_{f_1} = 14,96$	$\theta_{p_1} = 14,94$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},16282$
$f =$	$\theta_f = 14,983$	$\theta_p = 14,965$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999368$

Elementi	l	m	u	s
I	3,51	0,036	0,037	1.755
II	0,15	0,054	0,000	3,585
III	0,431	0,483	0,013	3,875
IV	198,021	0,868	2836,032	103,101
V	0,497	0,559	0,018	202,360
VI	0,468	0,462	0,013	209,215
VII	6,3722	1133,946	4604,286	205,795

I' = 52,81 μ
I'' = 42,45
δ_0 = 38,72
δ_1 = 34,72
δ = 36,72
L = { 100 cm. + 39,80 μ ; a 15°,00 }

C = + 0,00947 cm

O' = 5h.40m.55s	e'_0 = 13,49	t'_s = 1,443543.45	O'' = 5h.40m.57s	e''_0 = 13,83	t''_s = 1,443539.78
T' = 31040,57	e'_1 = 1,06	r' = 4.54	T'' = 31828,66	e''_1 = 1.04	r'' = 4.81
τ' = — 0,34	N' = 107514/5	t'_m = 1,439597.41	τ'' = — 0,34	N'' = 110224/5	t''_m = 1,439593.48

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439595.44$$

Esperienza 6ª.

(dal 17 al 20 Dicembre 1883).

Palla piccola d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 757{,}6$	$\theta_{f_0} = 15{,}03$	$\theta_{p_0} = 15{,}01$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08499$
	$\theta_{f_1} = 15{,}037$	$\theta_{p_1} = 15{,}015$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0644205$
$f =$	$\theta_f = 15{,}032$	$\theta_p = 15{,}012$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999496$

Elementi	l	m	u	s
I	3,79	0,039	0,047	1,895
II	0,15	0,054	0,000	3,865
III	0,425	0,466	0,012	4,152
IV	99,668	0,439	363,574	54,199
V	0,495	0,591	0,019	104,280
VI	0,468	0,511	0,014	109,213
VII	4,4514	484,761	960,545	106,754

$I' = 52\overset{\mu}{,}24$

$I'' = 41{,}52$

$\delta_0 = 30{,}54$

$\delta_1 = 26{,}91$

$\delta = 28{,}73$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + 41\overset{\mu}{,}96 \\ \text{a } 14^\circ{,}987 \end{cases}$

$C = +\overset{cm}{0{,}00315}$

$O' = \overset{h\ m\ s}{5.26.57}$	$e'_0 = 13{,}43$	$t'_s = 1{,}039526.71$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{5.27.19}$	$e''_0 = 13{,}84$	$t''_s = 1{,}039524\ 98$
$T' = 25394{,}65$	$e'_1 = 1{,}00$	$r' = 3.20$	$T'' = 26129{,}34$	$e''_1 = 1{,}03$	$r'' = 3.38$
$\tau' = -0{,}26$	$N' = \frac{122144}{5}$	$t'_m = 1{,}036685.15$	$\tau'' = -0{,}26$	$N'' = \frac{125678}{5}$	$t''_m = 1{,}036683.24$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}036684.19$$

Esperienza 6ª.

(dal 17 al 20 Dicembre 1883).

Palla piccola d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 757,3	$\theta_{f_0} = 14,995$	$\theta_{p_0} = 14,97$	$\log \varrho = \bar{3},08481$
	$\theta_{f_1} = 14,98$	$\theta_{p_1} = 14,95$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0643082$
$f =$	$\theta_f = 14,987$	$\theta_p = 14,96$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999496$

Elementi	l	m	u	s
I	3,64	0,038	0,042	1,820
II	0,15	0,054	0,000	3,715
III	0,428	0,475	0,013	4,004
IV	199,813	0,873	2903,230	104,124
V	0,498	0,599	0,019	204,280
VI	0,468	0,511	0,014	209,214
VII	4,4514	484,761	960,545	206,755

$I' = 51{,}67$ μ

$I'' = 41,69$

$\delta_0 = 48,40$

$\delta_1 = 47,68$

$\delta = 48,04$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + 42{,}33 \ \mu \\ a\ 14^\circ,99 \end{cases}$

$C = + 0{,}05906$ cm

1ª Esperienza elementare

$O' = 3.43.36$ (h m s)	$e'_0 = 12,05$	$t'_s = 1,446580.91$	$O'' = 8.49.45$ (h m s)	$e''_0 = 12,61$	$t''_s = 1,446581.30$
$T' = 15934,54$	$e'_1 = 1,70$	$r' = 4.69$	$T'' = 15996,46$	$e''_1 = 1,66$	$r'' = 4.97$
$\tau' = -0,16$	$N' = \frac{55076}{5}$	$t'_m = 1,442626.43$	$\tau'' = -0,16$	$N'' = \frac{55290}{5}$	$t''_m = 1,442626.54$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442626.48$$

2ª Esperienza elementare

$O' = 8.47.30$ (h m s)	$e'_0 = 10,59$	$t'_s = 1,446580.85$	$O'' = 8.48.01$ (h m s)	$e''_0 = 11,21$	$t''_s = 1,446582.56$
$T' = 16586,67$	$e'_1 = 1,22$	$r' = 3.29$	$T'' = 17579,62$	$e''_1 = 1,30$	$r'' = 3.64$
$\tau' = -0,17$	$N' = \frac{57330}{5}$	$t'_m = 1,442627.77$	$\tau'' = -0,17$	$N'' = \frac{60762}{5}$	$t''_m = 1,442629.12$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442628.44$$

Esperienza 7ª.

(dal 20 al 23 Gennaio 1884).

Palla piccola d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 767,6	$\theta_{f_0} = 15{,}075$	$\theta_{p_0} = 15{,}07$	$\log \rho = \bar{3},09071$
	$\theta_{f_1} = 15{,}055$	$\theta_{p_1} = 15{,}04$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0701487$
f = 8,32	$\theta_f = 15{,}065$	$\theta_p = 15{,}055$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999490$

Elementi	l	m	u	s	
					$I' = 64{,}49$ μ
I	3,82	0,040	0,048	1,910	$I'' = 43{,}03$
II	0,15	0,054	0,000	3,895	$\delta_0 = 51{,}36$
III	0,427	0,467	0,012	4,183	$\delta_1 = 48{,}63$
IV	99,636	0,439	363,340	54,215	
V	0,493	0,591	0,018	104,279	$\delta = 49{,}99$
VI	0,468	0,511	0,014	109,211	L = 100 *cm.* + 45,61 μ
VII	4,4514	484,761	960,545	106,752	a 15°,00

C = + 0,00310 cm

$O' = 9^h.52^m.46^s$	$e'_0 = 9{,}49$	$t'_s = 1{,}039555.83$	$O'' = 9^h.46^m.07^s$	$e''_0 = 10{,}13$	$t''_s = 1{,}039551.86$
$T' = 21574{,}30$	$e'_1 = 0{,}96$	$r' = 1.86$	$T'' = 21550{,}10$	$e''_1 = 0{,}94$	$r'' = 2.01$
$\tau' = -0{,}19$	$N' = \frac{103766}{5}$	$t'_m = 1{,}036715.53$	$\tau'' = -0{,}19$	$N'' = \frac{103650}{5}$	$t''_m = 1{,}036711.42$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}036713.47$$

Pendolo lungo

B = 768,5	$\theta_{f_0} = 15.047$	$\theta_{p_0} = 14{,}98$	$\log \rho = \bar{3},09122$
	$\theta_{f_1} = 15{,}043$	$\theta_{p_1} = 14{,}98$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0707765$
f = 8,22	$\theta_f = 15{,}045$	$\theta_p = 14{,}98$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999489$

Elementi	l	m	u	s	
					$I' = 64{,}29$ μ
I	3,65	0,038	0,042	1,825	$I'' = 42{,}84$
II	0,15	0,054	0,000	3,725	$\delta_0 = 55{,}45$
III	0,430	0,475	0.013	4,015	$\delta_1 = 54{,}24$
IV	199,802	0,873	2902,910	104,131	
V	0,496	0,599	0,019	204,280	$\delta = 54{,}84$
VI	0,468	0,511	0,014	209,213	L = 100 *cm.* + 46,81 μ
VII	4,4514	484,761	960,545	206,754	a 15°,00

C = + 0,05907 cm

$O' = 10^h.54^m.00^s$	$e'_0 = 11{,}62$	$t'_s = 1{,}446608.39$	$O'' = 11^h.01^m.09^s$	$e''_0 = 11{,}19$	$t''_s = 1{,}446601.19$
$T' = 18601{,}80$	$e'_1 = 1{,}13$	$r' = 3.72$	$T'' = 18501{,}02$	$e''_1 = 1{,}08$	$r'' = 3.45$
$\tau' = -0{,}15$	$N' = \frac{64294}{5}$	$t'_m = 1{,}442654.80$	$\tau'' = -0{,}15$	$N'' = \frac{63946}{5}$	$t''_m = 1{,}442647.89$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442651.34$$

Esperienza 8ª.

(dal 24 al 27 Gennaio 1884).

Palla piccola d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 755,6$	$\theta_{f_0} = 15,08$	$\theta_{p_0} = 15,07$	$\log \varrho = \bar{3},08383$
	$\theta_{f_1} = 15,08$	$\theta_{p_1} = 15,07$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},3384565$
$f = 8,45$	$\theta_f = 15,08$	$\theta_p = 15,07$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999052$

Elementi	l	m	u	s
I	3,88	0,040	0,050	1,940
II	0,15	0,054	0,000	3,955
III	0,427	0,467	0,012	4,243
IV	99,587	0,439	362,983	54,250
V	0,493	0,542	0,017	104,290
VI	0,468	0,462	0,013	109,213
VII	4.4424	249,964	627,328	106,758

$I' = \overset{\mu}{63,78}$

$I'' = 42,90$

$\delta_0 = 24,24$

$\delta_1 = 25,44$

$\delta = 24,84$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{46,73} \\ a\ 15°,00 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0,01880}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.48.39}$	$e'_0 = 8,77$	$t'_s = 1,039713.26$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.55.41}$	$e''_0 = 8,10$	$t''_s = 1,039717.57$
$T' = 10791,10$	$e'_1 = 1,01$	$r' = 1.61$	$T'' = 10683,43$	$e''_1 = 0,92$	$r'' = 1.38$
$\tau' = -0,12$	$N' = \frac{51894}{5}$	$t'_m = 1,036872.78$	$\tau'' = -0,12$	$N'' = \frac{51376}{5}$	$t''_m = 1,036877.31$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036875.04$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{12.14.45}$	$e'_0 = 8,17$	$t'_s = 1,039716.60$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.08.29}$	$e''_0 = 8,38$	$t''_s = 1,039717.57$
$T' = 11145,89$	$e'_1 = 0,79$	$r' = 1.34$	$T'' = 11073,54$	$e''_1 = 0,86$	$r'' = 1.44$
$\tau' = -0,13$	$N' = \frac{53600}{5}$	$t'_m = 1,036876.38$	$\tau'' = -0,13$	$N'' = \frac{53252}{5}$	$t''_m = 1,036877.25$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036876.81$$

Esperienza 8ª.

(dal 24 al 27 Gennaio 1884).

Palla piccola d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 759,5	$\theta_{f_0} = 15{,}033$	$\theta_{p_0} = 14{,}96$	$\log \varrho = \bar{3},08608$
	$\theta_{f_1} = 15{,}027$	$\theta_{p_1} = 14{,}96$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},3396502$
f = 8,51	$\theta_f = 15{,}030$	$\theta_p = 14{,}96$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999049$

Elementi	l	m	u	s	
I	3,78	0,039	0,046	1,890	I′ = 64,01 μ
II	0,15	0,054	0,000	3,855	I″ = 42,95
III	0,430	0,475	0,013	4,145	δ_0 = 52,20
IV	199,681	0,873	2899,397	104,201	δ_1 = 50,22
V	0,496	0,550	0,017	204,289	δ = 51,21
VI	0,468	0,462	0,013	209,213	L = { 100 *cm.* + 46,25 μ
VII	4,4424	249,964	627,328	206,758	{ a 15°,00

C = + 0,12104 cm

1ª Esperienza elementare

O′ = 4.37.36 (h m s)	e'_0 = 8,39	t'_s = 1,446624.04	O″ = 4.38.49 (h m s)	e''_0 = 9,33	t''_s = 1,446629.70
T′ = 10519,97	e'_1 = 0,71	r' = 1.83	T″ = 11530,92	e''_1 = 0,62	r'' = 2.06
τ' = − 0,12	N′ = 36360/5	t'_m = 1,442672.30	τ'' = − 0,12	N″ = 39854/5	t''_m = 1,442677.71

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442675.00$$

2ª Esperienza elementare

O′ = 8.37 01 (h m s)	e'_0 = 8,66	t'_s = 1,446634.97	O″ = 8.36.33 (h m s)	e''_0 = 6,84	t_s'' = 1,446630.26
T′ = 10679,75	e'_1 = 0,77	r' = 2,00	T″ = 9695,43	e''_1 = 0,85	r'' = 1.48
τ' = − 0,11	N′ = 36912/5	t'_m = 1,442683.03	τ'' = − 0,11	N″ = 33510/5	t''_m = 1,442678.90

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442680.96$$

3ª Esperienza elementare

O′ = 11.50.59 (h m s)	e'_0 = 7,70	t'_s = 1,446626.61	O″ = 11.42.53 (h m s)	e''_0 = 8,50	t''_s = 1,446624.22
T′ = 10064,04	e'_1 = 0,76	r' = 1,64	T″ = 9973,72	e''_1 = 0,84	r'' = 2.00
τ' = − 0,11	N′ = 34784/5	t'_m = 1,442675.05	τ'' = − 0,11	N″ = 34472/5	t''_m = 1,442672.31

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442673.68$$

Esperienza 9ª.

(dal 28 al 30 Gennaio 1884).

Palla piccola di platino — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 763,9	$\theta_{f_0} = 15{,}075$	$\theta_{p_0} = 15{,}06$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08861$
	$\theta_{f_1} = 15{,}09$	$\theta_{p_1} = 15{,}08$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5}{,}7571682$
f = 8,70	$\theta_f = 15{,}082$	$\theta_p = 15{,}07$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999752$

Elementi	l	m	u	s
I	3,76	0,039	0,046	1,880
II	0,15	0,054	0,000	3,835
III	0,427	0,467	0,012	4,123
IV	99,698	0,439	363,793	54,186
V	0,493	0,844	0,026	104,281
VI	0,468	0,764	0,022	109,213
VII	4,4508	994,286	1969,737	106,753

$I' = 64{,}01$ μ
$I'' = 42{,}95$
$\delta_0 = 33{,}12$
$\delta_1 = 31{,}21$
$\delta = 32{,}17$
L = { 100 *cm.* + 46,25 μ; a 15°,80 }

$C = -0{,}00806$ cm

O′ = 10.35.00 (h m s)	$e'_0 = 7{,}75$	$t'_s = 1{,}039716.02$	O″ = 10.45.33 (h m s)	$e''_0 = 8{,}43$	$t''_s = 1{,}039718.65$
T′ = 22355,39	$e'_1 = 2{,}46$	$r' = 2.20$	T″ = 22993,84	$e''_1 = 2{,}41$	$r'' = 2.43$
$\tau' = -0{,}25$	$N' = \frac{107506}{5}$	$t'_m = 1{,}036874.94$	$\tau'' = -0{,}25$	$N'' = \frac{110576}{5}$	$t''_m = 1.036877.34$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}036876.14$$

Pendolo lungo

B = 758,5	$\theta_{f_0} = 15{,}017$	$\theta_{p_0} = 14{,}96$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08550$
	$\theta_{f_1} = 14{,}998$	$\theta_{p_1} = 14{,}945$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5}{,}7542719$
f = 8,70	$\theta_f = 15{,}007$	$\theta_p = 14{,}952$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999753$

Elementi	l	m	u	s
I	3,49	0,036	0,037	1,745
II	0,15	0,054	0,000	3,565
III	0,430	0,475	0,013	3,855
IV	199,963	0,873	2907,590	104,052
V	0,496	0,853	0,027	204,281
VI	0,468	0,764	0,022	209,214
VII	4,4508	994,286	1969,737	206,754

$I' = 64{,}33$ μ
$I'' = 42{,}09$
$\delta_0 = 46{,}99$
$\delta_1 = 44{,}19$
$\delta = 45{,}59$
L = { 100 *cm.* + 49,37 μ; a 15°,00 }

$C = -+ 0{,}02380$ cm

O′ = 10.31.09 (h m s)	$e'_0 = 7{,}66$	$t'_s = 1{,}446760.99$	O″ = 10.20.27 (h m s)	$e''_0 = 8{,}34$	$t''_s = 1{,}446758.24$
T′ = 21392,04	$e'_1 = 1{,}95$	$r' = 2.58$	T″ = 21022,21	$e''_1 = 2{,}05$	$r'' = 3.02$
$\tau' = -0{,}23$	$N' = \frac{73930}{5}$	$t'_m = 1{,}442808.13$	$\tau'' = -0{,}23$	$N'' = \frac{72652}{5}$	$t''_m = 1{,}442804.94$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}442806.53$$

Esperienza 10ª.

(dal 5 all'8 Febbraio 1884).

Palla grossa d'ottone piena — *Sospensione inferiore.*

Pendolo corto

B = 765,5 f = 8,70

$\theta_{f_0} = 15,07$ $\theta_{f_1} = 15,075$ $\theta_f = 15,072$

$\theta_{p_0} = 15,06$ $\theta_{p_1} = 15,07$ $\theta_p = 15,065$

$\log \varrho = \bar{3},08591$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},16677$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999363$

Elementi	l	m	n	s
I	3,79	0,039	0,047	1,895
II	0,15	0.054	0,000	3,865
III	0.430	0,484	0.013	4,155
IV	97.741	0.428	341,053	53.240
V	0.497	0,560	0,018	102,359
VI	0.468	0,462	0,013	109,214
VII	6,3722	1133.945	4604,286	105,794

$I' = \overset{\mu}{65,18}$

$I'' = 41,15$

$\delta_0 = 16,48$

$\delta_1 = 15,35$

$\delta = 15,91$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{53,46} \\ a\ 14°,995 \end{cases}$

$C = -\overset{cm}{0,02944}$

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.13.27}$	$e'_0 = 10,13$	$t'_s = 1,035209.58$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.23.00}$	$e''_0 = 9,28$	$t''_s = 1,035209.58$
$T' = 21921,41$	$e'_1 = 2.01$	$r' = 4.10$	$T'' = 21744,39$	$e''_1 = 1,95$	$r'' = 2.49$
$\tau' = -0,23$	$N' = \frac{105878}{5}$	$t'_m = 1,032378.91$	$\tau'' = -0,23$	$N'' = \frac{105023}{5}$	$t''_m = 1,032380.47$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032379.69$$

Pendolo lungo

B = 763,9 f = 8,57

$\theta_{f_0} = 15,033$ $\theta_{f_1} = 15,003$ $\theta_f = 15,018$

$\theta_{p_0} = 14,97$ $\theta_{f_1} = 19,95$ $\theta_p = 14,96$

$\log \varrho = \bar{3},08860$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},16586$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999364$

Elementi	l	m	n	s
I	3,54	0,034	0,038	1,770
II	0,15	0,054	0,000	3,615
III	0,429	0,484	0,013	3,904
IV	197,990	0,868	2835,144	103,114
V	0,499	0,559	0,018	202,358
VI	0,468	0,462	0,013	209,214
VII	6,3722	1133,946	4604,286	205,794

$I' = \overset{\mu}{65,07}$

$I'' = 46,24$

$\delta_0 = 49,88$

$\delta_1 = 47,62$

$\delta = 48,75$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{51,32} \\ a\ 14°,995 \end{cases}$

$C = +\overset{cm}{0,00948}$

$O' = \overset{h\ m\ s}{9.34.27}$	$e'_0 = 8,43$	$t'_s = 1,443531.20$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{9.44.00}$	$e''_0 = 7,62$	$t''_s = 1,443535.69$
$T' = 25593,54$	$e'_1 = 1,29$	$r' = 2.39$	$T'' = 25657.95$	$e''_1 = 1,29$	$r'' = 2.05$
$\tau' = -0,26$	$N' = \frac{88648}{5}$	$t'_m = 1,439590.34$	$\tau'' = -0,26$	$N'' = \frac{88871}{5}$	$t''_m = 1,439592.16$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439591.25$$

Esperienza 11ª.

(dall'8 all'11 Febbraio 1884).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 760,7$	$\theta_{f_0} = 15.065$	$\theta_{p_0} = 15,06$	$\log \varrho = \bar{3},08677$
	$\theta_{f_1} = 15,070$	$\theta_{p_1} = 15,06$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},4225898$
$f = 8,6$	$\theta_f = 15,068$	$\theta_p = 15,06$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9998850$

Elementi	l	m	u	s
I	3,93	0,401	0,052	1,965
II	0,15	0,054	0,000	4,005
III	0,430	0,484	0,013	4,295
IV	97,629	0,428	340,272	53,324
V	0,497	0,560	0,018	102,387
VI	0,468	0,462	0,013	109.214
VII	6,3444	599,644	3251,134	105,808

$I' = \overset{\mu}{65},07$

$I'' = 46,24$

$\delta_0 = 18,09$

$\delta_1 = 14,80$

$\delta = 16,44$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 51,\overset{\mu}{3}\ 2 \\ a\ 14°,995 \end{cases}$

$C = -\overset{cm}{0},03415$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{7.37.13}$	$e'_0 = 8,82$	$t'_s = 1,035431.72$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{7.31.06}$	$e''_0 = 9,51$	$t''_s = 1,035435.01$
$T' = 16275,49$	$e'_1 = 0,92$	$r' = 1.55$	$T'' = 16247,78$	$e''_1 = 0,86$	$r'' = 1.76$
$\tau' = -0,15$	$N' = \frac{78592}{5}$	$t'_m = 1,032602.99$	$\tau'' = -0,15$	$N'' = \frac{78458}{5}$	$t''_m = 1,032606.06$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032604.52$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{12.12.08}$	$e'_0 = 9,09$	$t'_s = 1,035436.67$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.19.33}$	$e''_0 = 9,31$	$t''_s = 1,035439.24$
$T' = 14706,22$	$e'_1 = 1,18$	$r' = 1.83$	$T'' = 14792.61$	$e''_1 = 1,28$	$r'' = 1.97$
$\tau' = -0,12$	$N' = \frac{71014}{5}$	$t'_m = 1,032607.65$	$\tau'' = -0,12$	$N'' = \frac{71431}{5}$	$t''_m = 1,032610.07$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032608.86$$

Esperienza 11ª.

(Dall'8 all'11 Febbraio 1884).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 758,5	$\theta_{f_0} = 15{,}003$	$\theta_{p_0} = 14{,}94$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08550$
	$\theta_{f_1} = 15{,}04$	$\theta_{p_1} = 14{,}98$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}4217684$
f = 8,6	$\theta_f = 15{,}022$	$\theta_p = 14{,}96$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9998852$

Elementi	l	m	u	s	
I	3,75	0,039	0,045	1,875	$l' = \overset{\mu}{64{,}96}$
II	0,15	0,054	0,000	3,825	$l'' = 46{,}50$
III	0,429	0,484	0,013	4,114	$\delta_0 = 49{,}92$
IV	197,808	0,868	2829,933	103,233	$\delta_1 = 47{,}15$
V	0,499	0,559	0,018	202.386	$\delta = 48{,}54$
VI	0,468	0,462	0,013	209,214	L = { 100 cm. + $\overset{\mu}{51{,}46}$
VII	6,3444	599,644	3251,131	205,808	{ a 15°,004

$$C = -\overset{cm}{0{,}02911}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{6.27.01}$	$e'_0 = 8{,}07$	$t'_s = 1{,}443700.02$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{6.35.25}$	$e''_0 = 6{,}10$	$t''_s = 1{,}443700.84$
$T' = 16349{,}78$	$e'_1 = 0{,}84$	$r' = 1.85$	$T'' = 16166{,}73$	$e''_1 = 0{,}80$	$r'' = 1.16$
$\tau' = -0{,}17$	$N' = \frac{56624}{5}$	$t'_m = 1{,}439756\ 24$	$\tau'' = -0{,}17$	$N'' = \frac{55990}{5}$	$t''_m = 1{,}439757.95$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439757.10$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.42.22}$	$e'_0 = 8{,}82$	$t'_s = 1{,}443706.43$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11\ 49.46}$	$e''_0 = 8{,}42$	$t''_s = 1{,}443700.71$
$T' = 16301{,}34$	$e'_1 = 0{,}93$	$r' = 2.21$	$T'' = 16342{,}85$	$e''_1 = 0{,}80$	$r'' = 1.93$
$\tau' = -0{,}16$	$N' = \frac{56456}{5}$	$t'_m = 1{,}439762.28$	$\tau'' = -0{,}16$	$N'' = \frac{56600}{5}$	$t''_m = 1{,}439756.85$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439759.56$$

Esperienza 12ª.

(dall'11 al 15 Febbraio 1884).

Palla piccola d'ottone piena *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 765{,}4$

$f = 8{,}70$

$\theta_{f_0} = 15{,}065$ | $\theta_{p_0} = 15{,}06$

$\theta_{f_1} = 15{,}065$ | $\theta_{p_1} = 15{,}06$

$\theta_f = 15{,}065$ | $\theta_p = 15{,}06$

$\log \varrho = \bar{3}{,}08945$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}16575$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999364$

Elementi	l	m	u	s
I	3,91	0,040	0,051	1,955
II	0,15	0,054	0,000	3,985
III	0,427	0,467	0,012	4,273
IV	99,552	0,439	362,728	54,263
V	0,493	0,542	0,017	104,285
VI	0,468	0,462	0,013	109,214
VII	4,4484	386,660	765,153	106,756

$I' = \overset{\mu}{64{,}96}$

$I'' = 46{,}50$

$\delta_0 = 19{,}45$

$\delta_1 = 16{,}73$

$\delta = 18{,}09$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + \overset{\mu}{51{,}46} \\ a\ 15°{,}004 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0{,}00889}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{7.42.13}$	$e'_0 = 10{,}43$	$t'_s = 1{,}039762.17$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{7.37.29}$	$e''_0 = 11{,}08$	$t''_s = 1{,}039764.21$
$T' = 16359{,}79$	$e'_1 = 1{,}34$	$r' = 2.42$	$T'' = 16378{,}12$	$e''_1 = 1{,}30$	$r'' = 2.63$
$\tau' = -0{,}17$	$N' = \frac{78670}{5}$	$t'_m = 1{,}036920.75$	$\tau'' = -0{,}17$	$N'' = \frac{78758}{5}$	$t''_m = 1{,}036922.57$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}036921{,}66$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{12.22.01}$	$e'_0 = 6{,}70$	$t'_s = 1{,}039767.13$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.29.28}$	$e''_0 = 6{,}42$	$t''_s = 1{,}039763.37$
$T' = 15940{,}21$	$e'_1 = 0{,}85$	$r' = 0.99$	$T'' = 15950{,}55$	$e''_1 = 0{,}81$	$r'' = 0.91$
$\tau' = -0{,}16$	$N' = \frac{76652}{5}$	$t'_m = 1{,}036927.12$	$\tau'' = -0{,}16$	$N'' = \frac{76702}{5}$	$t''_m = 1{,}036923.46$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}036925.29$$

Esperienza 12ª.

(dall'11 al 15 Febbraio 1884).

Palla piccola d'ottone piena — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 763,1	$\theta_{f_0} = 15,02$	$\theta_{p_0} = 14,95$	$\log \varrho = \bar{3},08814$
$f =$ 8,76	$\theta_{f_1} = 15,013$	$\theta_{p_1} = 14,96$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},16444$
	$\theta_f = 15,017$	$\theta_p = 14,955$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999366$

Elementi	l	m	u	s	
I	3,76	0,039	0,046	1,880	$I' = 61^{\mu},73$
II	0.15	0,054	0,000	3.835	$I'' = 46,69$
III	0,430	0,475	0,013	4,125	$\delta_0 = 52,26$
IV	199,696	0,873	2899,832	104,188	$\delta_1 = 48,32$
V	0,496	0,550	0,017	204,284	$\delta = 50,29$
VI	0,468	0,462	0,013	209,214	L = { 100 *cm.* + $51^{\mu},28$
VII	4.4484	386,660	765,153	206,756	a 15°,007 }

$$C = + 0^{cm},07666$$

1ª Esperienza elementare

$O' = 7^h.34^m.02^s$	$e'_0 = 10,15$	$t'_s = 1,446717.86$	$O'' = 7^h.41^m.26^s$	$e''_0 = 9,81$	$t''_s = 1,446716.38$
$T' = 15826,09$	$e'_1 = 1,03$	$r' = 2.89$	$T'' = 15946,73$	$e''_1 = 0,99$	$r'' = 2.69$
$\tau' = -0,15$	$N' = \frac{54696}{5}$	$t'_m = 1,442764.80$	$\tau'' = -0,15$	$N'' = \frac{55113}{5}$	$t''_m = 1,442762.53$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442763.66$$

2ª Esperienza elementare

$O' = 12^h.34^m.30^s$	$e'_0 = 7,38$	$t'_s = 1,446716.92$	$O'' = 12^h.27^m.15^s$	$e''_0 = 7,82$	$t''_s = 1,446716.88$
$T' = 16256,04$	$e'_1 = 0,80$	$r' = 1.56$	$T'' = 16247,94$	$e''_1 = 0,86$	$r'' = 1.77$
$\tau' = -0,15$	$N' = \frac{56182}{5}$	$t'_m = 1,442765.20$	$\tau'' = -0,15$	$N'' = \frac{56154}{5}$	$t''_m = 1.443764.95$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442765.07$$

Esperienza 13ª.

(dal 15 al 18 Marzo 1884).

Palla grossa di alluminio — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 764{,}1$	$\theta_{f_0} = 15{,}065$	$\theta_{p_0} = 15{,}06$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08871$
	$\theta_{f_1} = 15{,}065$	$\theta_{p_1} = 15{,}07$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}6652150$
$f = 8{,}86$	$\theta_f = 15{,}065$	$\theta_p = 15{,}065$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9997988$

Elementi	l	m	u	s
I	3,88	0,040	0,050	1,940
II	0,15	0,054	0,000	3,955
III	0,430	0,484	0,013	4,245
IV	97,649	0,428	340,411	53,284
V	0,497	0,428	0,014	102,357
VI	0,468	0,330	0,009	109,213
VII	6,3732	358,163	1453,213	105,792

$I' = \overset{\mu}{63{,}75}$

$I'' = 45{,}57$

$\delta_0 = 64{,}39$

$\delta_1 = 60{,}33$

$\delta = 62{,}36$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{54{,}91} \\ a\ 14^\circ{,}996 \end{cases}$

$$C = -\overset{cm}{0{,}00906}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.16.41}$	$e'_0 = 8{,}66$	$t'_s = 1{,}035363.51$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.10.51}$	$e''_0 = 7{,}94$	$t''_s = 1{,}035362.57$
$T' = 10225{,}34$	$e'_1 = 0{,}83$	$r' = 1.46$	$T'' = 10240{,}24$	$e''_1 = 0{,}76$	$r'' = 1.22$
$\tau' = -0{,}09$	$N' = \frac{49380}{5}$	$t'_m = 1{,}032535.06$	$\tau'' = -0{,}09$	$N'' = \frac{49452}{5}$	$t''_s = 1{,}035534.36$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}032534.71$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{14.32.12}$	$e'_0 = 8{,}80$	$t'_s = 1{,}035365.57$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{14.25.23}$	$e''_0 = 9{,}68$	$t''_m = 1{,}035367.11$
$T' = 10666{,}02$	$e'_1 = 0{,}83$	$r' = 1.50$	$T'' = 10621{,}31$	$e''_1 = 0{,}87$	$r'' = 1.79$
$\tau' = -0{,}10$	$N' = \frac{51508}{5}$	$t'_m = 1{,}032537.07$	$\tau'' = -0{,}10$	$N'' = \frac{51292}{5}$	$t''_m = 1{,}032538.32$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}032537.69$$

Esperienza 13ª.

(dal 15 al 18 Marzo 1884).

Palla grossa di alluminio — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 765,2	$\theta_{f_0} = 15{,}013$	$\theta_{p_0} = 14{,}95$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08934$
	$\theta_{f_0} = 15{,}000$	$\theta_{p_1} = 14{,}95$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}6654966$
f = 9,02	$\theta_f = 15.007$	$\theta_p = 14{,}95$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9997985$

Elementi	l	m	u	s
I	3,76	0,039	0,046	1,880
II	0,15	0,054	0,000	3,835
III	0,431	0,483	0,013	4,124
IV	197,769	0,868	2828,818	103,223
V	0,497	0,427	0,014	202,355
VI	0,468	0,330	0,009	209,211
VII	6,3732	358,163	1453,213	205,791

$I' = \overset{\mu}{65{,}18}$

$I'' = 45{,}52$

$\delta_0 = 64{,}39$

$\delta_1 = 60{,}33$

$\delta = 62{,}36$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{58{,}07} \\ a\ 14°{,}99 \end{cases}$

$$C = + \overset{cm}{0{,}07327}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{9.28.13}$	$e'_0 = 8{,}09$	$t'_s = 1{,}443705.92$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{9.20.06}$	$e''_0 = 9{,}18$	$t''_s = 1{,}443703.36$
$T' = 10185{,}75$	$e'_1 = 0{,}82$	$r' = 1.83$	$T'' = 10092{,}18$	$e''_1 = 0{,}93$	$r'' = 2.35$
$\iota' = -0{,}12$	$N' = \frac{35276}{5}$	$t'_m = 1{,}439762.15$	$\iota'' = -0{,}12$	$N'' = \frac{34952}{5}$	$t''_m = 1{,}439759.07$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439760.61$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{12.35.06}$	$e'_0 = 8{,}15$	$t'_s = 1{,}443710.80$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.43.04}$	$e''_0 = 7{,}64$	$t''_s = 1{,}443703.98$
$T' = 10201{,}96$	$e'_1 = 0{,}89$	$r' = 1.92$	$T'' = 10179{,}39$	$e''_1 = 0{,}82$	$r'' = 1.67$
$\iota' = -0{,}12$	$N' = \frac{35332}{5}$	$t'_m = 1{,}439766.92$	$\iota'' = -0{,}12$	$N'' = \frac{35254}{5}$	$t''_m = 1{,}439760.37$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439763.64$$

3ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{3.50.14}$	$e'_0 = 7{,}32$	$t'_s = 1{,}443702.49$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{3.42.33}$	$e''_0 = 8{,}10$	$t''_s = 1{,}443705.87$
$T' = 10149{,}93$	$e'_1 = 0{,}74$	$r' = 1.50$	$T'' = 10011{,}35$	$e''_1 = 0{,}84$	$r'' = 1.85$
$\iota' = -0{,}12$	$N' = \frac{35152}{5}$	$t'_m = 1{,}439759.06$	$\iota'' = -0{,}12$	$N'' = \frac{34672}{5}$	$t''_m = 1{,}439762.08$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439760.57$$

Esperienza 14ª.

(dal 18 al 22 Marzo 1884).

Palla grossa di alluminio — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 761,9$	$\theta_{f_0} = 15,035$	$\theta_{p_0} = 15,04$	$\log \varrho = \bar{3},08746$
	$\theta_{f_1} = 15,045$	$\theta_{p_0} = 15,05$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},6639646$
$f = 9,02$	$\theta_f = 15,04$	$\theta_p = 15,045$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9997993$

Elementi	l	m	u	s
I	3,88	0,040	0,050	1,940
II	0,15	0,054	0,000	3,955
III	0,429	0,484	0,013	4,245
IV	97,649	0,428	340,411	53,284
V	0,498	0,427	0,014	102,357
VI	0,468	0,330	0,009	109,213
VII	6,3732	358,163	1453,213	105,793

$l' = \overset{\mu}{65,18}$

$l'' = 45,52$

$\delta_0 = 36,05$

$\delta_1 = 32,60$

$\delta = 34,32$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{58,07} \\ \text{a } 14°,99 \end{cases}$

$$C = -\overset{cm}{0,00906}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.34.44}$	$e'_0 = 7,56$	$t'_s = 1,035276.08$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.29.25}$	$e''_0 = 8,17$	$t''_s = 1,035272.78$
$T' = 10912,35$	$e'_1 = 0,61$	$r' = 1.04$	$T'' = 10915,22$	$e''_1 = 0,68$	$r'' = 1.22$
$\tau' = -0,13$	$N' = \frac{52702}{5}$	$t'_m = 1,032448\ 29$	$\tau'' = -0,13$	$N'' = \frac{52716}{5}$	$t''_m = 1,032444.82$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032446.55$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{14.46.45}$	$e'_0 = 10,23$	$t'_s = 1,0`5273.21$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{14.55.28}$	$e''_0 = 9,24$	$t''_s = 1,035271.05$
$T' = 11171,15$	$e'_1 = 0,81$	$r' = 1.90$	$T'' = 11328,90$	$e''_1 = 0,72$	$r'' = 1.55$
$\tau' = -0,14$	$N' = \frac{53952}{5}$	$t'_m = 1,032444.57$	$\tau'' = -0,14$	$N'' = \frac{54714}{5}$	$t''_m = 1,032442.76$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032443.66$$

Esperienza 14ª.

(dal 18 al 22 Marzo 1884).

Palla grossa di alluminio *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 754,8	$\theta_{f_0} = 15,003$	$\theta_{p_0} = 14,95$	$\log \varrho = \bar{3},08337$
	$\theta_{f_1} = 14,993$	$\theta_{p_1} = 14,95$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},6595169$
f = 9,02	$\theta_f = 14,998$	$\theta_p = 14,95$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9998013$

Elementi	l	m	u	s
I	3,75	0,039	0,045	1,875
II	0,15	0,054	0,000	3,825
III	0,429	0,484	0,013	4,114
IV	197,779	0,868	2829,104	103,218
V	0,499	0,427	0,014	202,357
VI	0,468	0,330	0,009	209,214
VII	6,3732	358,163	1453,213	205,794

$I' = \overset{\mu}{65,25}$

$I'' = 45,51$

$\delta_0 = 55,67$

$\delta_1 = 51,45$

$\delta = 53,56$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{55,89} \\ a\ 14°,994 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0,07326}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{9.36.30}$	$e'_0 = 6,94$	$t'_s = 1,443646.09$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{9.28.11}$	$e''_0 = 6,73$	$t''_s = 1,443641.31$
$T' = 9287,37$	$e'_1 = 0,93$	$r' = 1.52$	$T'' = 9278,10$	$e''_1 = 1,01$	$r'' = 1.51$
$\tau' = -0,11$	$N' = \frac{32166}{5}$	$t'_m = 1,439702.79$	$\tau'' = -0,11$	$N'' = \frac{32134}{5}$	$t''_m = 1,439698.03$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439700.41$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{12.21.13}$	$e'_0 = 9,33$	$t'_s = 1,443643.15$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.28.35}$	$e''_0 = 8,43$	$t''_s = 1,443635.54$
$T' = 8977,85$	$e'_1 = 1,19$	$r' = 2,70$	$T'' = 8904,46$	$e''_1 = 1,09$	$r'' = 2.20$
$\tau' = -0,12$	$N' = \frac{31094}{5}$	$t'_m = 1,439698.68$	$\tau'' = -0,12$	$N'' = \frac{30840}{5}$	$t''_m = 1,439691.59$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439695.13$$

3ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{3.32.14}$	$e'_0 = 6,04$	$t'_s = 1,443633.78$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{3.31.49}$	$e''_0 = 7,54$	$t''_s = 1,443638.56$
$T' = 9850,33$	$e'_1 = 0,79$	$r' = 1,09$	$T'' = 10872,19$	$e''_1 = 0,90$	$r'' = 1.70$
$\tau' = -0,13$	$N' = \frac{34116}{5}$	$t'_m = 1,439691.94$	$\tau'' = -0,15$	$N'' = \frac{37655}{5}$	$t''_m = 1,439695.10$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439693.52$$

Esperienza 15ª.

(dal 23 al 26 Marzo 1884).

Palla grossa di piombo-antimonio — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 749,8 — f = 8,83

$\theta_{f_0} = 15{,}005$ | $\theta_{p_0} = 15{,}01$
$\theta_{f_1} = 15{,}03$ | $\theta_{p_1} = 15{,}04$
$\theta_f = 15{,}017$ | $\theta_p = 15{,}025$

$\log \varrho = \bar{3}{,}08047$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0647574$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999496$

Elementi	l	m	u	s
I	3,72	0,038	0,044	1,860
II	0,15	0,054	0,000	3,795
III	0,429	0,484	0,013	4,085
IV	97,809	0,428	341,528	53,204
V	0,498	0,605	0,019	102,357
VI	0,468	0,507	0,014	109,215
VII	6,3748	1406,816	5716,862	105,793

I′ = 65,31 μ
I″ = 45,72
δ_0 = 14,07
δ_1 = 11,45
δ = 12,76
L = 100 cm. + 53,02 μ a 14°,981

C = — 0,03131 cm

O′ = 13h.50m.30s	e'_0 = 9,82	t'_s = 1,035264.34	O″ = 13h.43m.06s	e''_0 = 10,31	t''_s = 1,035265.45
T′ = 19531,33	e'_1 = 3,27	r' = 3.63	T″ = 19675,87	e''_1 = 3,20	r'' = 3.81
τ' = — 0,24	N′ = 188658/10	t'_m = 1,032433.99	τ'' = — 0,24	N″ = 190054/10	t''_m = 1,032434.92

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}032434.45$$

Pendolo lungo

B = 747,5 — f = 8,89

$\theta_{f_0} = 14{,}993$ | $\theta_{p_0} = 14{,}95$
$\theta_{f_1} = 15{,}017$ | $\theta_{p_1} = 14{,}96$
$\theta_f = 15{,}005$ | $\theta_p = 14{,}955$

$\log \varrho = \bar{3}{,}07913$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0634460$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999497$

Elementi	l	m	u	s
I	3,40	0,035	0,034	1.700
II	0,15	0,054	0,000	3,475
III	0,431	0.483	0,013	3,764
IV	198,129	0,868	2839,125	103,043
V	0,497	0,605	0,019	202,356
VI	0,468	0,507	0,014	209,214
VII	6,3748	1406,816	5716,862	205,792

I′ = 65,56 μ
I″ = 45,65
δ_0 = 38,78
δ_1 = 36,83
δ = 37,80
L = 100 cm. + 54,27 μ a 15°,005

C = + 0,00372 cm

O′ = 13h.37m.45s	e'_0 = 9,15	t'_s = 1,443581.00	O″ = 13h.47m.53s	e''_0 = 8,24	t''_s = 1,443575.54
T′ = 20041,495	e'_1 = 2,50	r' = 3.83	T″ = 19950,47	e''_1 = 2.62	r'' = 3.45
τ' = — 0,255	N′ = 138830/10	t'_m = 1,439635.57	τ'' = — 0,26	N″ = 138200/10	t''_m = 1,439630.50

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439633.03$$

Esperienza 16ª.

(dal 27 al 29 Marzo 1884).

Palla grossa di piombo-antimonio — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 755,8	$\theta_{f_0} = 15{,}02$	$\theta_{p_0} = 15{,}03$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08395$
	$\theta_{f_1} = 15{,}04$	$\theta_{p_1} = 15{,}05$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0682230$
f = 8,89	$\theta_f = 15{,}03$	$\theta_p = 15{,}04$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999492$

Elementi	l	m	u	s
I	3,72	0,038	0,044	1,860
II	0,15	0,054	0,000	3,795
III	0,430	0,484	0,013	4,085
IV	97,809	0,428	341,528	53,204
V	0,497	0,605	0,019	102,357
VI	0,468	0,507	0,014	109,215
VII	6,3748	1406,816	5716,862	105,793

I′ = 65,56 μ
I″ = 45,65
δ_0 = 8,26
δ_1 = 5,36
δ = 6,8̄1
L = { 100 cm. + 54,27 μ, a 15°,005 }

C = − 0,03131 cm

O′ = 13.49.09 (h m s)	e'_0 = 8,79	t'_s = 1,035092.68	O″ = 13.43.18 (h m s)	e''_0 = 9,25	t''_s = 1,035093 76
T′ = 21063,33	e'_1 = 2,66	r' = 2.73	T″ = 20942,87	e''_1 = 2,61	r'' = 2.89
τ' = − 0,23	N′ = 203490 / 10	t'_m = 1,032263.70	τ'' = − 0,23	N″ = 202326 / 10	t''_m = 1,032264.62

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}032264.16$$

Pendolo lungo

B = 755,6	$\theta_{f_0} = 15{,}027$	$\theta_{p_0} = 14{,}98$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08383$
	$\theta_{f_1} = 14{,}983$	$\theta_{p_1} = 14{,}95$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0671487$
f = 8,83	$\theta_f = 15{,}005$	$\theta_p = 14{,}965$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999492$

Elementi	l	m	u	s
I	3,41	0,035	0,034	1,705
II	0,15	0,054	0,000	3,485
III	0,429	0,484	0,013	3,774
IV	198,219	0,868	2838,839	103,048
V	0,499	0,604	0,019	202.357
VI	0.468	0,507	0,014	209,216
VII	6,3748	1406,816	5716,862	205,794

I′ = 65,16 μ
I″ = 45,88
δ_0 = 37,57
δ_1 = 35,73
δ = 36,65
L = { 100 cm. + 54,09 μ, a 15°,003 }

C = + 0,00373 cm

O′ = 13.20.32 (h m s)	e'_0 = 9,84	t'_s = 1,443451.15	O″ = 13.14.21 (h m s)	e''_0 = 10,01	t''_s = 1,443451.50
T′ = 24441,67	e'_1 = 2,15	r' = 3.92	T″ = 24492,78	e''_1 = 2,28	r'' = 4.17
τ' = − 0,29	N′ = 169326 / 10	t'_m = 1,439505.98	τ'' = − 0,29	N″ = 169680 / 10	t''_m = 1,439506.08

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439506.03$$

Esperienza 17ª.

(dal 23 al 26 Gennaio 1885).

Palla grossa d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 765,85	$\theta_{f_0} = 14,04$	$\theta_{p_0} = 14,00$	$\log \varrho = \bar{3},08630$
	$\theta_{f_1} = 14,05$	$\theta_{p_1} = 14,00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0653930$
$f =$ 8,04	$\theta_f = 14,045$	$\theta_p = 14,00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999495$

Elementi	l	m	u	s
I	3,73	0,038	0,045	1,865
II	0,15	0,054	0,000	3,805
III	0,430	0,483	0,013	4,095
IV	97,809	0,427	340,730	53,214
V	0,497	0,609	0,019	102,367
VI	0,468	0,510	0,014	109,220
VII	6,3699	1418,609	5756,146	105,801

$I' = \overset{\mu}{36,05}$

$I'' = 34,75$

$\delta_0 = 27,98$

$\delta_1 = 26,80$

$\delta = 27,39$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{6,67} \\ a\ 14°,00 \end{cases}$

$C = - \overset{cm}{0,03132}$

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.42.08}$	$e'_0 = 9,12$	$t'_s = 1,035139.48$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.55.15}$	$e''_0 = 8,730$	$t''_s = 1,035139.82$
$T' = 19749,35$	$e'_1 = .302$	$r' = 3.10$	$T'' = 19811,13$	$e''_1 = 2,960$	$r'' = 2\ 90$
$\tau' = -0,34$	$N' = \frac{190786}{10}$	$t'_m = 1,032310.00$	$\tau'' = -0,34$	$N'' = \frac{210521}{11}$	$t''_m = 1,032310.54$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032310.27$$

Pendolo lungo

B = 758,79	$\theta_{f_0} = 14,015$	$\theta_{p_0} = 14,00$	$\log \varrho = \bar{3},08744$
	$\theta_{f_1} = 14,025$	$\theta_{f_1} = 14,00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0665868$
$f =$ 7,98	$\theta_f = 14,02$	$\theta_p = 14,00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999494$

Elementi	l	m	u	s
I	3,40	0,035	0,034	1,700
II	0,15	0,054	0.000	3,475
III	0,429	0,484	0,013	3,764
IV	198,1378	0,867	2836,107	103,048
V	0,499	0,608	0,019	202,366
VI	0,468	0,510	0,014	209,219
VII	6,3699	1418,609	5756,146	205,800

$I' = \overset{\mu}{36,08}$

$I'' = 36,13$

$\delta_0 = 25,43$

$\delta_1 = 22,13$

$\delta = 23,78$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{5,55} \\ a\ 14°,02 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0,00353}$

$O' = \overset{h\ m\ s}{9\ 20.25}$	$e'_0 = 8,63$	$t'_s = 1,443478.71$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{9.37.27}$	$e''_0 = 7,963$	$t''_s = 1,443478.46$
$T' = 23634,495$	$e'_1 = 1,97$	$r' = 2.70$	$T'' = 23385.72$	$e''_1 = 1,883$	$r'' = 3.10$
$\tau' = -0,415$	$N' = \frac{163730}{10}$	$t'_m = 1,439534.69$	$\tau'' = -0,41$	$N'' = \frac{145806}{5}$	$t''_m = 1,439534.04$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439534.36$$

Esperienza 18ª.

(dal 27 al 30 Gennaio 1885).

Palla grossa d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 760,70	$\theta_{f_0} = 14,055$	$\theta_{p_0} = 14,00$	$\log \varrho = \bar{3},08849$
	$\theta_{f_1} = 14,045$	$\theta_{p_1} = 14,00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0675544$
f = 8,16	$\theta_f = 14,05$	$\theta_p = 14,00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999493$

Elementi	l	m	u	s
I	3,73	0,038	0,045	1,865
II	0,15	0,054	0,000	3,805
III	0,430	0,483	0,013	4,095
IV	97,809	0,427	310,730	53,214
V	0,497	0,609	0,019	102,367
VI	0,468	0,510	0,014	109,220
VII	6,3699	1418,609	5756,146	105,801

$I' = \overset{\mu}{35,88}$
$I'' = 35,81$
$\delta_0 = 24,42$
$\delta_1 = 23,95$
$\delta = 24,18$
$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{6,01} \\ a\ 14^{\circ},00 \end{cases}$

$$C = -\overset{cm}{0,03132}$$

$O' = \overset{h\ m\ s}{9.25.37}$	$e'_0 = 6,74$	$t'_s = 1,035149\ 23$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{9.25.14}$	$e''_0 = 6,446$	$t''_s = 1,035151.02$
$T' = 20303,97$	$e'_1 = 2,12$	$r' = 1.70$	$T'' = 18747,54$	$e''_1 = 2,216$	$r'' = 1.60$
$\tau' = -0,35$	$N' = \frac{196142}{10}$	$t'_m = 1,032321.13$	$\tau'' = -0,33$	$N'' = \frac{181106}{10}$	$t''_m = 1.032323.01$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,032322.07$$

Pendolo lungo

B = 760,61	$\theta_{f_0} = 14,035$	$\theta_{p_0} = 14,00$	$\log \varrho = \bar{3},08844$
	$\theta_{f_1} = 14,035$	$\theta_{p_1} = 14,00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0675915$
f = 8,16	$\theta_f = 14,035$	$\theta_p = 14,00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999493$

Elementi	l	m	u	s
I	3,40	0,035	0,034	1,700
II	0,15	0,054	0,000	3,475
III	0,429	0,484	0,013	3,764
IV	198,138	0,867	2836,107	103,048
V	0,499	0,608	0,019	202,366
VI	0,468	0,510	0,014	209,219
VII	6,3699	1418,609	5756,146	205,800

$I' = \overset{\mu}{35,15}$
$I'' = 36,21$
$\delta_0 = 23,34$
$\delta_1 = 21,81$
$\delta = 22,58$
$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{6,13} \\ a\ 14^{\circ},01 \end{cases}$

$$C = +\overset{cm}{0,00353}$$

$O' = \overset{h\ m\ s}{9.43.18}$	$e'_0 = 7,68$	$t'_s = 1,443485.66$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{9.59.51}$	$e''_0 = 7,221$	$t''_s = 1,443483.29$
$T' = 21387,66$	$e'_1 = 1,90$	$r' = 2.60$	$T'' = 21379,825$	$e''_1 = 1,791$	$r'' = 2.30$
$\tau' = -0,40$	$N' = \frac{148164}{10}$	$t'_m = 1,439541.72$	$\tau'' = -0,395$	$N'' = \frac{148110}{10}$	$t''_m = 1,439539.65$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,439540.68$$

Esperienza 19ª.

(dal 14 al 18 Marzo 1885).

Palla grossa d'argento *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 764,52	$\theta_{f_0} = 16{,}035$	$\theta_{p_0} = 16{,}00$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08739$
	$\theta_{f_1} = 16{,}040$	$\theta_{p_1} = 16{,}01$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0665868$
$f =$ 9,41	$\theta_f = 16{,}037$	$\theta_p = 16{,}005$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999494$

Elementi	l	m	u	s
I	3,71	0,038	0,044	1,855
II	0,15	0,054	0,000	3,785
III	0,423	0.452	0,012	4,072
IV	147,7005	0,858	1559,623	78,133
V	0,479	0,576	0,172	152,223
VI	0,618	0,606	0,025	159,142
VII	6,3702	1418,609	5756,580	155,648

$I' = 35{,}72$ μ

$I'' = 48{,}65$

$\delta_0 = -0{,}06$

$\delta_1 = -1{,}32$

$\delta = -0{,}69$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + 16{,}61\ \mu \\ a\ 15°{,}98 \end{cases}$

$C = -0{,}00849$ cm

$O' = 12.34.39$ (h m s)	$e'_0 = 9{,}95$	$t'_s = 1{,}255439.66$	$O'' = 12.48.36$ (h m s)	$e''_0 = 9{,}362$	$t''_s = 1{,}255438.59$
$T' = 20973{,}725$	$e'_1 = 2{,}82$	$r' = 1.60$	$T'' = 20861{,}717$	$e''_1 = 2{,}672$	$r'' = 1.40$
$\tau' = -0{,}350$	$N' = \frac{167060}{10}$	$t'_m = 1{,}252010.17$	$\tau'' = -0{,}345$	$N'' = \frac{166168}{10}$	$t''_m = 1{,}252009\ 30$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252009.73$$

Pendolo lungo

B = 766,50	$\theta_{f_0} = 16.04$	$\theta_{p_0} = 16{,}00$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08852$
	$\theta_{f_1} = 16{,}035$	$\theta_{p_1} = 16{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0677402$
$f =$ 9,41	$\theta_f = 16{,}037$	$\theta_p = 16{,}00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999493$

Elementi	l	m	u	s
I	3,60	0,037	0,040	1,800
II	0,15	0,054	0,000	3,675
III	0,423	0,450	0,011	3,962
IV	247,8038	1,304	6672.864	128,075
V	0,486	0,575	0,017	252,220
VI	0,618	0,606	0,025	259,142
VII	6,3702	1418,609	5756,580	255,648

$I' = 35{,}80$ μ

$I'' = 50{,}06$

$\delta_0 = 28{,}86$

$\delta_1 = 25{,}67$

$\delta = 27{,}26$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + 17{,}79\ \mu \\ a\ 16°{,}01 \end{cases}$

$C = +0{,}02565$ cm

$O' = 12.14.09$ (h m s)	$e'_0 = 9.93$	$t'_s = 1{,}608813.58$	$O'' = 12.31.46$ (h m s)	$e''_0 = 9{,}368$	$t''_s = 1{,}608807.40$
$T' = 24499{,}693$	$e'_1 = 1{,}99$	$r' = 1.70$	$T'' = 24608{,}674$	$e''_1 = 1{,}918$	$r'' = 1.50$
$\tau' = -0{,}353$	$N' = \frac{152282}{10}$	$t'_m = 1{,}604419.12$	$\tau'' = -0{,}354$	$N'' = \frac{152960}{10}$	$t''_m = 1{,}604413.15$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}604416.13$$

Esperienza 20ª.

(dal 20 al 23 Marzo 1885).

Palla grossa di alluminio — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 751,96	$\theta_{f_0} = 16{,}025$	$\theta_{p_0} = 15{,}99$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08010$
	$\theta_{f_0} = 16{,}020$	$\theta_{p_1} = 16{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}6562036$
f = 9,68	$\theta_f = 16{,}022$	$\theta_p = 15{,}995$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9998028$

Elementi	l	m	u	s
I	3,89	0,040	0,051	1,915
II	0,15	0,054	0,000	3,965
III	0,423	0,452	0,012	4,252
IV	147,5207	0,858	1555,828	78,223
V	0,479	0,395	0,012	152,223
VI	0,618	0,426	0,018	159,145
VII	6,3733	358,163	1453,374	155,649

I′ = 35,80 μ
I″ = 50,06

δ_0 = 9,95
δ_1 = 9,90
δ = 9,92

L = { 100 cm. + 18,60 μ
{ a 16°,00

C = + 0,04435 cm

1ª Esperienza elementare

O′ = 9.12.24 (h m s)	e'_0 = 11,67	t'_s = 1,255546.56	O″ = 9.26.19 (h m s)	e''_0 = 8,968	t''_s = 1,255536.37
T′ = 10486,776	e'_1 = 1,09	r' = 1.20	T″ = 10012,843	e''_1 = 0,948	r'' = 0.80
τ' = − 0,200	N′ = 83522/10	t'_m = 1,252117.17	τ'' = − 0,190	N″ = 79748/10	t''_m = 1,252107.61

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252112.39$$

2ª Esperienza elementare

O′ = 12.47.13 (h m s)	e'_0 = 15,86	t'_s = 1,255540.94	O″ = 13 02.58 (h m s)	e''_0 = 13,027	t''_s = 1,255541.74
T′ = 10584,163	e'_1 = 1,44	r' = 2.30	T″ = 11048,214	e''_1 = 1,072	r'' = 1.50
τ' = − 0,214	N′ = 84298/10	t'_m = 1,252110.47	τ'' = − 0,20	N″ = 87994/10	t''_m = 1,252112.07

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252111.27$$

3ª Esperienza elementare

O′ = 4.39.35 (h m s)	e'_0 = 14,99	t'_s = 1,255549.49	O″ = 4.54.31 (h m s)	e''_0 = 12,006	t''_s = 1,255542.73
T′ = 9875,589	e'_1 = 1,54	r' = 2.10	T″ = 10058,855	e''_1 = 1,201	r'' = 1.40
τ' = − 0,190	N′ = 78654/10	t'_m = 1,252119.20	τ'' = − 0,200	N″ = 80114/10	t''_m = 1,252113.15

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252116.17$$

Esperienza 20ª.

(dal 20 al 23 Marzo 1885).

Palla grossa d'alluminio — *Sospensicne superiore*

Pendolo lungo

$B = 751,25$	$\theta_{f_0} = 16,03$	$\theta_{p_0} = 16,00$	$\log \varrho = \bar{3},07969$
	$\theta_{f_1} = 16,02$	$\theta_{p_1} = 16,00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},6554362$
$f = 9,68$	$\theta_f = 16,025$	$\theta_p = 16,00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9998031$

Elementi	l	m	u	s
I	3,92	0,040	0,052	1,960
II	0,15	0,054	0,000	3,955
III	0,423	0,450	0,011	4,282
IV	247,4847	1,304	6655,692	128,235
V	0.486	0,395	0,011	252,221
VI	0,618	0,426	0,012	259,146
VII	6,3733	358,163	1453,374	255,650

$I' = \overset{\mu}{35,56}$

$I'' = 50,15$

$\delta_0 = 33,38$

$\delta_1 = 31,63$

$\delta = 32,50$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + \overset{\mu}{17,83} \\ a\ 16^o,00 \end{cases}$

$$C = + \overset{cm}{0,14906}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{5.04.45}$	$e'_0 = 12.51$	$t'_s = 1,608880.58$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{5.16.27}$	$e''_0 = 10,229$	$t''_s = 1,608862.69$
$T' = 8794.623$	$e'_1 = 1.50$	$r' = 2.10$	$T'' = 8759.462$	$e''_1 = 1,274$	$r'' = 1.40$
$\tau' = -0,160$	$N' = \frac{54662}{10}$	$t'_m = 1,604485.54$	$\tau'' = -0,160$	$N'' = \frac{54444}{10}$	$t''_m = 1,604468.40$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604476.97$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.40.53}$	$e'_0 = 14.69$	$t'_s = 1,608884.49$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.42.56}$	$e''_0 = 10,228$	$t''_s = 1,608862.09$
$T' = 10674.515$	$e'_1 = 1.09$	$r' = 2.40$	$T'' = 8965.564$	$e''_1 = 1,273$	$r'' = 1.40$
$\tau' = -0,210$	$N' = \frac{66346}{10}$	$t'_m = 1,604489.14$	$\tau'' = -0,180$	$N'' = \frac{55725}{10}$	$t''_m = 1,604467.80$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604478.47$$

3ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{12.37.26}$	$e'_0 = 14.84$	$t'_s = 1,608890.49$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.52.40}$	$e''_0 = 11,160$	$t''_s = 1,608871.22$
$T' = 9147.366$	$e'_1 = 1.58$	$r' = 2.80$	$T'' = 9479.981$	$e''_1 = 1,250$	$r'' = 1.40$
$\tau' = -0,180$	$N' = \frac{56854}{10}$	$t'_m = 1,604494.72$	$\tau'' = -0,190$	$N'' = \frac{58922}{10}$	$t''_m = 1,604476.90$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604485.81$$

4ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{16.20.25}$	$e'_1 = 14.51$	$t'_s = 1,608884.50$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{16.33.42}$	$e''_0 = 11,401$	$t''_s = 1,608859.27$
$T' = 9085.229$	$e'_0 = 1.59$	$r' = 2.60$	$T'' = 8948.977$	$e''_1 = 1,341$	$r'' = 1.70$
$\tau' = -0,180$	$N' = \frac{56468}{10}$	$t'_m = 1.604488.95$	$\tau'' = -0,180$	$N'' = \frac{55622}{10}$	$t''_m = 1\ 604464.69$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604476.82$$

Esperienza 21ª.

(dal 19 al 23 Aprile 1885).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 762,66$	$\theta_{f_0} = 18,040$	$\theta_{p_0} = 18,00$	$\log \varrho = \bar{3},08306$
	$\theta_{f_1} = 18,035$	$\theta_{p_1} = 18,00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},4203354$
$f = 10,65$	$\theta_f = 18,037$	$\theta_p = 18,00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9998856$

Elementi	l	m	u	s
I	3,87	0,040	0,050	1,935
II	0,15	0,054	0,000	3,945
III	0,423	0,452	0,012	4,232
IV	147,5667	0,858	1556,797	78,226
V	0,479	0,527	0,016	152,249
VI	0,618	0,558	0,023	159,143
VII	6,3448	599,644	3251,488	155,661

$I' = \overset{\mu}{38,01}$

$I'' = 51,62$

$\delta_0 = 26,85$

$\delta_1 = 25,22$

$\delta = 26,04$

$L = \begin{cases} 100\,cm. + \overset{\mu}{38,67} \\ \text{a } 18°,01 \end{cases}$

$$C = +\overset{cm}{0,00702}$$

$O' = \overset{h\ m\ s}{14.56.03}$	$e'_0 = 14,25$	$t'_s = 1,255551.59$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{15.07.41}$	$e''_0 = 12,886$	$t''_s = 1,255546\ 59$
$T' = 17077,715$	$e'_1 = 1,39$	$r' = 1.90$	$T'' = 17145,373$	$e''_1 = 1,242$	$r'' = 1.50$
$\varepsilon' = -0,330$	$N' = \frac{136015}{10}$	$t'_m = 1,252121.49$	$\varepsilon'' = -0,336$	$N'' = \frac{122899}{9}$	$t''_m = 1,252116.90$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,252119.19$$

Esperienza 21ª.

(dal 19 al 23 Aprile 1885).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

$B = 762{,}13$	$\theta_{f_0} = 18{,}04$	$\theta_{p_0} = 18{,}00$	$\log \rho = \bar{3}{,}08275$
	$\theta_{f_1} = 18{,}04$	$\theta_{p_1} = 18{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}4200383$
$f = 10{,}65$	$\theta_f = 18{,}04$	$\theta_p = 18{,}00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9998856$

Elementi	l	m	u	s
I	3,90	0,040	0,051	1,950
II	0,15	0,054	0,000	3,975
III	0,423	0,450	0,011	4,262
IV	247,5345	1,304	6627,773	128,240
V	0,486	0,527	0,016	252,250
VI	0,618	0,558	0,023	259,147
VII	6.3448	599,644	3251,488	255,666

$I' = \overset{\mu}{38{,}01}$

$I'' = 51{,}62$

$\delta_0 = 29{,}69$

$\delta_1 = 28{,}58$

$\delta = 29{,}13$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + \overset{\mu}{35{,}21} \\ a\ 18^\circ{,}01 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0{,}07751}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.44.13}$	$e'_0 = 10{,}79$	$t'_s = 1{,}608882.74$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.02.35}$	$e''_0 = 9{,}553$	$t''_s = 1{,}608883.58$
$T' = 13323{,}413$	$e'_1 = 1{,}53$	$r' = 1.60$	$T'' = 13885{,}420$	$e''_1 = 1{,}260$	$r'' = 1.20$
$\iota' = -0{,}255$	$N' = \frac{82810}{10}$	$t'_m = 1{,}604488.19$	$\iota'' = -0{,}270$	$N'' = \frac{86303}{10}$	$t''_m = 1{,}604489.43$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}604488.81$$

2ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{4.43.15}$	$e'_0 = 13{,}38$	$t'_s = 1{,}608892.01$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{4.56.07}$	$e''_0 = 11{,}765$	$t''_s = 1{,}608892.92$
$T' = 15511{,}467$	$e'_1 = 1{,}37$	$r' = 2.20$	$T'' = 15410{,}910$	$e''_1 = 1{,}233$	$r'' = 1.70$
$\iota' = -0{,}300$	$N' = \frac{96409}{10}$	$t'_m = 1{,}604496.84$	$\iota'' = -0{,}290$	$N'' = \frac{95784}{10}$	$t''_m = 1{,}604498.24$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}604497.54$$

Esperienza 22ª.

(dal 23 al 26 Aprile 1885).

Palla piccola d'ottone piena — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 757,98	$\theta_{f_0} = 18{,}04$	$\theta_{p_0} = 18{,}00$	$\log \varrho = \bar{3},08028$
	$\theta_{f_1} = 18{,}04$	$\theta_{p_1} = 18{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},1566400$
f = 11,03	$\theta_f = 18{,}04$	$\theta_p = 18{,}00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999377$

Elementi	l	m	u	s
I	4,01	0,041	0,055	2,005
II	0,15	0,054	0,000	4,085
III	0,422	0,450	0,011	4,371
IV	149,5321	0,874	1628,005	79,348
V	0,491	0,525	0,016	154,360
VI	0,400	0,462	0,013	159,288
VII	4,4487	386,660	765,236	156,829

$I' = 37{,}60^{\mu}$
$I'' = 51{,}76$
$\delta_0 = 42{,}41$
$\delta_1 = 44{,}26$
$\delta = 43{,}33$
$L = \begin{cases} 100\,cm. + 34{,}53^{\mu} \\ \text{a } 18^{\circ}{,}03 \end{cases}$

$$C = +\overset{cm}{0{,}05488}$$

$O' = \overset{h\ m\ s}{14.55.32}$	$e'_0 = 11{,}68$	$t'_s = 1{,}259807.56$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{14.44.39}$	$e''_0 = 12{,}949$	$t''_s = 1{,}259810\ 96$
$T' = 18108{,}194$	$e'_1 = 1{,}05$	$r' = 1.20$	$T'' = 18233{,}846$	$e''_1 = 1{,}134$	$r'' = 1.50$
$\tau' = -0{,}350$	$N' = \frac{143735}{10}$	$t'_m = 1{,}256366.54$	$\tau'' = -0{,}350$	$N'' = \frac{144732}{10}$	$t''_m = 1{,}256369.63$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}256368.08$$

Pendolo lungo

B = 759,65	$\theta_{f_0} = 18{,}03$	$\theta_{p_0} = 18{,}00$	$\log \varrho = \bar{3},08124$
	$\theta_{f_1} = 18{,}03$	$\theta_{p_1} = 18{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},1576079$
f = 11,03	$\theta f = 18{,}03$	$\theta_p = 18{,}00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999376$

Elementi	l	m	u	s
I	4,03	0,042	0,056	2,015
II	0,15	0,054	0,000	4,105
III	0,424	0,452	0,011	4,392
IV	249,444	1,244	6453,357	129,360
V	0,489	0,524	0,016	254.360
VI	0,400	0,462	0,013	259.287
VII	4,4487	386,660	765,236	256,829

$I' = 37{,}60^{\mu}$
$I'' = 51{,}76$
$\delta_0 = 11{,}50$
$\delta_1 = 10{,}23$
$\delta = 10{,}86$
$L = \begin{cases} 100\,cm. + 34{,}50^{\mu} \\ \text{a } 18^{\circ}{,}017 \end{cases}$

$$C = +\overset{cm}{0{,}13964}$$

$O' = \overset{h\ m\ s}{3.39.35}$	$e'_0 = 12{,}49$	$t'_s = 1{,}612091.44$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{3.29.49}$	$e''_0 = 14{,}069$	$t''_s = 1{,}612089.93$
$T' = 17203{,}219$	$e'_1 = 0{,}84$	$r' = 1.60$	$T'' = 17292{,}029$	$e''_1 = 0{,}913$	$r'' = 2.00$
$\tau' = -0{,}430$	$N' = \frac{106711}{10}$	$t'_m = 1{,}607688.13$	$\tau'' = -0{,}430$	$N'' = \frac{107262}{10}$	$t''_m = 1{,}607686.22$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}607687.17$$

Esperienza 23ª.

(dal 16 al 18 Maggio 1885).

Palla piccola d'argento | *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 756{,}13$	$\theta_{f_0} = 18{,}03$	$\theta_{p_0} = 18{,}00$	$\log \varrho = \bar{3}{,}07949$
	$\theta_{f_1} = 18{,}03$	$\theta_{p_1} = 18{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0590709$
$f = 9{,}76$	$\theta_f = 18{,}03$	$\theta_p = 18{,}00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999503$

Elementi	l	m	u	s
I	3,90	0,040	0,051	1,950
II	0,15	0,054	0,000	3,975
III	0,422	0,451	0,011	4,261
IV	149,549	0,874	1628,351	79,247
V	0,491	0,573	0,017	154,266
VI	0,468	0,511	0,014	159,198
VII	4,4516	484,761	960,654	156,738

$I' = 38{,}51^{\mu}$

$I'' = 51{,}97$

$\delta_0 = 6{,}22$

$\delta_1 = 4{,}66$

$\delta = 5{,}44$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 29{,}69^{\mu} \\ a\ 18^\circ{,}00 \end{cases}$

$C = + 0{,}04104^{cm}$

$O' = 3^h.48^m.01^s$	$e'_0 = 10{,}91$	$t'_s = 1{,}259665.84$	$O'' = 3^h.59^m.39^s$	$e''_0 = 10{,}151$	$t''_s = 1{,}259661.30$
$T' = 18935{,}251$	$e'_1 = 1{,}32$	$r' = 1.20$	$T'' = 19105{,}237$	$e''_1 = 1{,}222$	$r'' = 1.10$
$\tau' = -0{,}080$	$N' = \frac{150319}{10}$	$t'_m = 1{,}256225.21$	$\tau'' = -0{,}080$	$N'' = \frac{151669}{10}$	$t''_m = 1{,}256220.78$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}256222.99$$

Pendolo lungo

$B = 758{,}28$	$\theta_{f_0} = 18{,}03$	$\theta_{p_0} = 18{,}00$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08071$
	$\theta_{f_1} = 18{,}03$	$\theta_{p_1} = 18{,}00$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0603578$
$f = 9{,}88$	$\theta_f = 18{,}03$	$\theta_p = 18{,}00$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999501$

Elementi	l	m	u	s
I	3,92	0,041	0,052	1,960
II	0,15	0,054	0.000	3,995
III	0,424	0,452	0,011	4,282
IV	249,529	1,244	6454,270	129,259
V	0,489	0,573	0,018	254,268
VI	0,468	0,511	0,014	259,198
VII	4,4516	484,761	960,654	256,738

$I' = 39{,}54^{\mu}$

$I'' = 52{,}14$

$\delta_0 = 46{,}71$

$\delta_1 = 45{,}22$

$\delta = 45{,}97$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 27{,}84^{\mu} \\ a\ 17^\circ{,}975 \end{cases}$

$C = + 0{,}10950^{cm}$

$O' = 4^h.18^m.24^s$	$e'_0 = 14{,}01$	$t'_s = 1{,}612007.52$	$O'' = 4^h.32^m.46^s$	$e''_0 = 12{,}369$	$t''_s = 1{,}612003.37$
$T' = 20400{,}69$	$e'_1 = 1{,}08$	$r' = 2.10$	$T'' = 20448.515$	$e''_1 = 1{,}005$	$r'' = 1.70$
$\tau' = -0{,}09$	$N' = \frac{126554}{10}$	$t'_m = 1{,}607603.94$	$\tau'' = -0{,}090$	$N'' = \frac{126851}{10}$	$t''_m = 1{,}607600.20$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}607602.07$$

Esperienza 24ª.

(dal 16 al 20 Giugno 1885).

Palla grossa d'argento — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 753{,}18$	$\theta_{f_0} = 22{,}275$	$\theta_{p_0} = 22{,}22$	$\log \varrho = \bar{3}{,}07072$
	$\theta_{f_1} = 22{,}275$	$\theta_{p_1} = 22{,}23$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0499929$
$f = 13{,}43$	$\theta_f = 22{,}275$	$\theta_p = 22{,}225$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999512$

Elementi	l	m	u	s
I	3,85	0,040	0,049	1,925
II	0,15	0,054	0,000	3,925
III	0,411	0,452	0,011	4,205
IV	147,716	0,858	1559,951	78,269
V	0,491	0,576	0,018	152,373
VI	0,468	0,510	0,014	159,223
VII	6,3709	1418,609	5757,930	155,804

$I' = 42{,}28\ \mu$

$I'' = 56{,}11$

$\delta_0 = 9{,}78$

$\delta_1 = 6{,}52$

$\delta = 8{,}15$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 49{,}80\ \mu \\ a\ 22^\circ{,}35 \end{cases}$

$C = -0{,}00812$ cm

$O' = 6^h.28^m.26^s$	$e'_0 = 10{,}11$	$t'_s = 1{,}256136.35$	$O'' = 6^h.40^m.30^s$	$e''_0 = 9{,}697$	$t''_s = 1{,}256137.30$
$T' = 20053{,}262$	$e'_1 = 3{,}00$	$r' = 1.70$	$T'' = 20018{,}859$	$e''_1 = 2{,}920$	$r'' = 1.60$
$\tau' = -0{,}050$	$N' = \frac{159642}{10}$	$t'_m = 1{,}252696.95$	$\tau'' = -0{,}050$	$N'' = \frac{159368}{10}$	$t''_m = 1{,}252697.99$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252697.47$$

Pendolo lungo

$B = 755{,}45$	$\theta_{f_0} = 22{,}247$	$\theta_{p_0} = 22{,}21$	$\log \varrho = \bar{3}{,}07205$
	$\theta_{f_1} = 22{,}243$	$\theta_{p_1} = 22{,}21$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0514227$
$f = 13{,}43$	$\theta_f = 22{,}245$	$\theta_p = 22{,}21$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999511$

Elementi	l	m	u	s
I	3,74	0,039	0,045	1,870
II	0,15	0,054	0,000	3,815
III	0,418	0,452	0,011	4,099
IV	247,824	1,304	6673,960	128,220
V	0,491	0,574	0,017	252,378
VI	0,468	0,510	0,014	259,228
VII	6,3709	1418,609	5757,930	255,809

$I' = 42{,}01\ \mu$

$I'' = 55{,}86$

$\delta_0 = 55{,}52$

$\delta_1 = 53{,}53$

$\delta = 54{,}52$

$L = \begin{cases} 100\ cm. + 48{,}97\ \mu \\ a\ 22^\circ{,}17 \end{cases}$

$C = +0{,}02603$ cm

$O' = 6^h.05^m.49^s$	$e'_0 = 8{,}29$	$t'_s = 1{,}609360.49$	$O'' = 6^h.24^m.07^s$	$e''_0 = 8{,}516$	$t''_s = 1{,}609361.97$
$T' = 20311{,}155$	$e'_1 = 2{,}60$	$r' = 1.80$	$T'' = 19740{,}886$	$e''_1 = 2.504$	$r'' = 1.60$
$\tau' = -0{,}060$	$N' = \frac{126206}{10}$	$t'_m = 1{,}604964.44$	$\tau'' = -0{,}050$	$N'' = \frac{98130}{8}$	$t''_m = 1{,}604966.11$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}604965.27$$

Esperienza 25ª.

(dal 23 al 26 Gennaio 1887).

Palla grossa d'ottone piena — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 765,44	$\theta_{f_0} = 14,255$	$\theta_{p_0} = 14,25$	$\log \rho = \bar{3},09081$
	$\theta_{f_1} = 14,260$	$\theta_{p_1} = 14,26$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},1680553$
f = 8,20	$\theta_f = 14,257$	$\theta_p = 14,255$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999361$

Elementi	l	m	u	s
I	3,78	0,039	0,046	1,890
II	0,15	0,054	0,000	3,855
III	0,423	0,452	0,012	4,142
IV	147,6479	0,858	1558,512	78,177
V	0.479	0,527	0,016	152,240
VI a	0,450	0,523	0,015	159,077
VI b	0,020	0,078	0,000	159,312
VI c	0,500	0,019	0,001	159,572
VII	6,3721	1133,946	4604,161	155,666

I′ = 23,93 μ
I″ = 33,02
δ_0 = 28,86
δ_1 = 28,76
δ = 28,81
L = 100 cm. — 16,66 μ a 14°,235

C = — 0,00417 cm

O′ = 8.36.01 (h m s)	e'_0 = 7.517	t'_s = 1,255534.92	O″ = 8.42.34 (h m s)	e''_0 = 6,659	t''_s = 1,255533.10
T′ = 19632.056	e'_1 = 1.843	r' = 0.83	T″ = 17382.678	e''_1 = 1,917	r'' = 0.72
τ' = — 0,511	N′ = 15636	t'_m = 1,252105.43	τ'' = — 0,450	N″ = $\frac{138445}{10}$	t''_m = 1,252104.23

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,25210483$$

Pendolo lungo

B = 771,45	$\theta_{f_0} = 14,230$	$\theta_{p_0} = 14,19$	$\log \rho = \bar{3},09428$
	$\theta_{f_1} = 14,233$	$\theta_{p_1} = 14,20$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},1715217$
f = 8,36	$\theta_f = 14,231$	$\theta_p = 14,195$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999356$

Elementi	l	m	u	s
I	3,72	0,038	0,014	1,860
II	0,15	0,054	0,000	3,795
III	0,423	0,450	0,011	4,082
IV	247,6998	1,304	6667,265	128,146
V	0,486	0,527	0,016	252,236
VI a	0,450	0,523	0,015	259,076
VI b	0,020	0,078	0,000	259,311
VI c	0,500	0,019	0,001	259,571
VII	6,3721	1133,946	4604,161	255,665

I′ = 23,56 μ
I″ = 32,86
δ_0 = 32,87
δ_1 = 32,72
δ = 32,80
L = 100 cm. — 18,33 μ a 14°,175

C = + 0,03599 cm

O′ = 8.21.36 (h m s)	e'_0 = 8,990	t'_s = 1,608882.14	O″ = 8.22.47 (h m s)	e''_0 = 8,571	t''_s = 1,608885 86
T′ = 20121,201	e'_1 = 1,820	r' = 1.37	T″ = 19071,74	e''_1 = 1,909	r'' = 1.31
τ' = — 0,521	N′ = 12506	t'_m = 1,604489.02	τ'' = — 0,49	N″ = $\frac{118537}{10}$	t''_m = 1,604491.59

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604490.30$$

Esperienza 26ª.

(dal 26 al 30 Gennaio 1887).

Palla piccola di platino — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 768,78	$\theta_{f_0} = 14,275$	$\theta_{p_0} = 14,30$	$\log \varrho = \bar{3},09262$
	$\theta_{f_1} = 14,280$	$\theta_{p_1} = 14,30$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7615520$
f = 8,26	$\theta_f = 14,277$	$\theta_p = 14,30$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999749$

Elementi	l	m	u	s
I	3,82	0,040	0,048	1,910
II	0,15	0,054	0,000	3,895
III	0,422	0,451	0,012	4,181
IV	149,6275	0,874	1630,062	79,206
V	0,491	0,827	0,025	154,265
VI	0,490	0,844	0,027	159,206
VII	4,4509	994,286	1969,713	156,736

$I' = 23\overset{\mu}{,}56$
$I'' = 32,86$
$\delta_0 = 25,44$
$\delta_1 = 25,35$
$\delta = 25,40$
$L = \begin{cases} 100\ cm. - 18\overset{\mu}{,}33 \\ a\ 14^{\circ},175 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0},01326$

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.41.40}$	$e'_0 = 12,496$	$t'_s = 1,259561\ 54$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.42.13}$	$e''_0 = 12,200$	$t''_s = 1,259562.36$
$T' = 20712,671$	$e'_1 = 3,908$	$r' = 2.68$	$T'' = 19887,856$	$e''_1 = 4,019$	$r'' = 2.65$
$\tau' = -0,517$	$N' = 16444$	$t'_m = 1,256119.42$	$\tau'' = -0,500$	$N'' = \frac{157891}{10}$	$t''_m = 1.256120.56$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,256119.99$$

Pendolo lungo

B = 767,74	$\theta_{f_0} = 14,23$	$\theta_{p_0} = 14,18$	$\log \varrho = \bar{3},09218$
	$\theta_{f_1} = 14,22$	$\theta_{p_1} = 14,18$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7613263$
f = 8,45	$\theta_f = 14,225$	$\theta_p = 14,18$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999749$

Elementi	l	m	u	s
I	3,80	0,039	0,047	1,900
II	0,15	0,054	0,000	3,875
III	0,424	0,452	0,011	4,162
IV	249,646	1,244	6460,300	129,197
V	0,489	0,827	0,025	254,264
VI	0,490	0,844	0,027	259,205
VII	4,4510	994,286	1969,709	256,734

$I' = 22\overset{\mu}{,}72$
$I'' = 32,72$
$\delta_0 = 36,50$
$\delta_1 = 35,10$
$\delta = 35,80$
$L = \begin{cases} 100\ cm. - 18\overset{\mu}{,}91 \\ a\ 14^{\circ},21 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0},04919$

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.32.05}$	$e'_0 = 10,447$	$t'_s = 1,611980.87$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.28.02}$	$e''_0 = 8,912$	$t''_s = 1,611979.91$
$T' = 20060,015$	$e'_1 = 2,697$	$r' = 2.13$	$T'' = 17814,46$	$e''_1 = 2,923$	$r'' = 1.80$
$\tau' = -0,526$	$N' = 12444$	$t'_m = 1,607577.34$	$\tau'' = -0,47$	$N'' = \frac{99459}{9}$	$t''_m = 1,607576.71$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,607577.02$$

Esperienza 27ª.

(dal 30 Gennaio al 2 Febbraio 1887).

Palla piccola d'argento — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 765,31

f = 8,45

$\theta_{f_0} = 14,28$ | $\theta_{p_0} = 14,30$

$\theta_{f_1} = 14,28$ | $\theta_{p_1} = 14,30$

$\theta_f = 14,28$ | $\theta_p = 14,30$

$\log \rho = \bar{3},09061$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0701118$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999490$

Elementi	l	m	u	s
I	3,86	0,040	0,050	1,930
II	0,15	0,054	0,000	3,935
III	0,422	0,451	0,012	4,221
IV	149,5697	0,874	1628,802	79,217
V	0,491	0,573	0,017	154,247
VI	0,490	0,590	0,019	159,189
VII	4,4513	484,761	960,520	156,718

I′ = 22,72 μ
I″ = 32,72
δ_0 = 20,98
δ_1 = 22,00
δ = 21,49
L = { 100 cm. — 18,91 μ
a 14°,21 }

C = + 0,04055 cm

O′ = 9.22.56 (h m s)	e'_0 = 11,895	t'_s = 1,259347.59	O″ = 9.24.21 (h m s)	e''_0 = 11,109	t''_s = 1,259397.68
T′ = 16810,879	e'_1 = 1,885	r′ = 1.66	T″ = 15774,24	e''_1 = 2,066	r″ = 1.57
τ′ = — 0,439	N′ = 13348	t'_m = 1,255956.93	τ″ = — 0,41	N″ = 125249/10	t''_m = 1,255957.41

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,255957.17$$

Pendolo lungo

B = 764,66

f = 8,43

$\theta_{f_0} = 14.217$ | $\theta_{p_0} = 14,18$

$\theta_{f_1} = 14,193$ | $\theta_{p_1} = 14,17$

$\theta_f = 14,205$ | $\theta_p = 14,175$

$\log \rho = \bar{3},09046$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0700748$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999490$

Elementi	l	m	u	s
I	3,89	0,040	0,051	1,945
II	0,15	0,054	0,000	3,965
III	0,424	0,452	0,011	4,252
IV	249,5378	1,244	6454.715	129,233
V	0,489	0,573	0,018	254,246
VI	0,490	0,590	0,019	259,187
VII	4,4513	484,761	960,515	256,716

I′ = 22,86 μ
I″ = 32,40
δ_0 = 34,75
δ_1 = 34,28
δ = 34,51
L = { 100 cm. — 16,10 μ
a 14°,196 }

C = + 0,10901 cm

O′ = 8.19.15 (h m s)	e'_0 = 14.071	t'_s = 1,611800.04	O″ = 8.26.39 (h m s)	e''_0 = 11,535	t''_s = 1,611801.36
T′ = 17491,718	e'_1 = 1,588	r′ = 2.54	T″ = 15427,122	e''_1 = 1,690	r″ = 1.92
τ′ = — 0,464	N′ = 10852	t'_m = 1,607397.24	τ″ = — 0,410	N″ = 95711/10	t''_m = 1,607398.52

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,607397.88$$

Esperienza 28ª.

(dal 2 al 4 Febbraio 1887).

Palla piccola d'ottone piena — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 763,47$	$\theta_{f_0} = 14,265$	$\theta_{p_0} = 14,27$	$\log \varrho = \bar{3},08965$
	$\theta_{f_1} = 14,220$	$\theta_{p_1} = 14,23$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},1659562$
$f = 8,36$	$\theta_f = 14,242$	$\theta_p = 14,25$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999364$

Elementi	l	m	u	s
I	3,97	0,041	0,054	1,985
II	0,15	0,054	0,000	4,045
III	0,422	0,451	0,011	4,331
IV	149,5227	0,874	1627,779	79,303
V	0,491	0,525	0,016	154,310
VI	0,490	0,541	0,017	159,249
VII	4,4483	386,629	765,031	156,780

$I' = \overset{\mu}{22},65$
$I'' = 32,23$
$\delta_0 = 28,44$
$\delta_1 = 29,23$
$\delta = 28,83$
$L = \left\{ \begin{array}{l} 100\ cm. - \overset{\mu}{16},42 \\ a\ 14°,21 \end{array} \right.$

$C = + \overset{cm}{0},05426$

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.12.46}$	$\varepsilon'_0 = 14,468$	$t'_s = 1,259539.22$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.11.38}$	$\varepsilon''_0 = 13,475$	$t''_s = 1,259537.04$
$T' = 15094,764$	$\varepsilon'_1 = 1,865$	$r' = 2.22$	$T'' = 13788,560$	$\varepsilon''_1 = 2,053$	$r'' = 2.09$
$\tau' = -0,446$	$N' = 11984$	$t'_m = 1,256098.00$	$\tau'' = -0,408$	$N'' = \frac{109470}{10}$	$t''_m = 1,256095.87$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,256096.93$$

Pendolo lungo

$B = 766,99$	$\theta_{f_0} = 14,220$	$\theta_{p_0} = 14,18$	$\log \varrho = \bar{3},09176$
	$\theta_{f_1} = 14,187$	$\theta_{p_1} = 14,17$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},1680553$
$f = 8,48$	$\theta_f = 14,203$	$\theta_p = 14,175$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999361$

Elementi	l	m	u	s
I	4,00	0,041	0,055	2,000
II	0,15	0,054	0,000	4,075
III	0,424	0,452	0,011	4,362
IV	249,4919	1,244	6452,338	129,320
V	0,489	0,524	0,016	254.310
VI	0,490	0,541	0,017	259,248
VII	4,4483	386,629	765,029	256,779

$I' = \overset{\mu}{22},83$
$I'' = 32,72$
$\delta_0 = 31,19$
$\delta_1 = 32,40$
$\delta = 31,80$
$L = \left\{ \begin{array}{l} 100\ cm. - \overset{\mu}{14},65 \\ a\ 14°,215 \end{array} \right.$

$C = + \overset{cm}{0},13880$

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.38.06}$	$\varepsilon'_0 = 12,977$	$t'_s = 1,611876.10$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{8.41.51}$	$\varepsilon''_0 = 10,984$	$t''_s = 1,611872.67$
$T' = 14323,480$	$\varepsilon'_1 = 1,420$	$r' = 2.13$	$T'' = 12869,185$	$\varepsilon''_1 = 1,517$	$r'' = 1.69$
$\tau' = -0,350$	$N' = 8886$	$t'_m = 1,607471.96$	$\tau'' = -0,316$	$N'' = \frac{79838}{10}$	$t''_m = 1,607469.87$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,607470.41$$

Esperienza 29ª.

(dal 4 al 7 Febbraio 1887).

Palla grossa di alluminio — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 771,01

f = 8,12

$\theta_{f_0} = 14,225$ — $\theta_{f_0} = 14,210$ — $\theta_f = 14,217$

$\theta_{p_0} = 14,21$ — $\theta_{p_1} = 14,21$ — $\theta_p = 14,21$

$\log \varrho = \bar{3},09405$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},6701252$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9997964$

Elementi	l	m	u	s
I	4,00	0,041	0,055	2,000
II	0,15	0,054	0,000	4,075
III	0,423	0,452	0,012	4,362
IV	147,516	0,858	1555,735	78,331
V	0,479	0,395	0,012	152,329
VI	0,490	0,409	0,013	159,186
VII	6,3730	358,163	1453,253	155,755

I′ = 22,83 μ

I″ = 32,72

δ_0 = 32,95

δ_1 = 32,32

δ = 32,63

L = { 100 *cm.* — 14,65 μ ; a 14°,215 }

C = + 0,04486 cm

1ª Esperienza elementare

O = 5.27.39 (h m s)	e_0 = 15,961	t_s = 1,255930.42
T = 8736,483	e_1 = 2,279	r = 2.83
τ = — 0,231	N = 6956	t_m = 1,252498.36

t = 1,252498.36

2ª Esperienza elementare

O = 8.23.21 (h m s)	e_0 = 13,677	t_s = 1,255926.23
T = 9211,207	e_1 = 1,799	r = 2.00
τ = — 0,244	N = 7334	t_m = 1,252495.01

t = 1,252495.01

3ª Esperienza elementare

O = 11.12.50 (h m s)	e_0 = 13,966	t_s = 1,255928.46
T = 9603,083	e_1 = 1,683	r = 2.00
τ = — 0,254	N = 7646	t_m = 1,252497.24

t = 1,252497.24

Esperienza 29ª.

(dal 4 al 7 Febbraio 1887).

Palla grossa di alluminio — *Sospensione superiore*

Pendolo lungo

B = 763,81	$\theta_{f_0} = 14,207$	$\theta_{p_0} = 14,22$	$\log \varrho = \bar{3},08999$
	$\theta_{f_1} = 14,213$	$\theta_{p_1} = 14,22$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},6656935$
$f =$ 7,90	$\theta_f = 14,210$	$\theta_p = 14,22$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9997984$

Elementi	l	m	u	s
I	4,08	0,042	0,058	2,040
II	0,15	0,054	0,000	4,155
III	0,423	0,450	0,011	4,442
IV	247,4281	1,304	6652,648	128,367
V	0,486	0,395	0,012	252,324
VI	0,490	0,409	0,013	259,185
VII	6,3780	358,163	1453,254	255,754

$I' = 23^{\mu},65$

$I'' = 32,71$

$\delta_0 = 40,78$

$\delta_1 = 38,76$

$\delta = 39,77$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 15^{\mu},00 \\ a\ 14°,182 \end{cases}$

$C = + 0^{cm},14971$

1ª Esperienza elementare

O = 6ʰ.03ᵐ.53ˢ	e_0 = 13,976	t_s = 1,609164.14
T = 9960,997	e_1 = 1,320	r = 2.32
τ = − 0,271	N = 6190	t_m = 1,604768.12

$t = 1,604768.12$

2ª Esperienza elementare

O = 9ʰ 09ᵐ.02ˢ	e_0 = 13,719	t_s = 1,609159.81
T = 9384,875	e_1 = 1,482	r = 2,36
τ = − 0,255	N = 5832	t_m = 1,604768.75

$t = 1,604763.75$

3ª Esperienza elementare

O = 11ʰ.55ᵐ.13ˢ	e_0 = 14,740	t_s = 1,609162.48
T = 9983,516	e_1 = 1,372	r = 2,57
τ = − 0,272	N = 6204	t_m = 1,604766.21

$t = 1,604766.21$

Esperienza 30ª.

(dal 5 al 9 Marzo 1887).

Palla grossa di piombo ed antimonio — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 760,20	$\theta_{f_0} = 15,155$	$\theta_{p_0} = 15,15$	$\log \varrho = \bar{3},08629$
	$\theta_{f_1} =$	$\theta_{p_1} =$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0706288$
f = 8,98	$\theta_f = 15,155$	$\theta_p = 15,15$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999489$

Elementi	l	m	u	s
I	3,80	0,039	0,047	1,900
II	0,15	0,054	0,000	3,875
III	0,423	0,452	0,012	4,162
IV	149,6965	0,858	1559,537	78,221
V	0,479	0,573	0,017	152,309
VI	0,490	0,586	0,018	159,168
VII	6,3747	1406,772	5716,639	155,736

I′ = 24,18 μ
I″ = 34,40
δ_0 = 42,03
δ_1 = 41,37
δ = 41,70
L = { 100 cm. — 3,54 μ / a 15°,10 }

C = — 0,00824 cm

O′ = 12.21.07 (h m s)	e'_0 = 9,260	t'_s = 1,255895.07	O″ = 12.22.39 (h m s)	e''_0 = 8,939	t''_s = 1,255900.74
T′ = 14817,336	e'_1 = 3,934	r' = 1.81	T″ = 13781,52	e''_1 = 4,070	r'' = 1.78
τ' = — 0,295	N′ = 11798	t'_m = 1,252464.13	τ'' = — 0,27	N″ = 109732/10	t''_m = 1,252469.81

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,252466.97$$

Pendolo lungo

B = 760,80	$\theta_{f_0} = 15,10$	$\theta_{p_0} = 15,03$	$\log \varrho = \bar{3},08677$
	$\theta_{f_1} = 15,10$	$\theta_{p_1} = 15,04$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0711084$
f = 9,10	$\theta_f = 15,10$	$\theta_p = 15,035$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999489$

Elementi	l	m	u	s
I	3,71	0,038	0,044	1,885
II	0,15	0,054	0.000	3,785
III	0,423	0,450	0,011	4,072
IV	247,7813	1,304	6671,650	128,174
V	0,486	0,572	0,017	252,307
VI	0,490	0,586	0,018	259,170
VII	6,3747	1406,772	5716,603	255,738

I′ = 23,44 μ
I″ = 34,23
δ_0 = 35,47
δ_1 = 30,36
δ = 32,91
L = { 100 cm. — 3,09 μ / a 15°,11 }

C = + 0,02613 cm

O′ = 11.38.55 (h m s)	e'_0 = 8,558	t'_s = 1,609172.18	O″ = 11.39.59 (h m s)	e''_0 = 8,173	t''_s = 1,609170.97
T′ = 18175,972	e'_1 = 2,839	r' = 1.67	T″ = 16747.626	e''_1 = 2,940	r'' = 1.61
τ' = — 0,371	N′ = 11295	t'_m = 1,604776.78	τ'' = — 0,340	N″ = 101074/10	t''_m = 1,604775.62

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604776.20$$

Esperienza 32ª.

(dal 12 al 15 Marzo 1887).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 749{,}79$	$\theta_{f_0} = 15{,}095$	$\theta_{p_0} = 15{,}10$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08035$
	$\theta_{f_1} = 15{,}080$	$\theta_{p_1} = 15{,}10$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}4188314$
$f = 8{,}97$	$\theta_f = 15{,}087$	$\theta_p = 15{,}10$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9998860$

Elementi	l	m	u	s
I	4,00	0,041	0,055	2,000
II	0,15	0,054	0,000	4,075
III	0,423	0,452	0,012	4,362
IV	147,5594	0,858	1556,644	78,353
V	0,479	0,527	0,016	152,372
VI	0,490	0,541	0,017	159,201
VII	6,3445	599,644	3251,146	155,784

$I' = \overset{\mu}{22{,}76}$

$I'' = 33{,}89$

$\delta_0 = 30{,}22$

$\delta_1 = 29{,}56$

$\delta = 29{,}89$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{1{,}67} \\ a\ 15^\circ{,}06 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0{,}00738}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{10.27.24}$	$e'_0 = 12{,}443$	$t'_s = 1{,}256005.35$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.16.31}$	$e''_0 = 11{,}378$	$t''_s = 1{,}256007.82$
$T' = 8693{,}012$	$e'_1 = 3{,}833$	$r' = 2.63$	$T'' = 13388{,}223$	$e''_1 = 1{,}942$	$r'' = 1.57$
$\tau' = -0{,}199$	$N' = 6921$	$t'_m = 1{,}252573.29$	$\tau'' = -0{,}310$	$N'' = \frac{106591}{10}$	$t''_m = 1{,}252576.80$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252575.04$$

2ª Esperienza elementare

$O = \overset{h\ m\ s}{12.52.55}$	$e_0 = 3{,}183$	$t_s = 1{,}256004.44$
$T = 8767{,}112$	$e_1 = 1{,}242$	$r = 0.26$
$\tau = -0{,}201$	$N = 6980$	$t_m = 1{,}252574.75$

$$t = 1{,}252574.75$$

Esperienza 31ª.

(dal 10 al 11 Marzo 1887).

Palla grossa di piombo ed antimonio | *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 756,16$	$\theta_{f_0} = 15,19$	$\theta_{p_0} = 15,20$	$\log \varrho = \bar{3},08396$
	$\theta_{f_1} = 15,14$	$\theta_{p_1} = 15,14$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0682972$
$f = 8,85$	$\theta_f = 15,165$	$\theta_p = 15,17$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999492$

Elementi	l	m	u	s
I	3,80	0,039	0,047	1,900
II	0,15	0,054	0,000	3,875
III	0,423	0,452	0,012	4,162
IV	147,6965	0,858	1559,538	78,221
V	0,479	0,573	0,017	152,309
VI	0,490	0,586	0,018	159,168
VII	6,3747	1406,772	5716,646	155,736

$I' = \overset{\mu}{23},44$
$I'' = 34,23$
$\delta_0 = 25,89$
$\delta_1 = 26,74$
$\delta = 26,32$
$L = \left\{ \begin{array}{l} 100\ cm. - \overset{\mu}{3},09 \\ a\ 15^\circ,11 \end{array} \right.$

$C = - \overset{cm}{0},00824$

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.22.47}$	$e'_0 = 8,526$	$t'_s = 1,255758\ 51$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.24.11}$	$e''_0 = 8,195$	$t''_s = 1,255761.24$
$T' = 16708,238$	$e'_1 = 3,297$	$r' = 1.44$	$T'' = 15461,398$	$e''_1 = 3,397$	$r'' = 1.39$
$\tau' = -0,372$	$N' = 13305$	$t'_m = 1,252328.31$	$\tau'' = -0,340$	$N'' = \frac{123121}{10}$	$t''_m = 1.252331.08$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,252329.69$$

Pendolo lungo

$B = 755,67$	$\theta_{f_0} = 15,097$	$\theta_{p_0} = 15,03$	$\log \varrho = \bar{3},08389$
	$\theta_{f_1} = 15,077$	$\theta_{p_1} = 15,03$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0682601$
$f = 8,87$	$\theta_f = 15,087$	$\theta_p = 15,03$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999492$

Elementi	l	m	u	s
I	3,71	0,038	0,044	1,855
II	0,150	0,054	0,000	3,785
III	0,423	0,450	0,012	4,072
IV	247,7789	1,304	6671,523	128,172
V	0,486	0,572	0,017	252,305
VI	0,490	0,586	0,018	259,168
VII	6,3747	1406,772	5716,600	255,735

$I' = \overset{\mu}{22},76$
$I'' = 33,89$
$\delta_0 = 44,52$
$\delta_1 = 41,44$
$\delta = 42,98$
$L = \left\{ \begin{array}{l} 100\ cm. - \overset{\mu}{1},67 \\ a\ 15^\circ,06 \end{array} \right.$

$C = + \overset{cm}{0},02613$

$O' = \overset{h\ m\ s}{11.59.20}$	$e'_0 = 8,659$	$t'_s = 1,609051.61$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.58.45}$	$e''_0 = 8,282$	$t''_s = 1,609052.01$
$T' = 20264,851$	$e'_1 = 2,526$	$r' = 1.57$	$T'' = 18791,573$	$e''_1 = 2,647$	$r'' = 1.53$
$\tau' = -0,455$	$N' = 12594$	$t'_m = 1,604656.64$	$\tau'' = -0,420$	$N'' = \frac{116784}{10}$	$t''_m = 1,604657.07$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604656.85$$

Esperienza 32ª.

(dal 12 al 15 Marzo 1887).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

$B = 749{,}79$	$\theta_{f_0} = 15{,}095$	$\theta_{p_0} = 15{,}10$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08035$
	$\theta_{f_1} = 15{,}080$	$\theta_{p_1} = 15{,}10$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}4188314$
$f = 8{,}97$	$\theta_f = 15{,}087$	$\theta_p = 15{,}10$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9998860$

Elementi	l	m	u	s
I	4,00	0,041	0,055	2,000
II	0,15	0,054	0,000	4,075
III	0,423	0,452	0,012	4,362
IV	147,5594	0,858	1556,644	78,353
V	0,479	0,527	0,016	152,372
VI	0,490	0,541	0,017	159,201
VII	6,3445	599,644	3251,146	155,784

$I' = 22{,}76$ μ

$I'' = 33{,}89$

$\delta_0 = 30{,}22$

$\delta_1 = 29{,}56$

$\delta = 29{,}89$

$L = \begin{cases} 100\,cm. - 1{,}67 \text{ μ} \\ a\ 15°{,}06 \end{cases}$

$C = + 0{,}00738$ cm

1ª Esperienza elementare

$O' = 10.27.24$ (h m s)	$e'_0 = 12{,}443$	$t'_s = 1{,}256005.35$	$O'' = 11.16.31$ (h m s)	$e''_0 = 11{,}378$	$t''_s = 1{,}256007.82$
$T' = 8693{,}012$	$e'_1 = 3{,}833$	$r' = 2.63$	$T'' = 13388{,}223$	$e''_1 = 1{,}942$	$r'' = 1.57$
$\tau' = -0{,}199$	$N' = 6921$	$t'_m = 1{,}252573.29$	$\tau'' = -0{,}310$	$N'' = \frac{106591}{10}$	$t''_m = 1{,}252576.80$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252575.04$$

2ª Esperienza elementare

$O = 12.52.55$ (h m s)	$e_0 = 3{,}183$	$t_s = 1{,}256004.44$
$T = 8767{,}112$	$e_1 = 1{,}242$	$r = 0.26$
$\tau = -0{,}201$	$N = 6980$	$t_m = 1{,}252574.75$

$$t = 1{,}252574.75$$

Esperienza 32ª.

(dal 12 al 15 Marzo 1887).

Palla grossa d'ottone cava — *Sospensione superiore*

Pendolo lungo

$B = 743,84$	$\theta_{f_0} = 15,067$	$\theta_{p_0} = 15,04$	$\log \varrho = \bar{3},07695$
	$\theta_{f_1} = 15,067$	$\theta_{p_1} = 15,04$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},4168235$
$f = 9,06$	$\theta_f = 15,067$	$\theta_p = 15,04$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9998865$

Elementi	l	m	u	s
I	4,04	0,042	0,057	2,020
II	0,15	0,054	0,000	4,115
III	0,423	0,450	0,011	4,402
IV	247,5133	1,304	6657,227	128,370
V	0,486	0,527	0,016	252,369
VI	0,490	0,541	0,017	259,202
VII	6,3445	599,644	3251,139	255,784

$I' = \overset{\mu}{22,08}$

$I'' = 33,71$

$\delta_0 = 33,19$

$\delta_1 = 31,33$

$\delta = 32,26$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{0,57} \\ a\ 15°,07 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0,07770}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{10.31.58}$	$e'_0 = 15,183$	$t'_s = 1,609233.85$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{11.33.07}$	$e''_0 = 13,745$	$t''_s = 1,609230.95$
$T' = 9317,685$	$e'_1 = 3,670$	$r' = 4.32$	$T'' = 14873,828$	$e''_1 = 1,515$	$r'' = 2.39$
$\tau' = -0,221$	$N' = 5790$	$t'_m = 1,604835.64$	$\tau'' = -0,350$	$N'' = \frac{92426}{10}$	$t''_m = 1,604834.66$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,604835.15$$

2ª Esperienza elementare

$O = \overset{h\ m\ s}{13.12.25}$	$e_0 = 3,670$	$t_s = 1,609229.23$
$T = 9336,969$	$e_1 = 1,004$	$r = 0.27$
$\tau = -0,221$	$N = 5802$	$t_m = 1,604835.07$

$$t = 1,604835.07$$

Esperienza 33ª.

(dal 18 al 22 Marzo 1887).

Palla grossa d'argento — *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 759,89	$\theta_{f_0} = 15{,}095$	$\theta_{p_0} = 15{,}10$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08622$
	$\theta_{f_1} = 15{,}100$	$\theta_{p_1} = 15{,}12$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0653930$
f = 8,61	$\theta_f = 15{,}097$	$\theta_p = 15{,}11$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999495$

Elementi	l	m	u	s
I	3,28	0,039	0,048	1,910
II	0,15	0,054	0,000	3,895
III	0,423	0,452	0,012	4,182
IV	147,6984	0,858	1559,577	78,242
V	0,479	0,576	0,017	152,331
VI	0,490	0,589	0,019	159,185
VII	6,3701	1418,609	5756,387	155,755

$I' = 23{,}42^{\mu}$
$I'' = 33{,}72$
$\delta_0 = 39{,}29$
$\delta_1 = 38{,}71$
$\delta = 39{,}00$
L = { 100 *cm.* — $0{,}50^{\mu}$; a 15°,015 }

$C = -0{,}00834$ cm

O′ = 12.30.31 (h m s)	$e'_0 = 9{,}707$	$t'_s = 1{,}255869.56$	O″ = 12.35.58 (h m s)	$e''_0 = 9{,}321$	$t''_s = 1{,}255872.63$
T′ = 13729,448	$e'_1 = 4{,}370$	$r' = 2.08$	T″ = 12478,736	$e''_1 = 4{,}509$	$r'' = 2.02$
$\tau' = -0{,}282$	N′ = 10932	$t'_m = 1{,}252438.42$	$\tau'' = -0{,}260$	N″ = $\frac{99361}{10}$	$t''_m = 1{,}252441.53$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}252439.97$$

Pendolo lungo

B = 758,70	$\theta_{f_0} = 15.06$	$\theta_{p_0} = 15{,}03$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08567$
	$\theta_{f_1} = 15{,}05$	$\theta_{p_1} = 15{,}02$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0468322$
f = 8,71	$\theta_f = 15{,}055$	$\theta_p = 15{,}025$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999496$

Elementi	l	m	u	s
I	3,71	0,038	0,044	1,855
II	0,15	0,054	0,000	3,785
III	0,423	0,450	0,011	4,072
IV	247,8019	1,304	6672,764	128,184
V	0,486	0,576	0,017	252,328
VI	0,490	0,589	0,019	259,186
VII	6,3700	1418,609	5756,370	255,756

$I' = 23{,}33^{\mu}$
$I'' = 34{,}01$
$\delta_0 = 43{,}03$
$\delta_1 = 42{,}59$
$\delta = 42{,}81$
L = { 100 *cm.* — $4{,}28^{\mu}$; a 15°,04 }

$C = +0{,}02581$ cm

O′ = 12.37.51 (h m s)	$e'_0 = 11{,}719$	$t'_s = 1{,}609149.66$	O″ = 12.37.04 (h m s)	$e''_0 = 11{,}399$	$t''_s = 1{,}609150.43$
T′ = 15568,862	$e'_1 = 4{,}364$	$r' = 3.39$	T″ = 14525,960	$e''_1 = 4{,}536$	$r'' = 3.36$
$\tau' = -0{,}339$	N′ = 9675	$t'_m = 1{,}604752.60$	$\tau'' = -0{,}320$	N″ = $\frac{90269}{10}$	$t''_m = 1{,}604753.39$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}604752.99$$

Esperienza 34ª.

(dal 22 al 25 Marzo 1887).

Palla piccola di platino *Sospensione superiore*

Pendolo corto

B = 759,74	$\theta_{f_0} = 15,065$	$\theta_{p_0} = 15,07$	$\log \varrho = \bar{3},08618$
	$\theta_{f_1} = 15,075$	$\theta_{p_1} = 15,09$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},17551886$
f = 8,78	$\theta_f = 15,070$	$\theta_p = 15,08$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999753$

Elementi	l	m	u	s
I	3,85	0,040	0,049	1,925
II	0,15	0,054	0,000	3,925
III	0,422	0,451	0,012	4,211
IV	149,6295	0,874	1630,105	79,237
V	0,491	0,827	0,025	154,297
VI	0,490	0,844	0,027	159,238
VII	4,4509	994,286	1969,740	156,768

$I' = 23{,}11^{\mu}$
$I'' = 34,27$
$\delta_0 = 34,97$
$\delta_1 = 33,68$
$\delta = 34,32$
$L = \begin{cases} 100\ cm. - 4{,}28^{\mu} \\ a\ 15^{\circ},04 \end{cases}$

$C = +\ 0{,}01329^{cm}$

$O' = 12^h.34^m.26^s$	$e'_0 = 9,194$	$t'_s = 1,259571.07$	$O'' = 12^h.26^m.52^s$	$e''_0 = 9,495$	$t''_s = 1,259573.43$
$T' = 14862,003$	$e'_1 = 4,025$	$r' = 1.83$	$T'' = 14888,236$	$e''_1 = 4,118$	$r'' = 1.94$
$\tau' = -0,324$	$N' = 11799$	$t'_m = 1,256130.07$	$\tau'' = -0,330$	$N'' = \frac{118198}{10}$	$t''_m = 1,256132.31$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,256131.19$$

Pendolo lungo

B = 759,80	$\theta_{f_0} = 15,068$	$\theta_{p_0} = 15,030$	$\log \varrho = \bar{3},08625$
	$\theta_{f_1} = 15,077$	$\theta_{p_1} = 15,035$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7554937$
f = 8,91	$\theta_f = 15,073$	$\theta_p = 15,032$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999753$

Elementi	l	m	u	s
I	3,80	0,039	0,047	1,900
II	0,15	0,054	0,000	3,875
III	0,424	0,452	0,011	4,162
IV	249,6784	1,244	6461,992	129,213
V	0,489	0,827	0,025	254,297
VI	0,490	0,844	0,027	259,237
VII	4,4509	994,286	1969,738	256,767

$I' = 22{,}01^{\mu}$
$I'' = 34,36$
$\delta_0 = 54,41$
$\delta_1 = 52,85$
$\delta = 53,63$
$L = \begin{cases} 100\ cm. - 3{,}21^{\mu} \\ a\ 15^{\circ},054 \end{cases}$

$C = +\ 0{,}04920^{cm}$

$O' = 12^h.51^m.00^s$	$e'_0 = 7,584$	$t'_s = 1,6112006.74$	$O'' = 12^h.51^m.51^s$	$e''_0 = 7,229$	$t''_s = 1,612009.05$
$T' = 16989,297$	$e'_1 = 2,698$	$r' = 1.38$	$T'' = 15603,228$	$e''_1 = 2,796$	$r'' = 1.33$
$\tau' = -0,358$	$N' = 10539$	$t'_m = 1,607603.89$	$\tau'' = -0,330$	$N'' = \frac{96792}{10}$	$t''_m = 1,607606.24$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,607605.06$$

Esperienza 35ª.

(dal 25 al 27 Marzo 1887).

Palla piccola di platino — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 753,64$	$\theta_{f_0} = 15,078$	$\theta_{p_0} = 15,095_{s}$	$\log \varrho = \bar{3},08258$
	$\theta_{f_1} = 15,085$	$\theta_{p_1} = 15,105$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7512791$
$f = 8,97$	$\theta_f = 15,082$	$\theta_p = 15,100$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999755$

Elementi	l	m	u	s
I	3,69	0,038	0,043	1,845
II	0,15	0,054	0,000	3,765
III	0,425	0,467	0,012	4,053
IV	99,7038	0,438	363,007	54,117
V	0,495	0,845	0,027	104,217
VI	0,490	0,844	0,027	109,160
VII	4,4509	994,286	1969,740	106,689

$I' = 22\overset{\mu}{,}01$

$I'' = 34,36$

$\delta_0 = 46,03$

$\delta_1 = 44,55$

$\delta = 45,29$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 3\overset{\mu}{,}21 \\ a\ 15°,054 \end{cases}$

$C = -\overset{cm}{0,00834}$

$O' = 13.41.59$ (h m s)	$e'_0 = 13,339$	$t'_s = 1,039303.22$	$O'' = 13.43.19$ (h m s)	$e''_0 = 12,822$	$t''_s = 1,039306.70$
$T' = 11194,578$	$e'_1 = 7,436$	$r' = 9.81$	$T'' = 9877,575$	$e''_1 = 7,634$	$r'' = 9.57$
$\tau' = -0,243$	$N' = 10771$	$t'_m = 1,036455.69$	$\tau'' = -0,212$	$N'' = \frac{95038}{10}$	$t''_m = 1,036459.37$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036457.53$$

Pendolo lungo

$B = 755,81$	$\theta_{f_0} = 15,058$	$\theta_{p_0} = 15,020$	$\log \varrho = \bar{3},08396$
	$\theta_{f_1} = 15,063$	$\theta_{p_1} = 15,035$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7529699$
$f = 8,91$	$\theta_f = 15,060$	$\theta_p = 15,027$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999754$

Elementi	l	m	u	s
I	3,40	0,035	0,034	1,700
II	0,15	0,054	0,000	3,475
III	0,428	0,475	0,013	3,764
IV	199,9875	0,872	2904,971	103,972
V	0,498	0,854	0,027	204,215
VI	0,490	0,844	0,026	209,160
VII	4,4509	994,286	1969,738	206,689

$I' = 22\overset{\mu}{,}97$

$I'' = 34,32$

$\delta_0 = 58,39$

$\delta_1 = 52,08$

$\delta = 55,23$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 1\overset{\mu}{,}13 \\ a\ 15°,02 \end{cases}$

$C = +\overset{cm}{0,02348}$

$O' = 13.11.36$ (h m s)	$e'_0 = 9,643$	$t'_s = 1,446448.26$	$O'' = 13.04.21$ (h m s)	$e''_0 = 9,916$	$t''_s = 1,446448.86$
$T' = 14524,134$	$e'_1 = 3,975$	$r' = 5.67$	$T'' = 14464,693$	$e''_1 = 4.088$	$r'' = 5.99$
$\tau' = -0,347$	$N' = 10041$	$t'_m = 1,442493.18$	$\tau'' = -0,349$	$N'' = \frac{99999}{10}$	$t''_m = 1,442493.44$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442493.31$$

Esperienza 36ª.

(dal 27 al 30 Marzo 1887).

Palla grossa d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 751{,}49$ $f = 8{,}68$

$\theta_{f_0} = 15{,}010$	$\theta_{p_0} = 15{,}035$
$\theta_{f_1} = 15{,}055$	$\theta_{p_0} = 15{,}070$
$\theta_f = 15{,}032$	$\theta_p = 15{,}052$

$\log \varrho = \bar{3},08148$

$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0606223$

$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999501$

Elementi	l	m	u	s
I	3,65	0,038	0,042	1,825
II	0,15	0,054	0,000	3,725
III	0,429	0,485	0,013	4,015
IV	97,8134	0,427	340,761	53,136
V	0,498	0,607	0,019	102,291
VI	0,490	0,589	0,019	109,155
VII	4,3700	1418,609	5756,374	105,725

$I' = 22\overset{\mu}{,}97$

$I'' = 34{,}32$

$\delta_0 = 51{,}29$

$\delta_1 = 49{,}82$

$\delta = 50{,}55$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 1\overset{\mu}{,}13 \\ a\ 15^\circ{,}02 \end{cases}$

$C = -0\overset{cm}{,}03159$

1ª Esperienza elementare

$O' = 9^h.25^m.54^s$	$e'_0 = 7{,}830$	$t'_s = 1{,}034804.64$	$O'' = 13^h.21^m.13^s$	$e''_0 = 8{,}932$	$t''_s = 1{,}034805.52$
$T' = 10885{,}359$	$e'_1 = 4{,}528$	$r' = 3.47$	$T'' = 11927{,}128$	$e''_1 = 4{,}484$	$r'' = 4.03$
$\tau' = -0{,}250$	$N' = 10519$	$t'_m = 1{,}031975.71$	$\tau'' = -0{,}270$	$N'' = \frac{115257}{10}$	$t''_m = 1{,}031976.02$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}031975.86$$

2ª Esperienza elementare

$O = 13^h.20^m.35^s$	$e_0 = 9{,}226$	$t_s = 1{,}034805.12$
$T = 12866{,}027$	$e_1 = 4{,}344$	$r = 4.09$
$\tau = -0{,}295$	$N = 12433$	$t_m = 1{,}031975.58$

$$t = 1{,}031975.58$$

Esperienza 36ª.

(dal 27 al 30 Marzo 1887).

Palla grossa d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

B = 752,01	$\theta_{f_0} = 15{,}020$	$\theta_{p_0} = 15{,}025$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08181$
	$\theta_{f_1} = 15{,}022$	$\theta_{p_0} = 15{,}025$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0609621$
$f =$ 8,68	$\theta_f = 15{,}021$	$\theta_p = 15{,}025$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999500$

Elementi	l	m	u	s
I	3,34	0,034	0,032	1,670
II	0,15	0,054	0,000	3,415
III	0,431	0,484	0,013	3,705
IV	198,125	0,867	2835,747	102,983
V	0,497	0,608	0,019	202,294
VI	0,490	0,589	0,019	209,158
VII	6,3700	1418,609	5756,370	205,728

$I' = 23{,}28^{\mu}$

$I'' = 34{,}28$

$\delta_0 = 33{,}88$

$\delta_1 = 31{,}52$

$\delta = 32{,}70$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 3{,}44^{\mu} \\ a\ 15^{\circ}{,}02 \end{cases}$

$$C = +\ 0{,}00329^{cm}$$

1ª Esperienza elementare

$O' = 8.38.15^{h\,m\,s}$	$e'_0 = 7{,}945$	$t'_s = 1{,}443250.16$	$O'' = 13.12.26^{h\,m\,s}$	$e''_0 = 7{,}718$	$t''_s = 1{,}443255.43$
$T' = 13182{,}968$	$e'_1 = 3{,}611$	$r' = 4.12$	$T'' = 13962{,}786$	$e''_1 = 3{,}400$	$r'' = 3.80$
$\tau' = -0{,}321$	$N' = 9134$	$t'_m = 1{,}439305.34$	$\tau'' = -0{,}300$	$N'' = \frac{96743}{10}$	$t''_m = 1{,}439310.92$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439308.13$$

2ª Esperienza elementare

$O = 13.11.51^{h\,m\,s}$	$e_0 = 7{,}947$	$t_s = 1{,}443256.18$
$T = 14884{,}618$	$e_1 = 3{,}317$	$r = 3.88$
$\tau = -0{,}317$	$N = 10313$	$t_m = 1{,}439311.59$

$$t = 1{,}439311.59$$

Esperienza 37ª.

(dal 30 Marzo al 2 Aprile 1887).

Palla piccola di platino — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 752,82	$\theta_{f_0} = 15,042$	$\theta_{p_0} = 15,05$	$\log \varrho = \bar{3},08220$
	$\theta_{f_1} = 15,045$	$\theta_{p_1} = 15,06$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7508168$
f = 8,89	$\theta_f = 15,044$	$\theta_p = 15,055$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999755$

Elementi	l	m	u	s
I	3,68	0,038	0,043	1,840
II	0,15	0,054	0,000	3,755
III	0,425	0,467	0,012	4,043
IV	99,7038	0,438	363,007	54,107
V	0,495	0,846	0,027	104,207
VI	0,490	0,844	0,027	109,150
VII	4,4509	994,286	1969,739	106,679

$I' = \overset{\mu}{23,28}$

$I'' = 34,28$

$\delta_0 = 56,81$

$\delta_1 = 55,30$

$\delta = 56,05$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{3,44} \\ a\ 15°,02 \end{cases}$

$C = -\overset{cm}{0,00835}$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{8.56.35}$	$e'_0 = 7,157$	$t'_s = 1,039281.05$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{12.55.46}$	$e''_0 = 6,450$	$t''_s = 1,039283.58$
$T' = 10993,766$	$e'_1 = 4,278$	$r' = 2.99$	$T'' = 11575,073$	$e''_1 = 3,547$	$r'' = 2.27$
$\tau' = -0,251$	$N' = 10578$	$t'_m = 1,036440.48$	$\tau'' = -0,260$	$N'' = \frac{111373}{10}$	$t''_m = 1,036443.62$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,036442.05$$

2ª Esperienza elementare

$O = \overset{h\ m\ s}{12.56.07}$	$e_0 = 6,524$	$t_s = 1,039278.29$
$T = 12253,371$	$e_1 = 3,489$	$r = 2.27$
$\tau = -0,279$	$N = 11790$	$t_m = 1,036438.44$

$$t = 1,036438.44$$

Esperienza 37ª.

(dal 30 Marzo al 2 Aprile 1887).

Palla piccola di platino — *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

$B = 751,77$	$\theta_{f_0} = 15,035$	$\theta_{p_0} = 15,03$	$\log \varrho = \bar{3},08170$
	$\theta_{f_1} = 15,052$	$\theta_{p_1} = 15,04$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{5},7507398$
$f = 8,54$	$\theta_f = 15,044$	$\theta_p = 15,035$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999756$

Elementi	l	m	u	s
I	3,45	0,036	0,035	1,725
II	0,15	0,054	0,000	3,525
III	0,428	0,475	0,013	3,814
IV	199,9305	0,872	2903,315	103,994
V	0,498	0,854	0,027	204,208
VI	0,490	0,844	0,027	209,153
VII	4,4509	994,286	1969,738	206,682

$I' = \overset{\mu}{24},67$

$I'' = 34,27$

$\delta_0 = 34,67$

$\delta_1 = 32,22$

$\delta = 33,44$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{2},68 \\ \text{a}\ 15°,03 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0},02351$

1ª Esperienza elementare

$O' = \overset{h\ m\ s}{9.01.52}$	$e'_0 = 6,807$	$t'_s = 1,446456.36$	$O'' = \overset{h\ m\ s}{14.03.55}$	$e''_0 = 7,110$	$t''_s = 1,446460.66$
$T' = 12031,858$	$e'_1 = 3,400$	$r' = 3.26$	$T'' = 13860,690$	$e''_1 = 3,107$	$r'' = 3.21$
$\tau' = -0,234$	$N' = 8318$	$t'_m = 1,442503.67$	$\tau'' = -0,270$	$N'' = \frac{95823}{10}$	$t''_m = 1,442507.99$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,442505.83$$

2ª Esperienza elementare

$O = \overset{h\ m\ s}{14.04.40}$	$e_0 = 7,303$	$t_s = 1,446460.71$
$T = 14706,452$	$e_1 = 3,032$	$r = 3.27$
$\tau = -0,286$	$N = 10167$	$t_m = 1,442508.00$

$$t = 1,442508.00$$

Esperienza 39ª.

(dal 7 al 9 Aprile 1887).

Palla piccola d'ottone cava — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

B = 742,09	$\theta_{f_0} = 15,01$	$\theta_{p_0} = 15,03$	$\log \varrho = \bar{3},07605$
	$\theta_{f_1} = 15,03$	$\theta_{p_1} = 15,05$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},3336689$
$f =$ 8,45	$\theta_f = 15,02$	$\theta_p = 15,04$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999062$

Elementi	l	m	u	s
I	3,95	0,041	0,053	1,975
II	0,15	0,054	0,000	4,025
III	0,422	0,451	0,012	4,311
IV	149,5010	0,874	1627,306	79,273
V	0,491	0,525	0,016	154,269
VI	0,490	0,541	0,017	159,201
VII	4,4425	249,964	627,329	156,735

$I' = \overset{\mu}{23,81}$

$I'' = 34,79$

$\delta_0 = 30,23$

$\delta_1 = 30,38$

$\delta = 30,30$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{5,31} \\ a\ 15°,04 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0,08716}$

O = $\overset{h\ \ m\ \ s}{12.04.53}$	e_0 = 18,661	t_s = 1,259330.72
T = 12828,974	e_1 = 1,209	r' = 2.80
τ = — 0,172	N = 10187	t_m = 1,255889.41

$t = 1,255889.41$

Pendolo lungo

B = 743,14	$\theta_{f_0} = 15,053$	$\theta_{p_0} = 15,03$	$\log \varrho = \bar{3},07665$
	$\theta_{f_1} = 15,050$	$\theta_{p_1} = 15,03$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},3338300$
$f =$ 8,62	$\theta_f = 15,051$	$\theta_p = 15,03$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999062$

Elementi	l	m	u	s
I	4,05	0,042	0,057	2,025
II	0,15	0,054	0,000	4,125
III	0,424	0,452	0,011	4,412
IV	249,4006	1,244	6447,619	129,324
V	0,489	0,524	0,016	254,269
VI	0,490	0,541	0,017	259,201
VII	4,4425	249,964	627,329	256,735

$I' = \overset{\mu}{24,57}$

$I'' = 35,27$

$\delta_0 = 39,69$

$\delta_1 = 39,09$

$\delta = 39,39$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - \overset{\mu}{4,23} \\ a\ 15°,03 \end{cases}$

$C = + \overset{cm}{0,21640}$

O = $\overset{h\ \ m\ \ s}{16.44.26}$	e_0 = 19,325	t_s = 1,611625.96
T = 11508,880	e_1 = 1,127	r = 3.71
τ = — 0,259	N = 7141	t_m = 1,607221.82

$t = 1,607221.82$

ALLEGATO

Misura della dilatazione dell'Acciajo e dell'Argentano, mediante l'apparecchio di Fizeau [1]. Nota del dott. M. ASCOLI.

1. In una Nota pubblicata nel 1883 [2] ho dato il risultato delle misure eseguite per determinare la costante dell'apparecchio, cioè la dilatazione del treppiede di rame che serve di sostegno al corpo sottoposto a studio ed alla lente cui sono dovuti i fenomeni di interferenza, fondamento del metodo di Fizeau. Ora ho trovato necessario di fare una piccola correzione al coefficiente di dilatazione dedotto dalle mie esperienze. Infatti dai risultati delle 8 serie di esperienze, riportati in fine della Nota citata, si deducono i seguenti valori del coefficiente medio tra 0° e 100° (o tra 20° e 80°):

I	serie	0,000016756
II	»	16801
III	»	16767
IV	»	16762
V	»	16722
VI	»	16753
VII	»	17150
VIII	»	16756

Tutti questi valori sono perfettamente concordanti tra di loro, se si eccettua il settimo, che è pure quello affetto da massimo error probabile. La media di tutti è

$$0,000\ 016808 \pm 0,000\ 000033,$$

che dà scostamenti tutti negativi, tranne uno solo.

Se si esclude il 7° valore si ottiene invece la media

$$0,000\ 016760 \pm 0,000\ 000006,$$

molto vicina a tutti i singoli valori trovati, ed avente un error probabile più che cinque volte minore del precedente. L'esclusione della settima serie è dunque completamente giustificata. Per tal modo, tenuto conto dei pesi proprî alle varie determinazioni, si ottengono per i due coefficienti a_r e b_r i valori

$$a_r = 10^{-9}\,(15846 \pm 37)$$
$$b_r = 10^{-9}\,(9,02 \pm 0,38)$$

invece di

$$a_r = 10^{-9}\,(15877 \pm 55)$$
$$b_r = 10^{-9}\,(8,90 \pm 0,41)$$

La differenza non supera il valore dell'error probabile, il quale però risulta notevolmente diminuito. Nelle successive esperienze ho adoperato i coefficienti ora calcolati.

[1] In alcune di queste misure, eseguite durante gli anni 1883 e 1884, nel laboratorio della R. Scuola d'applicazione di Roma, fui coadiuvato dal sig. dott. M. Cantone.

[2] V. Mem. della R. Accad. dei Lincei, 1882-83, serie 3ª, vol. XVI, pag.

delle esperienze non differisce da quello descritto
ottenere maggior speditezza, si è applicato un regolatore
ire, il quale permette di abbandonare l'apparecchio a sè
a si sia stabilita una temperatura costante.
acile costruzione, è affatto analogo, salvo piccole modificazioni
di descrivere, a quello adoperato dal sig. Benoit nel suo studio
izeau [1]. Esso è fondato sopra la variabilità della temperatura di
liquidi al variare della pressione. Il liquido è collocato nell'intervallo
ufe sotto al treppiede di sostegno, nella parte superiore di un piccolo
o di vetro, posto coll'altro in estremo comunicazione esternamente con un
ubo di caoutchouc flessibile e robusto. Questo, insieme alla parte inferiore del
di vetro, è pieno di mercurio, allo scopo di esercitare sul liquido diverse pres-
ni, corrispondenti alle diverse altezze alle quali viene portata l'estremità libera.
Al momento dell'ebollizione la tensione del vapore solleva rapidamente il mercurio, e mette così in azione un interruttore cui mette capo il tubo di caoutchouc. L'interruttore è collocato sul tragitto del gas che alimenta la fiamma dell'apparecchio, la quale per tal modo si spegne quando l'aria interna della stufa ha raggiunto la temperatura di ebollizione del liquido; spenta la fiamma, l'aria si raffredda, la tensione del vapore diminuisce, ed il mercurio discendendo lascia di nuovo libero il passaggio del gas che si riaccende in virtù di una piccola fiammella sempre accesa; quest'alternativa di estinzioni e riaccensioni si ripete ad intervalli sempre più brevi finchè la fiamma viene a presentare una specie di rapido moto vibratorio. La temperatura dell'aria fa allora brevissime escursioni intorno a quelle di ebollizione del liquido sotto la pressione determinata dall'altezza della colonna di mercurio cioè dalla posizione dell' interruttore.

Nell'apparecchio furono collocati due recipienti contenenti due liquidi diversi, ed uniti al medesimo interruttore mediante due tubi di caoutchouc indipendenti, che venivano sostituiti l'uno all'altro con facile manovra di due chiavette a tre vie. Per le temperature elevate serviva il regolatore contenente etere solforico, per le basse contenente etere cloridrico o cloruro d'etile il quale, sotto la pressione atmosferica, bolle a circa 12°. Si poteva disporre di un eccesso di pressione di circa 3,3 atmosfere. La temperatura poteva essere mantenuta costante entro un decimo di grado per più ore.

3. Il termometro contenuto nella stufa interna è quello adoperato nello studio del treppiede. Venne prima ripetutamente portato a 200° e più nell'olio caldo, ed a — 20° circa in una miscela frigorifera. Ogni volta che veniva tolto dall'apparecchio se ne determinava la correzione alla temperatura dell'ambiente ed a quella di ebollizione dell'acqua. In quest'ultima determinazione, il termometro veniva collocato nell'apparecchio pel 100° col bulbo immerso nell'acqua onde evitare le troppo rapide variazioni di temperatura; raggiunta l'ebollizione, si faceva effluire una parte dell'acqua in modo che il bulbo rimanesse circondato dal vapore. Nella seguente tabella sono

[1] *Travaux et mémoires du bureau international des poids et mésures*, t. I, Paris, 1881.

raccolte le correzioni medie determinate in un lungo periodo di tempo, e sono indicate le epoche in cui furono eseguite le cinque serie di esperienze delle quali sono dati in seguito i risultati.

Data			Correzione media
10	Gennaio	1883	— 0°,29
13	»	»	— 0, 29
			I Serie
1	Aprile	»	— 0, 34
19	Novembre	»	— 0, 51
20	»	»	— 0, 56
21	»	»	— 0, 53
			II Serie
30	»	»	— 0, 50
			III Serie
16	Dicembre	»	— 0, 45
17	»	»	— 0, 45
			IV Serie
3	Gennaio	1884	— 0, 29
			V Serie
20	»	»	— 0, 23
14	Febbraio	»	— 0, 28
16	»	»	— 0, 34
3[illegible]	»	»	— 0, 41

La variazione della correzione non è mai molto forte in tutto il lungo periodo di tempo, nè presenta alcun andamento progressivo costante; il suo valore, che in principio aumenta, in seguito (dopo il 21 dicembre 1883) va diminuendo per poi aumentare di nuovo lentamente (dopo il 30 gennaio 84). Perciò alle temperature osservate nelle diverse serie di esperienze ho applicata una correzione media tra la iniziale e la finale: i suoi valori sono i seguenti:

I	Serie	(21-31 marzo 1883)	— 0°,31
II	»	(23-29 novembre 1883)	— 0, 51
III	»	(5-13 dicembre 1883)	— 0, 47
IV	»	(21-23 dicembre 1883)	— 0, 37
V	»	(16-30 gennaio 1884)	— 0, 26

Le variazioni che può subire la correzione durante una serie di esperienze sono poi in gran parte eliminate, se si ha cura di alternare frequentemente le alte e le basse temperature, oppure di far succedere ad una serie di temperature ascendenti una di discendenti.

4. La prima e quarta serie furono eseguite sopra un pezzo di acciajo (B) staccato dall'estremità della verga che servì per la costruzione del metro M' per l'apparecchio del pendolo; la quinta sopra altro pezzo di acciajo (D) appartenente al metro M''; la seconda e terza sopra un cilindretto di argentano appartenente alla stessa massa dalla quale furono fatti i fili del pendolo e le punte dei metri. Ogni pezzo ha una faccia levigata specularmente per la produzione delle frangie di interferenza.

Le misure dell'altezza dei pezzi furono eseguite mediante uno sferometro di Laurent, prima studiato [1], in diversi punti della faccia levigata; eccone i risultati medi

	Acciajo B	Acciajo D	Argentano
	14,2524	14,3980	15,1365
temp.	13°,0	12°,0	15°,0

Questi valori vanno corretti dell'errore dovuto al valore dei due passi della vite che in luogo di un millimetro è, a 0°, mm. 0,9984; il 3° va poi ridotto a 0°, giacchè il coefficiente di dilatazione dell'argentano differisce da quello della vite d'acciajo dello sferometro. Per eseguire quest'ultima correzione si prese per l'acciajo il coefficiente di dilatazione 0,0000104, per l'argentano 0,0000166 ottenuto con una prima approssimazione. I valori così corretti sono

Acciajo B	mm.	14,2310
Acciajo D	»	14,3764
Argentana	»	15,1109

Le differenze che presentano tra loro le singole misure dalle quali sono dedotti questi valori, dipendenti dall'imperfetta costruzione dei pezzi, non sono mai tali da modificare sensibilmente i risultati, nè l'andamento delle esperienze.

5. Le frangie di interferenza sulle superficie metalliche si producono con maggior difficoltà che su quella dei cristalli, ed appariscono molto meno distinte, specialmente nell'argentano che si presta meno dell'acciajo a ricevere un pulimento speculare. Inoltre la forma non molto regolare della superficie levigata dà luogo a linee di forma irregolare e talvolta chiuse intorno ad un punto. Malgrado queste circostanze la lettura delle frangie e delle loro frazioni si può ancora eseguire con grande precisione. Infatti dai numeri in seguito riportati, calcolando il numero di frangie passate per i diversi punti di riferimento durante una determinata variazione di temperatura, si deducono per gli errori probabili di una puntata singola valori variabili tra $0^f,03$ e $0^f,05$, e per quelli di una puntata media tra $0^f,005$ e $0^f,010$. Si noti che i numeri corrispondenti ad ogni temperatura risultano dalla media di due o tre letture, sempre molto concordanti.

La correzione da applicarsi alla lettura delle frangie per la variazione dell'indice di rifrazione dell'aria, è sempre molto piccola in causa della piccolezza della lamina d'aria; per ciò nel calcolarla si tenne conto solo della temperatura e non della pressione.

Il numero intero da attribuirsi alle frangie che corrispondono alla minima o massima temperatura è affatto arbitrario, perciò lo ho posto uguale a 0 per tutti i punti di riferimento della minima temperatura nelle serie eseguite sull'acciajo che si dilata meno del rame, e della massima nelle serie sull'argentano che si dilata più del rame.

Nelle seguenti tabelle sono raccolti i dati delle esperienze: t rappresenta la temperatura corretta, A, B, C ecc., le letture pei diversi punti di riferimento, f' la loro media aritmetica, c la correzione per la variabilità dell'indice di refrazione dell'aria, ed $f = f' + c$.

[1] Vedi il citato mio lavoro sull'apparecchio Fizeau § 58.

I SERIE — Acciajo B.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	12°.39	23°.49	30°.24	37°.32	42°.44	12°.69	49°.44	17°.24	58°.69	13°.07	64°.87	12°.19	67°.69	12°.29	55°.89
A	1,02	4,07	5,90	7,80	9,25	1,20	11,17	2,30	13,65	1,25	15,35	0,90	16,20	0,90	12,87
B	0,07	3,10	4,95	6,90	8,30	0,15	10,23	1,40	12,72	0,30	14,47	0,05	15,30	0,10	12,00
C	0,55	3,60	5,45	7,35	8,75	0,65	10,62	1,80	13,20	0,75	14,80	0,55	15,70	0,60	12,50
D	0,20	3,27	5,10	7,05	8,40	0,30	10,33	1,60	12,90	0,40	14,60	0,15	15,40	0,30	12,15
E	0,85	3,90	5,72	7,55	9,00	0,90	10,85	2,17	13,43	1,00	15,18	0,75	15,82	0,80	12,72
F	0,92	3,98	5,80	7,70	9,12	1,00	10,97	2,25	13,55	1,20	15,27	0,85	16,10	0,90	12,82
G	0,32	3,45	5,13	7,07	8,57	0,40	10,45	1,70	13,02	0,55	14,75	0,30	15,50	0,30	12,25
H	0,92	4,00	5,87	7,73	9,05	1,00	11,05	2,25	13,50	1,15	15,20	0,90	16,10	0,90	12,90
I	0,80	3,90	5,68	7,60	8,97	0,90	10,90	2,10	13,45	1,05	15,10	0,80	15,90	0,80	12,75
L	1,00	4,07	5,92	7,80	9,25	1,15	11,20	2,40	13,67	1,30	15,40	0,95	16,28	1,00	12,95
M	0,30	3,42	5,10	7,10	8,50	0,40	10,50	1,57	12,98	0,50	14,62	0,30	15,50	0,35	12,28
N	0,93	4,00	5,83	7,70	9,05	1,00	10,98	2,15	13,52	1,00	15,13	0,85	15,97	0,90	12,77
O	0,87	3,92	5,82	7,70	9,07	0,95	10,97	2,12	13,50	1,10	15,13	0,85	16,05	0,85	12,77
P	0,60	3,70	5,50	7,45	8,80	0,70	10,70	1,92	13,22	0,80	15,00	0,50	15,72	0,65	12,60
Q	0,67	3,80	5,50	7,50	8,95	0,85	10,87	2,05	13,28	0,95	15,05	0,60	15,93	0,70	12,65
R	0,05	3,10	4,98	6,95	8,35	0,15	10,18	1,55	12,80	0,35	14,60	0,10	15,35	0,15	12,15
S	1,00	4,00	6,00	7,90	9,20	1,10	11,10	2,30	13,65	1,25	15,38	0,95	16,13	1,00	12,95
T	0,07	3,10	5,05	7,00	8,40	0,20	10,27	1,60	12,90	0,40	14,60	0,15	15,38	0,10	12,10
f'	0,602	3,677	5,517	7,436	8,832	0,722	10,741	1,941	13,274	0,850	14,980	0,583	15,742	0,628	12,677
c	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,001	0,003	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004
f	0,603	3,679	5,519	7,439	8,835	0,723	10,744	1,942	13,278	0,851	14,984	0,584	15,746	0,629	12,681

Spessore della lamina d'aria mm. 0,019.

II Serie — Argentano.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	12,44	60,32	12,79	53,44	12,94	44,49	11,82	24,84	12,34	64,79
A	2,60	0,83	2,65	1,05	2,65	1,37	2,70	2,17	2,75	0,65
B	2,85	0,93	2,75	1,22	2,80	1,70	2,80	2,40	2,80	0,85
C	2,40	0,50	2,40	0,73	2,35	1,15	2,40	1,75	2,40	0,35
D	2,50	0,50	2,50	0,62	2,40	1,17	2,45	1,77	2,35	0,45
E	2,35	0,66	2,35	0,80	2,30	1,20	2,40	1,92	2,45	0,45
F	2,10	0,32	2,20	0,68	2,20	1,00	2,25	1,68	2.20	0,25
G	2,05	0,48	2,05	0,57	2,10	0,90	2,10	1,60	2,10	0,22
H	2,55	0,68	2,60	0,98	2,60	1,47	2,70	2,20	2,65	0,72
I	2,15	0,28	2,20	0,47	2,10	0,95	2,25	1,72	2,25	0,22
L	2,30	0,48	2,35	0,80	2,25	1,10	2,40	1,92	2,35	0,40
M	1,95	0,33	2,00	0,45	2,00	0,72	2,10	1,58	2,20	0,07
N	2,70	1,00	2,90	1,40	2,75	1,60	2,95	2,40	2,90	0,97
O	2,75	0,98	2,75	1,23	2,85	1,72	2,80	2,40	2,90	0,90
P	2,70	1,00	2,70	1,30	2,70	1,65	2,85	2,42	2,80.	0,95
Q	1,95	0,40	2,00	0,47	2,00	0,68	2,10	1,50	2,10	0,17
R	2,00	0,17	2,05	0,50	2,00	0,95	2,00	1,57	2,10	0,17
S	2,40	0,63	2,45	0,90	2,50	1,30	2,50	1,97	2,50	0,57
T	2,00	0,33	2,10	0,55	2,30	1,00	2,15	1,65	2,20	0,27
U	2,60	0,95	2,60	1,40	2,60	1,60	2,70	2,35	2,60	0,85
f'	2,363	0,602	2,400	0,848	2,393	1,222	2,452	1,945	2,452	0,499
c	0,001	0,004	0,001	0,003	0,001	0,003	0,001	0,002	0,001	0,004
f	2,364	0,606	2,401	0,851	2,394	1,225	2,453	1,947	2,453	0,503

Spessore della lamina d'aria mm. 0,20.

I Serie — Acciajo B.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	12°.39	23°.49	30°.24	37°.32	42°.44	12°.69	49°.44	17°.24	58°.69	13°.07	64°.87	12°.19	67°.69	12°.29	55°.89
A	1,02	4,07	5,90	7,80	9,25	1,20	11,17	2,30	13,65	1,25	15,35	0,90	16,20	0,90	12,87
B	0,07	3,10	4,95	6,90	8,30	0,15	10,23	1,40	12,72	0,30	14,47	0,05	15,30	0,10	12,00
C	0,55	3,60	5,45	7,35	8,75	0,65	10,62	1,80	13,20	0,75	14,80	0,55	15,70	0,60	12,50
D	0,20	3,27	5,10	7,05	8,40	0,30	10,33	1,60	12,90	0,40	14,60	0,15	15,40	0,30	12,15
E	0,85	3,90	5,72	7,55	9,00	0,90	10,85	2,17	13,43	1,00	15,18	0,75	15,82	0,80	12,72
F	0,92	3,98	5,80	7,70	9,12	1,00	10,97	2,25	13,55	1,20	15,27	0,85	16,10	0,90	12,82
G	0,32	3,45	5,13	7,07	8,57	0,40	10,45	1,70	13,02	0,55	14,75	0,30	15,50	0,30	12,25
H	0,92	4,00	5,87	7,73	9,05	1,00	11,05	2,25	13,50	1,15	15,20	0,90	16,10	0,90	12,90
I	0,80	3,90	5,68	7,60	8,97	0,90	10,90	2,10	13,45	1,05	15,10	0,80	15,90	0,80	12,75
L	1,00	4,07	5,92	7,80	9,25	1,15	11,20	2,40	13,67	1,30	15,40	0,95	16,28	1,00	12,95
M	0,30	3,42	5,10	7,10	8,50	0,40	10,50	1,57	12,98	0,50	14,62	0,30	15,50	0,35	12,28
N	0,93	4,00	5,83	7,70	9,05	1,00	10,98	2,15	13,52	1,00	15,13	0,85	15,97	0,90	12,77
O	0,87	3,92	5,82	7,70	9,07	0,95	10,97	2,12	13,50	1,10	15,13	0,85	16,05	0,85	12,77
P	0,60	3,70	5,50	7,45	8,80	0,70	10,70	1,92	13,22	0,80	15,00	0,50	15,72	0,65	12,60
Q	0,67	3,80	5,50	7,50	8,95	0,85	10,87	2,05	13,28	0,95	15,05	0,60	15,93	0,70	12,65
R	0,05	3,10	4,98	6,95	8,35	0,15	10,18	1,55	12,80	0,35	14,60	0,10	15,35	0,15	12,15
S	1,00	4,00	6,00	7,90	9,20	1,10	11,10	2,30	13,65	1,25	15,38	0,95	16,13	1,00	12,95
T	0,07	3,10	5,05	7,00	8,40	0,20	10,27	1,60	12,90	0,40	14,60	0,15	15,38	0,10	12,10
f'	0,602	3,677	5,517	7,436	8,832	0,722	10,741	1,941	13,274	0,850	14,980	0,583	15,742	0,628	12,677
c	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,001	0,003	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004
f	0,603	3,679	5,519	7,439	8,835	0,723	10,744	1,942	13,278	0,851	14,984	0,584	15,746	0,629	12,681

Spessore della lamina d'aria mm. 0,019.

II Serie — Argentano.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	12,44	60,32	12,79	53,44	12,94	44,49	11,82	24,84	12,34	64,79
A	2,60	0,83	2,65	1,05	2,65	1,37	2,70	2,17	2,75	0,65
B	2,85	0,93	2,75	1,22	2,80	1,70	2,80	2,40	2,80	0,85
C	2,40	0,50	2,40	0,73	2,35	1,15	2,40	1,75	2,40	0,35
D	2,50	0,50	2,50	0,62	2,40	1,17	2,45	1,77	2,35	0,45
E	2,35	0,66	2,35	0,80	2,30	1,20	2,40	1,92	2,45	0,45
F	2,10	0,32	2,20	0,68	2,20	1,00	2,25	1,68	2.20	0,25
G	2,05	0,48	2,05	0,57	2,10	0,90	2,10	1,60	2,10	0,22
H	2,55	0,68	2,60	0,98	2,60	1,47	2,70	2,20	2,65	0,72
I	2,15	0,28	2,20	0,47	2,10	0,95	2,25	1,72	2,25	0,22
L	2,30	0,48	2,35	0,80	2,25	1,10	2,40	1,92	2,35	0,40
M	1,95	0,33	2,00	0,45	2,00	0,72	2,10	1,58	2,20	0,07
N	2,70	1,00	2,90	1,40	2,75	1,60	2,95	2,40	2,90	0,97
O	2,75	0,98	2,75	1,23	2,85	1,72	2,80	2,40	2,90	0,90
P	2,70	1,00	2,70	1,30	2,70	1,65	2,85	2,42	2,80	0,95
Q	1,95	0,40	2,00	0,47	2,00	0,68	2,10	1,50	2,10	0,17
R	2,00	0,17	2,05	0,50	2,00	0,95	2,00	1,57	2,10	0,17
S	2,40	0,63	2,45	0,90	2,50	1,30	2,50	1,97	2,50	0,57
T	2,00	0,33	2,10	0,55	2,30	1,00	2,15	1,65	2,20	0,27
U	2,60	0,95	2,60	1,40	2,60	1,60	2,70	2,35	2,60	0,85
f'	2,363	0,602	2,400	0,848	2,393	1,222	2,452	1,945	2,452	0,499
c	0,001	0,004	0,001	0,003	0,001	0,003	0,001	0,002	0,001	0,004
f	2,364	0,606	2,401	0,851	2,394	1,225	2,453	1,947	2,453	0,503

Spessore della lamina d'aria mm. 0,20.

I Serie — Acciajo B.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t	12°.39	23°.49	30°.24	37°.32	42°.44	12°.69	49°.44	17°.24	58°.69	13°.07	64°.87	12°.19	67°.69	12°.29	55°.89
A	1,02	4,07	5,90	7,80	9,25	1,20	11,17	2,30	13,65	1,25	15,35	0,90	16,20	0,90	12,87
B	0,07	3,10	4,95	6,90	8,30	0,15	10,23	1,40	12,72	0,30	14,47	0,05	15,30	0,10	12,00
C	0,55	3,60	5,45	7,35	8,75	0,65	10,62	1,80	13,20	0,75	14,80	0,55	15,70	0,60	12,50
D	0,20	3,27	5,10	7,05	8,40	0,30	10,33	1,60	12,90	0,40	14,60	0,15	15,40	0,30	12,15
E	0,85	3,90	5,72	7,55	9,00	0,90	10,85	2,17	13,43	1,00	15,18	0,75	15,82	0,80	12,72
F	0,92	3,98	5,80	7,70	9,12	1,00	10,97	2,25	13,55	1,20	15,27	0,85	16,10	0,90	12,82
G	0,32	3,45	5,13	7,07	8,57	0,40	10,45	1,70	13,02	0,55	14,75	0,30	15,50	0,30	12,25
H	0,92	4,00	5,87	7,73	9,05	1,00	11,05	2,25	13,50	1,15	15,20	0,90	16,10	0,90	12,90
I	0,80	3,90	5,68	7,60	8,97	0,90	10,90	2,10	13,45	1,05	15,10	0,80	15,90	0,80	12,75
L	1,00	4,07	5,92	7,80	9,25	1,15	11,20	2,40	13,67	1,30	15,40	0,95	16,28	1,00	12,95
M	0,30	3,42	5,10	7,10	8,50	0,40	10,50	1,57	12,98	0,50	14,62	0,30	15,50	0,35	12,28
N	0,93	4,00	5,83	7,70	9,05	1,00	10,98	2,15	13,52	1,00	15,13	0,85	15,97	0,90	12,77
O	0,87	3,92	5,82	7,70	9,07	0,95	10,97	2,12	13,50	1,10	15,13	0,85	16,05	0,85	12,77
P	0,60	3,70	5,50	7,45	8,80	0,70	10,70	1,92	13,22	0,80	15,00	0,50	15,72	0,65	12,60
Q	0,67	3,80	5,50	7,50	8,95	0,85	10,87	2,05	13,28	0,95	15,05	0,60	15,93	0,70	12,65
R	0,05	3,10	4,98	6,95	8,35	0,15	10,18	1,55	12,80	0,35	14,60	0,10	15,35	0,15	12,15
S	1,00	4,00	6,00	7,90	9,20	1,10	11,10	2,30	13,65	1,25	15,38	0,95	16,13	1,00	12,95
T	0,07	3,10	5,05	7,00	8,40	0,20	10,27	1,60	12,90	0,40	14,60	0,15	15,38	0,10	12,10
f'	0,602	3,677	5,517	7,436	8,832	0,722	10,741	1,941	13,274	0,850	14,980	0,583	15,742	0,628	12,677
c	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,001	0,003	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004
f	0,603	3,679	5,519	7,439	8,835	0,723	10,744	1,942	13,278	0,851	14,984	0,584	15,746	0,629	12,681

Spessore della lamina d'aria mm. 0,019.

II Serie — Argentano.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	12,44	60,32	12,79	53,44	12,94	44,49	11,82	24,84	12,34	64,79
A	2,60	0,83	2,65	1,05	2,65	1,37	2,70	2,17	2,75	0,65
B	2,85	0,93	2,75	1,22	2,80	1,70	2,80	2,40	2,80	0,85
C	2,40	0,50	2,40	0,73	2,35	1,15	2,40	1,75	2,40	0,35
D	2,50	0,50	2,50	0,62	2,40	1,17	2,45	1,77	2,35	0,45
E	2,35	0,66	2,35	0,80	2,30	1,20	2,40	1,92	2,45	0,45
F	2,10	0,32	2,20	0,68	2,20	1,00	2,25	1,68	2.20	0,25
G	2,05	0,48	2,05	0,57	2,10	0,90	2,10	1,60	2,10	0,22
H	2,55	0,68	2,60	0,98	2,60	1,47	2,70	2,20	2,65	0,72
I	2,15	0,28	2,20	0,47	2,10	0,95	2,25	1,72	2,25	0,22
L	2,30	0,48	2,35	0,80	2,25	1,10	2,40	1,92	2,35	0,40
M	1,95	0,33	2,00	0,45	2,00	0,72	2,10	1,58	2,20	0,07
N	2,70	1,00	2,90	1,40	2,75	1,60	2,95	2,40	2,90	0,97
O	2,75	0,98	2,75	1,23	2,85	1,72	2,80	2,40	2,90	0,90
P	2,70	1,00	2,70	1,30	2,70	1,65	2,85	2,42	2,80	0,95
Q	1,95	0,40	2,00	0,47	2,00	0,68	2,10	1,50	2,10	0,17
R	2,00	0,17	2,05	0,50	2,00	0,95	2,00	1,57	2,10	0,17
S	2,40	0,63	2,45	0,90	2,50	1,30	2,50	1,97	2,50	0,57
T	2,00	0,33	2,10	0,55	2,30	1,00	2,15	1,65	2,20	0,27
U	2,60	0,95	2,60	1,40	2,60	1,60	2,70	2,35	2,60	0,85
f'	2,363	0,602	2,400	0,848	2,393	1,222	2,452	1,945	2,452	0,499
c	0,001	0,004	0,001	0,003	0,001	0,003	0,001	0,002	0,001	0,004
f	2,364	0,606	2,401	0,851	2,394	1,225	2,453	1,947	2,453	0,503

Spessore della lamina d'aria mm. 0,20.

Esperienza 36ª.

(dal 27 al 30 Marzo 1887).

Palla grossa d'argento — *Sospensione inferiore*

Pendolo corto

$B = 751,49$	$\theta_{f_0} = 15,010$	$\theta_{p_0} = 15,035$	$\log \varrho = \bar{3},08148$
	$\theta_{f_1} = 15,055$	$\theta_{p_0} = 15,070$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4},0606223$
$f = 8,68$	$\theta_f = 15,032$	$\theta_p = 15,052$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1},9999501$

Elementi	l	m	u	s
I	3,65	0,038	0,042	1,825
II	0,15	0,054	0,000	3,725
III	0,429	0,485	0,013	4,015
IV	97,8134	0,427	340,761	53,136
V	0,498	0,607	0,019	102,291
VI	0,490	0,589	0,019	109,155
VII	4,3700	1418,609	5756,374	105,725

$I' = 22\overset{\mu}{,}97$

$I'' = 34,32$

$\delta_0 = 51,29$

$\delta_1 = 49,82$

$\delta = 50,55$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 1\overset{\mu}{,}13 \\ a\ 15^\circ,02 \end{cases}$

$C = -\overset{cm}{0},03159$

1ª Esperienza elementare

$O' = 9.25.54$ (h m s)	$e'_0 = 7,830$	$t'_s = 1,034804.64$	$O'' = 13.21.13$ (h m s)	$e''_0 = 8,932$	$t''_s = 1,034805.52$
$T' = 10885,359$	$e'_1 = 4,528$	$r' = 3.47$	$T'' = 11927,128$	$e''_1 = 4,484$	$r'' = 4.03$
$\tau' = -0,250$	$N' = 10519$	$t'_m = 1,031975.71$	$\tau'' = -0,270$	$N'' = \frac{115257}{10}$	$t''_m = 1,031976.02$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1,031975.86$$

2ª Esperienza elementare

$O = 13.20.35$ (h m s)	$e_0 = 9,226$	$t_s = 1,034805.12$
$T = 12866,027$	$e_1 = 4,344$	$r = 4.09$
$\tau = -0,295$	$N = 12433$	$t_m = 1,031975.58$

$$t = 1,031975.58$$

Esperienza 36ª.

(dal 27 al 30 Marzo 1887).

Palla grossa d'argento *Sospensione inferiore*

Pendolo lungo

$B = 752{,}01$	$\theta_{f_0} = 15{,}020$	$\theta_{p_0} = 15{,}025$	$\log \varrho = \bar{3}{,}08181$
	$\theta_{f_1} = 15{,}022$	$\theta_{p_1} = 15{,}025$	$\log \frac{m'}{m} = \bar{4}{,}0609621$
$f = 8{,}68$	$\theta_f = 15{,}021$	$\theta_p = 15{,}025$	$\log\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right) = \bar{1}{,}9999500$

Elementi	l	m	u	s
I	3,34	0,034	0,032	1,670
II	0,15	0,054	0,000	3,415
III	0,431	0,484	0,013	3,705
IV	198,125	0,867	2835,747	102,983
V	0,497	0,608	0,019	202,294
VI	0,490	0,589	0,019	209,158
VII	6,3700	1418,609	5756,370	205,728

$I' = 23{,}28$ (μ)

$I'' = 34{,}28$

$\delta_0 = 33{,}88$

$\delta_1 = 31{,}52$

$\delta = 32{,}70$

$L = \begin{cases} 100\ cm. - 3{,}44\ (\mu) \\ a\ 15°{,}02 \end{cases}$

$C = + 0{,}00329$ (cm)

1ª Esperienza elementare

$O' = 8.38.15$ (h m s)	$e'_0 = 7{,}945$	$t'_s = 1{,}443250.16$	$O'' = 13.12.26$ (h m s)	$e''_0 = 7{,}718$	$t''_s = 1{,}443255.43$
$T' = 13182{,}968$	$e'_1 = 3{,}611$	$r' = 4.12$	$T'' = 13962{,}786$	$e''_1 = 3{,}400$	$r'' = 3.80$
$\tau' = -0{,}321$	$N' = 9134$	$t'_m = 1{,}439305.34$	$\tau'' = -0{,}300$	$N'' = \frac{96743}{10}$	$t''_m = 1{,}439310.92$

$$t = \frac{1}{2}(t'_m + t''_m) = 1{,}439308.13$$

2ª Esperienza elementare

$O = 13.11.51$ (h m s)	$e_0 = 7{,}947$	$t_s = 1{,}443256.18$
$T = 14884{,}618$	$e_1 = 3{,}317$	$r = 3.88$
$\tau = -0{,}317$	$N = 10313$	$t_m = 1{,}439311.59$

$$t = 1{,}439311.59$$

Acciajo B (metro M′)

$a = 10^{-9}\,(10232 \pm 38)$
$b = 10^{-9}\,(8{,}50 \quad \pm 0{,}5)$ $\qquad \alpha_{100} = 10^{-9}.\,11082$

Acciajo D (metro M″)

$a = 10^{-9}\,(10006 \pm 38)$
$b = 10^{-9}\,(10{,}9 \quad \pm 0{,}5)$ $\qquad \alpha_{100} = 10^{-9}.\,11096$

Argentano (Packfong)

$a = 10^{-9}\,(16563 \pm 38)$
$b = 10^{-9}\,(9{,}8 \quad \pm 0{,}5)$ $\qquad \alpha_{100} = 10^{-9}.\,17543$

I coefficienti del rame e dell'asciajo e specialmente i coefficienti medî tra 0° e 100° (α_{100}) differiscono pochissimo da quelli dati da altri sperimentatori. Quanto all'argentano, intorno al quale non ho trovato alcuna determinazione, la dilatazione è intermedia tra quelle dei metalli che entrano nella sua composizione (Rame, Nikel, Zinco); la media aritmetica dei coefficienti di dilatazione, tenuto conto delle proporzioni che hanno ordinariamente i metalli nella lega, (50 Cu, 25 Ni 25 Zn) sarebbe

$$\alpha_{100} = 0{,}0000186$$

che differisce poco dal nostro (0,0000175); basterebbe una piccola variazione nella composizione per spiegare la differenza, nell' ipotesi, non sempre ammissibile, che tale modo di calcolo corrisponda realmente alla relazione esistente tra la dilatazione della lega e quella dei suoi componenti.

B"

F'

Fig. 1ª

f

g

g'

f

Fig. 2ª

Metro M.

Metro M'.

Metro M".

Fig. 4ª

Fig. 5ª

Fig. 6ª

p

p'

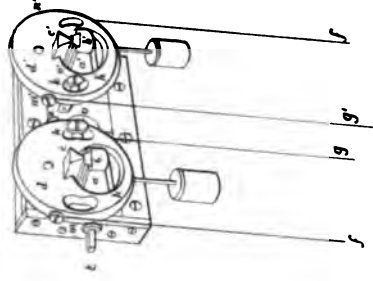
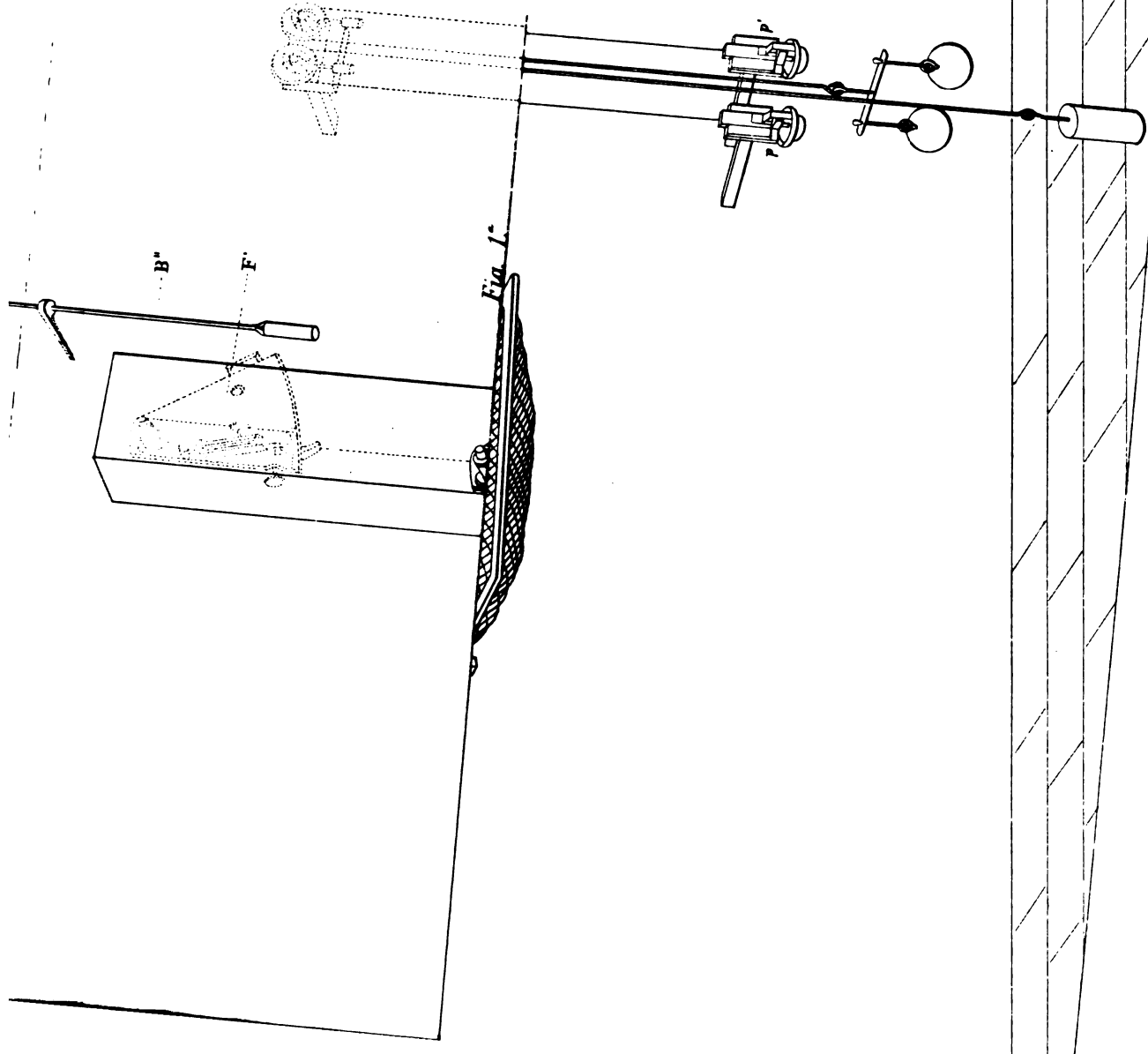
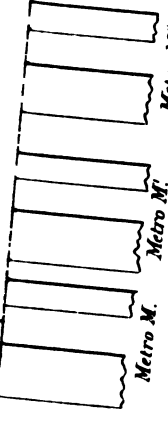
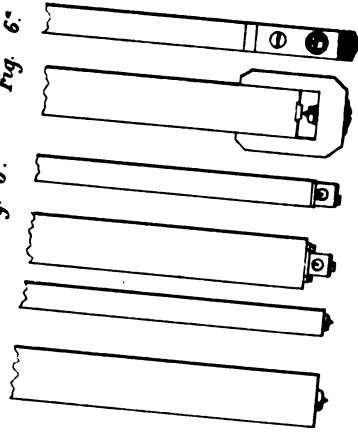



TAVOLA DIMOSTRATIVA DELL' APPARATO PENDOLARE

Stab. Lit. L. Salomone. Roma

RELAZIONE

letta dal Socio Capellini, relatore, a nome anche del Socio Taramelli, nella seduta del 3 giugno 1893, sulla Memoria del dott. Gioacchino De Angelis, intitolata: *I Corallarj dei terreni terziari dell'Italia settentrionale. Collezione Michelotti. Museo Geologico della R. Università di Roma.*

« La Memoria del dottore Gioacchino De Angelis, col titolo: *I Corallari dei terreni terziari dell'Italia settentrionale* ha per fine di far meglio conoscere ed apprezzare una parte notevole della raccolta paleontologica che, or sono alcuni anni, il cav. Michelotti di Torino donava alla R. Università di Roma.

« In una breve prefazione l'autore ricorda la provenienza dei materiali che intende di illustrare e dichiara di essersi giovato non poco del catalogo manoscritto preparato dal Michelotti, introducendovi tutte le correzioni e aggiunte che i più recenti studî intorno agli Antozoi viventi e fossili rendevano opportune e necessarie.

« Seguono brevissimi cenni sulle località, ove furono raccolti i materiali dei quali si tratta e sono ricordati alcuni dei principali lavori sulla geologia stratigrafica dei diversi giacimenti; passa quindi, l'autore, ad enumerare e descrivere accuratamente le molte specie, tra le quali parecchie ritenute nuove, e correda il suo lavoro con quattro tavole assai bene disegnate.

« I Commissarî, apprezzando l'interesse speciale della raccolta donata dal cav. Michelotti, tenuto conto della cura, con la quale il dott. De Angelis ha cercato di superare le difficoltà spesso incontrate anche per la cattiva conservazione di taluni esemplari e per il difetto di copiosi materiali da confrontare, sono d'avviso che la Memoria: *I Corallarj dei terreni* ecc., possa essere pubblicata nei volumi dell'Accademia R. dei Lincei, salvo gli accordi da prendersi col Consiglio di Amministrazione ».

I Corallarj dei terreni terziarî dell'Italia settentrionale. Collezione Michelotti. Museo Geologico della R. Università di Roma. Memoria del dott. GIOACCHINO DE ANGELIS.

INTRODUZIONE

Molte ed ardue sono le difficoltà che si presentano a chi intraprende lo studio degli Antozoi fossili, come facilmente si può rilevare dall'incertezza che preoccupò anco i più insigni maestri nello specificare le forme di questa classe. Dacchè il d'Achiardi tralasciò questi studî, nessun altro, coltivandoli in Italia, portò ricchi contributi a questa interessantissima branca paleozoologica. I lavori, poi, che esistono, essendo governati da diversi criterî di determinazione, ora non ritenuti di buona lega, hanno sconvolta e confusa la sinonimia. Infine, riesce difficile lo studio per la delicata struttura dello scheletro, per lo stato di conservazione degli esemplari di Corallarî che suole essere pessimo, per l'erosione e per la spatizzazione. Laonde non recherà maraviglia, se di frequente si rimanga incerti nella determinazione.

I coralli fossili, che gentilmente mi concesse per istudio il ch. Prof. A. Portis, appartengono in gran parte alla collezione Michelotti; gli altri, poi, in minor numero, giacevano fra i materiali da determinarsi del Museo. Le scarse forme che appartenevano ai terreni paleozoici e mesozoici, pochissime con certa provenienza, sono omesse in questo lavoro, dove figurano solamente quelle del Terziario di varie località dell'Italia settentrionale. Sono citate, solo eccezionalmente, forme di altre località italiane.

Nella descrizione di nuove forme ho procurato, per quanto mi è stato possibile, di tenermi ben lungi da questioni elevate di ordinamento, di filogenesi, di corologia, ecc., richiedendo queste un maggior patrimonio di studî ed una più vasta e profonda osservazione.

Nel pregevole lavoro dei « Coralli giurassici » [1], il d'Achiardi scriveva queste nobili parole: « Molte sono — purtroppo! — le specie nuove, per non poche delle quali « ebbi la fortuna di trovarle, se non descritte, già battezzate dal Prof. Meneghini; e « poichè il nuovo studio da me fattone con nuovi esemplari e nuovi libri non ha che « in rari casi rese necessarie altre denominazioni, così, quando ho potuto, ho scrupo- « losamente conservato le antiche, benchè non rese di pubblica ragione; e ciò non

[1] Atti Soc. Tosc. di Sc. nat., vol. IV, fasc. 2°, 1879. Pisa.

« solo per sentimento di dovere, quanto per rispetto a lui, che, con amorevole cura, « negli studî paleontologici mi fu sempre guida e maestro. »

Trovandomi nel caso identico, ho procurato di imitare sì grande esempio; solamente debbo surrogare al nome del Prof. Meneghini quello del Dott. Giovanni Michelotti. Questi, facendo dono della sua doviziosa raccolta paleontologica al Museo di Geologia della R. Università di Roma, si compiaceva di accompagnarla con un catalogo manoscritto, che ben la chiarisse. Quasi tutte quelle specie nuove, che la fortuna mi sortì a descriverle per primo, erano di già battezzate nel detto catalogo. È egli vero che non sempre trovai giusta l'istituzione di nuove specie; chè anzi molte e molte non solo sono stato costretto a sopprimere, ma anco a riportarle a forme conosciute di altri generi. Con ciò non voglio punto disconoscere il grandissimo vantaggio derivatomi dai manoscritti del Michelotti, pel quale serberò sempre gratitudine infinita e profonda venerazione, come devesi a Colui che illuminò con intelletto, amore e studio, tanto campo paleontologico.

Quantunque sia a tutti noto il valore cronologico delle località, da cui proviene il materiale studiato, per gli studî di una elettissima schiera di geologi, quali: Pareto, Sismonda, Mayer, Issel, Michelotti, Reuss, Mazzuoli, d'Achiardi, Taramelli, Sacco, ecc., pure credo non riusciranno discare poche notizie tolte dagli autori più recenti.

Tutte le località possono essere divise in due gruppi:

A) in quelle dell'alta Italia occidentale;

B) ed in quelle dell'alta Italia orientale.

Nel lavoro figurano pochissime altre località, delle quali sarà dato breve cenno nella descrizione delle forme.

A. — La regione occidentale è geologicamente, riguardo al Terziario, bene esplorata. Il Sacco, nel « Bacino terziario del Piemonte », riporta il nome di ben 170 geologi che si occuparono di quelle contrade. Tale lavoro compendia tutti quelli che lo hanno preceduto. È vero che le idee del Sacco, intorno alla posizione dei piani del Terziario, non sono universalmente accettate; ma per le località in discorso, essendo famose per la ricchezza dei fossili, e quindi ben conosciute, sono riferite a piani coll'unanime consenso di tutti quelli che se ne occuparono. Infatti, il Sismonda, il Pareto, il Mayer, l'Issel, il Mazzuoli, lo Zaccagna, ed ultimamente il Sacco, riferirono al Tongriano — costituito in quelle regioni da un complesso di banchi conglomeratici ad elementi di natura e dimensioni svariatissime — le seguenti località:

S. Giustina (prov. Genova), *Sassello* (prov. Genova), ad E. del bacino *tongriano* di Mioglia.

I dintorni di *Carcare* (circond. Savona), dove si trovano fossili nelle placche, più o meno isolate, formate da sottili banchi arenacei.

Dego (circond. Savona), dove il piano è rappresentato essenzialmente da conglomerati, conglomerati-breccie alternati e commisti con marna sabbiosa rossastra o con strati arenaceo-ghiaiosi (loc. Castalupara).

Le puddinghe dei dintorni di *Belforte* (circond. Novi).

Le vicinanze di *Mornese* (circond. Novi); strati arenacei, grigio-verdastri o bruno-giallastri, con lenti ciottolose.

Già il Sismonda ed il Gastaldi, e più dettagliatamente il Pareto, avevano riconosciuta la presenza dell'Elveziano nel Piemonte. Il Mayer, l'Issel, il Mazzuoli, lo Zaccagna ed il Sacco, ne hanno reso preciso ed esatto lo studio. Negli strati di questo piano, definito come una *facies* di mare profondo e talvolta litorale, si trovano Antozoi fossili nelle località:

Colline di Torino, dove il piano è rappresentato oltrechè da banchi marnoso-sabbiosi, anche da potenti banchi ghiaiosi-ciottolosi.

I dintorni di *Baldissero* (Torino).

Queste due ultime località sono divenute celebri per le ricchezze paleontologiche raccolte dai pionieri della paleontologia del Piemonte, come un Sismonda, un Michelotti, un Bellardi, un Gastaldi, un Rovasenda, un Mayer, ecc. Il materiale fu dai predetti illustrato e ritenuto tipico del Miocene medio, costituendo la fauna delle Colline di Torino e non quella di Superga, come fu detto erroneamente.

Le località riferite al Tortoniano erano già state ascritte al Miocene superiore dal Sismonda, dal Pareto e dal Mayer. Questo piano prese nome dalle Colline di Tortona, dove si frammischiano sabbie e ghiaie più o meno grossolane. Tra le più celebri località vanno menzionate quelle di *S. Agata-fossili* (Tortona), ed i dintorni N-E. di *Stazzano* (Tortona).

L'Issel, nella « Liguria geologica e preistorica, pag. 173, Genova, 1892 », riporta le argille grigie (che alimentano le fabbriche di mattoni) di *Zinola* (Savona), nel Pliocene inferiore (Piacentino o Piacenziano).

Similmente vengono riferite allo stesso piano le marne arenacee del *Rio Tosero* (*Albenga*). Di quest'ultima località se ne occupò il Sasso sin dal 1827.

Dell'Astiano sono citati fossili provenienti dai dintorni di *Asti*, di quell'orizzonte caratteristico che fu chiamato « sabbie gialle dell'Astigiana », livello che diede il nome al piano.

B. — Passiamo ora alle località fossilifere della parte orientale dell'alta Italia. Tali località, per la ricchezza dei fossili, sono anch'esse di molto conosciute. Il professor Taramelli, nella « Spiegazione della Carta geologica del Friuli, 1881 », riporta al Parisiano inferiore, o Brusselliano, o comunemente detto piano di S. Giovanni Ilarione, le seguenti località: *S. Giovanni Ilarione*, *Rosazzo*, *Brazzano*, *Cormons* e *Russitz*. I fossili vengono estratti dagli strati marnosi ed arenacei, e non già dalle puddinghe quarzose nummulitiche, che fan parte dello stesso piano.

Il medesimo Prof. Taramelli, nella « Geologia delle Provincie Venete », nel cap. XIII, riporta la storia dell'Eocene del Veneto. Ricorda i lavori del Maraschini, Brogniart, Fortis, Murchison, d'Achiardi, Reuss, ecc., fermandosi specialmente sopra quelli dei due ultimi, dove è confermato il riferimento del piano corallino di S. Giovanni Ilarione all'Eocene medio, associandovi il deposito di *Vall'Organa* (argille), presso

Possango. Il piano poi di *Castelgomberto*, *Montecchio Maggiore*, *Monte Grumi* si riferisce all'Oligocene superiore.

Dopo avere riportate sinteticamente tutte le opinioni dei varî geologi, trascrive la serie proposta dal Bayan, « *Sur les terrains tertiaires de la Vénétie*, Soc. géol. de France, 1870 », che è ancora quanto di meglio possiamo adottare al presente, introducendovi però le modificazioni apportate da Hébert e Munier-Chalmas.

EOCENE MEDIO	Piano	(C, D, E),	Calcari di *S. Giovanni Ilarione*.
ID.	»	(B),	Calcari di *Roncà*.
EOCENE SUPERIORE . . .	»	(F),	Calcari a polipaj di *Crosara*.
OLIGOCENE	»	(G),	*Salcedo*.
ID.	»	(H),	Calcare di *Castelgomberto*.

Nella descrizione delle forme seguo per gli Alcionari l'ordine adottato dal Milne Edwards [1] e per gli Zoantari quello proposto dal Duncan [2], accettato nei posteriori trattati di paleontologia. Qualche piccola modificazione che vi ho apportato si è resa necessaria per mettere questo scritto, il più che è stato possibile, d'accordo colle nuove vedute scientifiche degli autori recentissimi.

Per amore della brevità non trascrivo il lunghissimo elenco di tutti i lavori consultati e citati nel testo, ricorderò solamente i principali fra quelli che trattano dei coralli terziarî delle stesse località, di cui qui si fa parola.

1823. Brongniart Alexandre, *Mémoire sur les terrains de sédiment supérieurs calcaréo-trappéens du Vicentin*. Paris.

1836. Michelotti Giovanni, *Specimen zoophytologiae diluvianae*. Torino.

1840-47. Michelin Hardouin, *Iconographie Zoophytologique*. Paris.

1847. Michelotti Giovanni, *Déscription des fossiles des terrains Miocènes de l'Italie septentrionale* (Ouvrage publié par la société Hollandaise des sciences). Leide.

1856. Catullo Tomaso Antonio, *Dei terreni di sedimento superiore delle Venezie e dei fossili Bryozoari, Antozoari e Spongiari*. Padova.

1857-60. Milne Edwards-H., *Histoire naturelle des Coralliaires ou Polypes proprement dits*. Vol. 3. Paris. Di questi due ultimi autori riporto ora solo il presente magistrale lavoro che compendia sinteticamente la loro lunga serie delle illustrazioni dei Coralli.

1858-1861. De Fromentel E., *Introduction à l'étude des Polypiers fossiles* (Ext. Soc. d'émulation de Besançon). Paris.

1861. Michelotti Giovanni, *Études sur le Miocène inférieur de l'Italie septentrionale* (Mém. publié par la Société Hollandaise des sciences à Harlem). Harlem.

1865. Schauroth C., *Verzeichniss der Versteinerungen im Herzogl. Naturaliencabinet zu Coburg*. Stuttgart.

1865. Tournoner M. R., *Sur le calcaire à Astéries et sur les rapports paléontologiques avec certains terrains tertiaires de l'Italie septent.* Compt. rend. Ac. des Sc. Paris. Jul.

1865. Hébert M. Ed., *Sur le terrain nummulitique de l'Italie septentrionale et des Alpes*. Comp. rend. Ac. des Sc. Paris. Août.

1866. D'Achiardi Antonio, *Corallarî fossili del terreno nummulitico delle Alpi Venete*. Parte I. (Est. vol. II, Mem. Soc. Ital. di Sc. nat.). Milano.

[1] Milne Edwards, *Histoire naturelle des Coralliaires* 1856-60, Paris.

[2] Duncan P. M., *Revision of the Families and Genera of Madreporaria*, Linnean. soc. Journal. Zool., vol. XVIII, 1885, London.

1867. D'Achiardi Antonio, *Coralli fossili del terreno nummulitico delle Alpi Venete. — Catalogo delle specie e brevi note.* Pisa.

1868. Id., *Studio comparativo fra i Coralli dei terreni terziari del Piemonte e dell'Alpi Venete.* Pisa.

1868. Id., *Corallari fossili del terreno nummulitico delle Alpi Venete.* Parte II. (Est. vol. IV. Mem. Soc. Ital. di Sc. nat.). Milamo.

1868. Reuss A. E., *Paläontologische Studien über die Älteren Tertiärschichten der Alpen.* I Abtheilung. *Die fossilen Anthozoen der schichten von Castelgomberto.* Wien.

1869. Id., II. Abtheilung. *Die fossilen Anthozoen und Bryozoen der Schichtengruppe von Crosara.* Wien.

1873. Id., III. Abtheilung. *Die fossilen Anthozoen der Schichtengruppe von S. Giovanni Ilarione und von Ronca.* Wien.

1871. Sismonda Eugenio, *Matériaux pour servir à la Paléontologie du terrain tertiaire du Piémont.* Seconde partie. *Protozoaires et Célentérés.* (Ext. Mém. de l'Acd. R. des Sc. de Turin). Turin.

1875. D'Achiardi Antonio, *Coralli eocenici del Friuli* (Estr. Att. Soc. Tosc. Sc. Nat. Pisa, vol. II, fasc. 1°, 2° e 3°). Pisa.

Per la medesima ragione non ho riportato le inutili e lunghe sinonimie, riferendo quelle strettamente necessarie per le modificazioni apportate. Per le altre forme indico solamente la figura migliore della forma che mi servì per la specificazione. Le forme nuove infine ho procurato di rappresentarle il meglio che ho potuto, usando largamente lo studio delle sezioni microscopiche riprese esattamente con la camera chiara dell'Abbe.

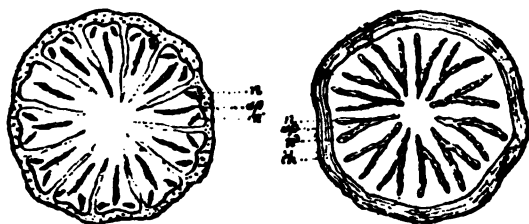
Nella descrizione delle specie adotto le elocuzioni e la terminologia in uso, avvertendo però che molte di queste espressioni ora non godono di tutto quel valore che un giorno loro si attribuiva; ma posseggono un significato notevolmente diverso, come dimostrarono fra gli altri il De Lacaze Duthiers, il Fowler, il Bourne G. C., il von Heider A., il von Koch G., il Moseley H. N., lo Sclater (1).

Lo sviluppo del corallo ci presenta due domande: In quale parte del corpo avviene il deposito calcareo ed in quale strato elementare di organi prende principio il calice ed i suoi elementi? Quali sono le leggi per le quali si accrescono queste parti? Con ciò che seguirà procureremo, quanto lo stato della scienza ce lo permette, di sciogliere brevemente le questioni.

Gli Antozoi spesso presentano alla superficie esterna una pellicola, che viene chiamata *Epitheca.* È questa costituita da uno strato sottile, continuo, che non somiglia punto al tessuto del resto del corpo. Essa si origina dall'indurimento dell'epidermide. È questo un elemento non sostanziale, dacchè può anche mancare negli individui della stessa specie. Opportune esperienze hanno dimostrato come faccia l'ufficio di organo di resistenza agli invasori. L'*Endotheca* poi è la calcificazione dell'epitelio interno.

Il Milne Edwards ed J. Haime diedero il nome di *sclerites*, ai noduli calcarei

(1) Sono pregevolissimi a questo riguardo i seguenti lavori: De Lacaze-Duthiers, *Dévoloppement des Coralliaires*, Arch. Zool. expér. et génér., vol. I, II, 1872-73, Paris; Fowler, *Anat. of Madreporária*, Quart. Journ. of microscop. science I, II, III, vol. XXV, XXVII, XXVIII. Bourne G. C., *On the Anatomy of Mussa and Euphyllia, and the Morphology of the Madreporarian Skeleton*, idem. 1887. London. — *The Anatomy of Fungia*, idem. 1886.

che si trovano dentro i tessuti molli, i quali, unendosi, possono dar luogo allo scheletro calcareo. Già da molto tempo si conoscevano corpuscoli calcarei negli Alcionari, chiamati *spicules*, che prima erano creduti di formazione cuticolare, ma il De Lacaze-Duthiers ed il Kölliker dimostrarono essere derivati dal mesoderma. Varia è la forma delle *spicules* e degli *sclerites*, presentano la superficie o liscia o rugosa Non si conosce perfettamente la loro natura chimica, v'ha un poco di sostanza organica e carbonato di calcio. L'epoca, in cui appariscono i noduli calcarei, pare non si possa riferire ad un periodo speciale di sviluppo. Se ne trovano infatti prima che appariscano i tentacoli, ma sempre dopo la formazione delle prime 12 logge. Prima che si fissi la larva, già si hanno dei corpuscoli. Il De Lacaze-Dethiers vide piccoli embrioni che col crescere dei noduli calcarei, si rendevano più lenti nei movimenti, sino a che, pel peso cresciuto, non essendo più capaci di andarsene alla superficie dell'acqua, calavano a fondo, dove si fissavano e cambiavano di forma. Si può quindi dire che i noduli compariscono, quando l'animale tende a passare dallo stato libero a quello fisso. Il luogo dove avviene la prima comparsa dei noduli è nella profondità delle logge, nello strato interno; essi sono bianchi, trasparenti, irregolari, tubercolosi. Ben presto, (Fig. a sinistra) riunendosi i noduli calcarei, formano una piccola linea che trovasi più vicina al centro che alla periferia (*sp*). Non è questo il solo centro di deposito, ma ben due altri periferici (*n*), che col primo costituiscono gli estremi di un triangolo isoscele, coll'angolo diverso al centro. I due periferici sono più corti di quello verso il centro, essendo appena un quarto in lunghezza. Ben presto i depositi periferici si allungano, per incontrare la bacchetta mediana del lobo colla quale si saldano. Il risultato è che ogni loggia ha un deposito calcareo a mo' di Y. Talvolta però, per la piccolezza del

(Fig. a sinistra). Si distinguono bene gli strati (int. ed est.) ed i noduli calcarei (*n n' sp*) allungati, che indicano il punto di origine dei setti (strato interno).

(Fig. a destra) La teca (*th*) è ben sviluppata, i setti sono fortemente forculari (V). I setti però non sono ancora riuniti alla teca.

(Figure, schematizzate, dal De Lacaze-Duthiers).

centrale, si ha la forma di un V (Fig. a destra). Tali differenze si riscontrano nello stesso individuo. Ciò serve a dimostrare la poca importanza che si deve attribuire al primo deposito calcareo, origine dei setti. I depositi a foggia di forca, sono già apprezzabili ed ancora non si ha traccia della muraglia.

Questa non tarda a comparire ed a formare uno strato continuo intorno alla materia colorante, senza aderenza alcuna con i depositi interni. La muraglia sul principio è flessibile e membranosa, per queste qualità ci offre caratteri fisici che servono a bene distinguerla dai setti, quando si osserva un giovane polipierite. Pare che sia una secrezione dello strato esterno, che serve a separare l'animale dall'ambiente. Secondo il Milne Edwards si forma e si accresce per depositi di scleriti, i quali vengono originati lateralmente e superiormente: come credevano che fosse per i setti, che erano considerati come dipendenza della muraglia. Ciò abbiamo visto non essere punto esatto e conforme all'osservazione, giacchè i setti sono ben formati, prima che

apparisca la muraglia; solo dopo si comincia a formare una membrana flessibile, che si può chiamare epitecio. Dalla parte interna si originano noduli che ne fanno crescere lo spessore, sino all'incontro co' setti. Depositi speciali di noduli riempiono la cavità fra le due deposizioni calcaree periferiche *suturae* e fanno unica la lamina settale. Si accrescono e si rivoltano oltre la muraglia; alcuni prendono il sopravvento sugli altri; 6 intercalati riescono più grandi. Non si constata mai l'apparizione di 6 setti e poi di altri 6, come si credeva, ma in ogni tempo se ne vedono negli Astreoidi 12 di uguale grossezza: anzi avuto riguardo ai due depositi che formano la forca, noi possiamo ben dire come originariamente essi setti siano 24.

La columella non tarda a mostrarsi prima che si accentui la formazione dei due cicli di setti. La parte centrale dell'animale non riceve il prolungamento dei setti; in questo luogo avviene una deposizione abbondante di noduli calcarei e di foggia diversissima. Si viene così a costituire un deposito che si viene sempre elevando. L'accrescimento dei setti fa sì, che questi vengano a contatto colla columella con cui si saldano.

Dopo di ciò la muraglia viene a prendere una forma conica e cominciano a nascere altre logge, tentacoli e setti. Poste queste osservazioni, è facile comprendere quale significato e quanto valore dobbiamo concedere alle numerose leggi proposte dal Milne Edwards. Non possiamo che per analogia della comparsa dei tentacoli estendere la teoria dell'origine bilaterale nei setti, perchè questi compariscono tutti contemporaneamente dopo il lavoro di regolarizzazione delle logge; per qualche gruppo pare però accertata (Bourne).

Premessi questi brevi e svariati cenni, passiamo senz'altro alla

DESCRIZIONE DELLE FORME

Typus. COELENTERATA.
Classis. ANTHOZOA.
(Polypi, Zoophyta, Coralligena, Coralliaria).
I. Ordo. ALCYONARIA M. Edw. et Haime.
(Octactinia Ehrebg. Octocoralla Haeck).

Familia **GORGONIDAE** E. H.

1857. Milne Edwards. *Hist. nat.*, tom. I, pag. 134.

Sub-Fam. **Isidinae** E. H.

1857. Milne Edwards. *Hist. nat.*, tom. I, pag. 192.

Genus. **Isis** Lamx.

1816. Lamouroux. *Hist. des polyp. flexibles*, pag. 468.

Il carattere principale, per determinare specificatamente le forme di questo genere, credo non si debba riporre nella relativa proporzione degli articoli, ma nella forma che ci offrono le due estremità dell'articolo e nell'assieme del poliperoide. La forma dell'articolo ha un valore solamente secondario. Ciò viene pienamente confer-

mato dalla *Mopsea gracilis* Lamx (*Isis*), come dice il Seguenza [1], la quale *Isis* possiede articoli tanto lunghi, che corti, tanto striati, quanto levigati, nel medesimo poliperoide. Partendo da questo principio ed appoggiato all'autorità del Seguenza e del Milne Edwards [2], mi permetto di apportare alcune modificazioni nel genere, come appare dalle seguenti sinonimie.

Species. 1. *Isis melitensis* Goldf.

1826. Goldfuss. *Petrefacta Germaniae*, tom. I, p. 20, tav. 7, fig. 17.
1840-47. Michelin. *Icon. Zooph.*, pag. 77, tav. XV, fig. 10, *a*, *b* (Var. I. crassa, var. I. bifida).
1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 23, tav. I, fig. 3 (I. nummularia).
? Michelotti G. (*in litteris*) (I. bifurcata).

Le due varietà del Michelin, *crassa* e *bifida*, non hanno ragione di esistere, dacchè si riscontrano molti articoli raccorciati e bifidi nel medesimo poliperoide, e ciò scende di necessaria conseguenza, essendo il polipajo arborescente e costituito da articoli. Per lo stesso motivo troveremo grossi gli articoli che si trovano vicino alla base, mentre ci si mostreranno sottili quelli delle ultime terminazioni.

Col Seguenza (op. cit.) sono d'avviso che l'*Isis nummularia* E. Sismd debba rientrare nella presente forma, perchè mancano caratteri specifici differenti. La caratteristica riposta nel diametro maggiore della lunghezza dell'articolo non ha il necessario e sufficiente valore, dopo l'osservazione rivolta alla vivente *Mopsea gracilis* Lamx (*Isis*), che ci offre articoli corti e lunghi.

Nella Collezione Michelotti esiste un articolo di *Isis* coll'aggettivo di *bifurcata* Michelotti, che si distinguerebbe da quelli delle altre specie per presentare i rami secondarî ad angolo retto col primario, i terziarî normali ai secondarî. Ciò non può costituire un buon carattere specifico per le ragioni già esposte per la v. *I. bifida* Mich. L'accomodamento all'ambiente può aver determinato simili accidentalità.

Colli Torino (esemplari 12), Stazzano (8), Cassinelle (1) [3].

2. *Isis brevis* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Stud. comp.*, ecc., pag. 5, tav. I, fig. 1.

Il Seguenza [4] riporta questa specie come una varietà della precedente, concedendo poco valore ai caratteri relativi alla lunghezza ed alla striatura dell'articolo. Parmi però riscontrare, col d'Achiardi, un sufficiente carattere specifico in questi esemplari, cioè, nel far capo tutte le forti striature ai centri rilevati delle estremità articolari.

Sassello (2), Castelgomberto (3).

(1) Seguenza G., *Disquisizioni paleontologiche intorno ai Corallarii fossili delle roccie terziarie del distretto di Messina*, 1863. Torino, pag. 17.

(2) Milne Edwards., *Hist. Corall.*, vol. II, pag. 194.

(3) Cassinelle (circond. Novi). Si trovano fossili specialmente nelle località denominate: Ciapin, Crenna ed Interi.

(4) Op. cit, pag. 16.

3. *Isis peloritana* Seg.

1863. Seguenza G., *Disq. paleont.*, pag. 16, tav. I, fig. 2, 2*a*, 2*b*, 2*c*, 2*d*.

Negli esemplari ben conservati raccolti a S. Agata-fossili ed a Messina, ho riscontrato le superficie articolari delle estremità alquanto granulose. Tengo a fare risaltare questo carattere anatomico non ancora mai tenuto in conto nella descrizione della specie.

Ho osservato un articolo proveniente dalle sabbie plioceniche di Salice (Messina) che ci si presenta fortemente spinoso; sopra questo esemplare altri avrebbe edificato una nuova forma. Io lo riferisco, senza esitazione, a questa specie.

S. Agata-fossili raro (9), Messina (6), Salice (1).

4. *Isis contorta* E. Sismd.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 22, tav. I, fig. 4.

Stazzano (4).

5. *Isis compressa* Seg. (?)

1865. Seguenza G., op. cit., pag. 17, tav. I, fig. 3, 3*a*, 3*b*.

Un articolo di poliperoide riferibile certamente a questo genere, dopo avermi tenuto per parecchio tempo incerto, finalmente mi sono deciso ad ascriverlo a questa forma, quantunque non manchino caratteri differenziali.

L'articolo è alquanto compresso, distorto, con solchi profondi rientranti nella superficie. La superficie di una estremità è concava, convessa l'altra; ciò a differenza dell' *I compressa.* Le forti striature seguono l'andamento dell'articolo. Il margine delle estremità è angoloso. L'unico articolo ha la lunghezza di 16 mm.; il diametro medio di 4 mm.

Non si può trattare di caso patologico, dacchè se un ostacolo avesse impedito in un punto l'accrescimento dell'articolo, avrebbe impedito la formazione delle strie ed avrebbe causato una cicatrice, ciò che non si osserva. Non si possono immaginare pressioni subìte dall'articolo dopo la morte dell' individuo, perchè queste avrebbero prodotto fenditure che non si hanno, od avrebbero almeno disordinato in qualche modo la simmetria della decorazione. Tale parziale pressione è difficile a concepirsi, anche perchè l'esemplare fu trovato nella marna.

Differisce poi questo articolo da quelli dell' *I. contorta*, cui si avvicina, principalmente per la forma della superficie delle estremità, essendo queste, nella *I. contorta*, tutte e due convesse, coniche e molto appuntite.

Non deve essere confusa questa forma con quella dallo stesso nome del Duncan [1].

[1] Duncan M., *The fossil Corals and Alcyonaria of Sind.* (*Palaeontol. Indica*) *Geol. Survey of India.* Sect. XIX, 1880, Pag. 109, tav. XXVIII, fig. 4, 5.

Sub-fam. **Corallinae** Dana (1846).

1857. Milne Edwards. *Hist. nat.*, tom. I., pag. 201.

Genus. **Corallium** Lamx.

1812. Lamouroux. *Bull. de la Soc. phil. de Paris. Polyp. flex.*, p. 443.

6. *Corallium rubrum* Costa.

Per le figure e per la sinonimia, rimando al *Mat. paléont.* di E. Sismonda, pag. 21.

Il Michelotti assicura di aver trovata questa specie negli strati miocenici di Torino, e di avervi riscontrato una tinta rossastra sopra gli esemplari (*Déscr. ter. mioc. Ital. sept.*, pag. 55). Il Seguenza afferma di averne raccolti negli strati pleistocenici di Scoppo e Trapani (*Disq. paleont.*, pag. 18).

In tutti gli esemplari che ho osservato della Collezione in istudio non ho riscontrato la tinta rossastra, ma tutti gli altri caratteri. Laonde credo che questa forma si trovi anche nello stato fossile.

Per le altre importanti osservazioni si consulti la numerosa bibliografia che riguarda la presente forma.

Colli Torino (2).

7. *Corallium pallidum* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, tav. 15, fig. 9 (p. p.).

Il *C. sepultum* (*Gorgonia*) Michelotti (*Spec. zooph. diluv.*, p. 24, 1838) è sinonimo del *C. pallidum* Mich., per consenso dello stesso Michelotti (*Foss. mioc.*, pag. 5, 1847). Pur nullameno molti autori riportano ancora questa specie coll'aggettivo *sepultum*.

Colli Torino (13).

8. *Corallium sulcatum* Michtti.

1871. E. Sismonda. *Mat. paléont.*, pag. 22, tav. I, fig. 2.

Il Michelotti comunicò questa nuova forma all'Haime, e questi la ritenne per distinta dalle altre congeneri.

Colli Torino (2).

9. *Corallium inaequale* n. sp.

Tav. I, fig. 1.

« C. axe sclerobasico, dendroideo, ramis confertis gradatim attenuatis; polypis « inaequalibus, irregulariter positis; superficie longitudinaliter tortuosis, inaequali- « busque striis sulcata ».

Polipajo sclerobasico, dendroideo, con rami grossi e subcilindrici. Costicine di diversa grossezza ed alte ricoprono la superficie, seguendo vie tortuose; verso la base sono crispate, granulose nei rami superiori. Porta molti polipieriti, di diverso diametro, irregolarmente disposti e differentemente rilevati. Per le dimensioni si avvicina al *C. pallidum* Mich.

L'ornamentazione speciale, quasi unico carattere in questi animali dal semplice scheletro, distingue di molto questa specie dalle altre congeneri.

Sassello (3).

***

Un esemplare riferibile a questo genere è chiamato *C. patulum* n. sp. Eccone la descrizione: Polipajo a superficie appiattita, con strie ben rilevate, incrostante. Pochissimi rami sono posti orizzontalmente, non si può dire se naturalmente od accidentalmente, e poi sono stati cementati.

Ciascuno dei rami è ornato da rare costicine, ma ben elevate e portanti un tenue solco, talvolta interrotto e per lunghi tratti mancante. Lo stato di conservazione è pessimo. Laonde credo che debba ritenersi come la parte inferiore di una specie di corallo, di cui non azzarderei dire il nome, piuttosto che ritenerlo per nuova forma.

Sassello (1).

Fam. PENNATULIDAE E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat.*, tom. I, pag. 206.

Genus. **Pavonaria** Cuv.

1817. Cuvier. *Règne animal*, tom. IV, pag. 85,

10. *Pavonaria Portisi* n. sp.

Tav. I, fig. 2.

« P. axe dendroideo, compresso, fortiter secundum minorem axem sulcato; su-
« perficie anulis inaequalibus irregulariter constricto, interne longitudinaliter vix vacuo ».

Polipaio a foggia di bacchettina, allungata, sottile, internamente vuota. La superficie è ricoperta da anelli d'accrescimento che a diversa distanza addivengono più rilevati. La sezione è un ellissi schiacciata con due profonde insenature in rapporto all'asse minore di figura. Consta, come mostra la figura, di due strati concentrici, che comprendono una cavità riempita col materiale della roccia che contiene il fossile, che è marna calcarea. Il primo involucro non attaccato dall'acido cloridrico è di colore bruno. Il secondo, che non fa effervescenza allo stesso acido, ci offre cavità fusiformi che dall'interno vanno all'esterno, le quali dànno l'aspetto allo strato di una struttura finamente raggiata. Per osservare queste cavità, conviene servirsi dei più forti ingrandimenti del microscopio. La lunghezza degli esemplari è variabilissima, non trovandosi che frammenti nettamente spezzati. Gli assi della sezione misurano mm. 1 il piccolo, quasi mm. 3 il maggiore.

Fig. 1. × 10

La presente forma differisce dalla vivente nel Mediterraneo *P. quadrangularis* Pallas [1], per la sezione che non è quadrangolare, per le dimensioni; dalla *P. Delanouii* E. H. (Cretaceo), per lo stelo non subtetragonale, per la superficie che non è liscia, per il minore spessore della parete dello scheletro.

[1] De Blainville, *Manuel d'Actinologie ou de Zoophytologie.* pag. 516, tav. XC, fig. 1. Paris, 1834.

Tutte le caratteristiche menzionate chiaramente ci rivelano che non abbiano a fare con i resti di un anellide, come potrebbe sembrare a prima osservazione.

Dalle marne dei Colli di Torino (4).

Nel calcare compatto, riferito all' Eocene inferiore, sopra S. Gregorio da Sassola (Tivoli), ho raccolto moltissimi esemplari e ben conservati di questa forma. Egli è per questo che non la chiamo *P. miocenica*, come l'aveva battezzata il Michelotti; ma *P. Portisi*, tanto per rendere un tenue e rispettoso omaggio a Chi, con pazienti, continue, premurose, sapienti cure, mi fu guida e maestro negli studî paleontologici.

Sub-Ord. ANTIPATHARIA Gray.

Genus. **Leiopathes** Gray.

11. *Leiopathes vetusta* Michelotti.

1838. Michelotti G. *Specimen Zooph. diluv.*, pag. 43 (Antipathes).
1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 77, tav. 15, fig. 11 (Antipathes).

Riporto alcuni esemplari a questa forma, appoggiandomi all'autorità dell'Haime.

Colli Torino (4), Sassello (4).

Fam. MILLEPORIDAE E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat.*, tom. III, pag. 224.

Gen. **Heliopora** Blv.

1834. de Blainville. *Manuel d'Actin. Zooph.*, pag. 392.

12. *Heliopora supergiana* Mich

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 66, tav. 13, fig. 10 *a*, *b*.

Colli Torino (1).

13. *Heliopora Bellardii* H.

1852. Haime J. *Mém. Soc. géol. de France*, sér. 2ᵉ, tom. IV, pag. 289, tav. 22, fig. 7 (Polytremacis).
1856. Catullo. *Ter. sedim. sup. delle Venezie.* pag. 78, tav. 17, fig. 9, (Millepora globularis).
1867. D'Achiardi. *Coral. foss. Alpi Venete. Catalog.*, pag. 11 (Heliopora globularis).
1873. Reuss. III *Die fossilen Anthozoen.....*, pag. 18, 40, tav. 51, fig. 2, 3 (Heliopora Bellardii).
? Michelotti (*in litteris*) (Heliopora globularis mihi).

Il Michelotti, col nome di *Heliopora globularis*, riporta un esemplare che deve essere ascritto a questo genere ed alla presente forma. Come si scorge dalla breve sinonimia, questa specie fu balestrata dal genere *Heliopora* al *Polytremacis*: ciò dimostra la difficoltà che s'incontra nella determinazione di due generi così affini. Se si pratica una sezione attraverso un polipierite, facilmente si potranno osservare i caratteri sufficienti per iscrivere la forma nel gen. *Heliopora*. Infatti noi vediamo essere presenti 16 setti per quanto rudimentali, e non 12 quanti ne dovremmo contare, se appartenesse al genere *Polytremacis* (fig. 2).

Gli esemplari di questa forma variano di molto specialmente per la disposizione e per le dimensioni dei calici; ciò fa proclive all'istituzione di nuove forme chi

possiede pochi esemplari e differenti fra di loro. Nei nostri esemplari i calici sono disposti in ordine e le dimensioni dei calici non raggiungono un mezzo millimetro.

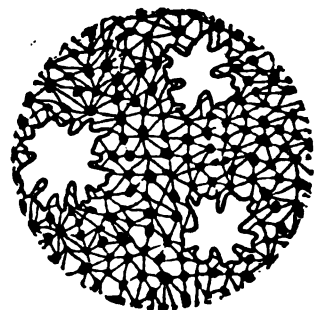
Le sezioni attraverso i calici ci fanno scorgere 4 setti maggiormente sviluppati, ricordandoci questo fatto la simmetria dei *Tetracoralla*, cui il gen. *Heliopora* molto si avvicina.

S. Giovanni Ilarione (2), Cormons (1).

* * *

Fig. 2. × 25

Nella collezione v'hanno due esemplari, col nome *Heliopora oblita*, che per il carbonato di calcio cristallizzato nelle cavità dei polipieriti fa riconoscere pochi caratteri: — P. di forma globulare. I calici nella parte superiore si allontanano per la presenza del cenenchima. I setti sono poco distinti, evidentissime le tavole. Superiormente i calici non si scorgono affatto. — Che i due fossili appartengano a questo genere parmi assicurato; ma che si abbia a fare con una specie nuova non oserei affermarlo.

Sassello (2).

Gen. **Polytremacis** d'Orb.

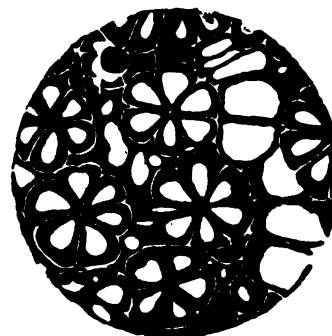
1849. D'Orbigny. *Note sur des Polyp. foss.*, pag. 11.

14. *Polytremacis abdita* n. sp.

Tav. I, fig. 3, 4.

« P. globoso-gibbosa, calicibus subrotundis, inaequaliter positis, propinquis, « septis latis, duabus laminis compositis, centrum appetentibus, areis intercalicinalibus « novis individuis. Non pauco cenenchymate Tabulis (?) ».

Fig. 3. × 10

Polipajo globoso-gibboso; con calici vicini fra di loro e poco elevati sulla massa generale, quasi tutti del medesimo diametro. I setti, che al microscopio si vedono distintamente composti da due lamelle separate (*suture*), vengono a confluire nel centro, senza però toccarsi. In alcuni calici si ossservano i setti del secondo ciclo. In genere vi sono 6 setti, alcuna volta uno di questi è rudimentale. Non esiste punto columella. Negli spazî intercalicinali si veggono i nuovi individui che vengono a formarsi. Il calice ha un millimetro e mezzo di diametro. La distanza fra i calici può variare da un mezzo a 2 mm. per la presenza del cenenchima non molto abbondante.

Questa forma viene riferita a questo genere per il non abbondante cenenchima e per avere i setti che si protendono sino al centro del calice.

Albugnano (4).

2 Ordo. ZOANTHARIA. — Sub-Ordo. MADREPORARIA.
(Zoantharia sclerodermata E. H.).

Sectio **Madreporaria perforata** E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat.*, tom. III, pag. 88.
1885. Duncan M. *Rev. Fam., and Gen.....*, pag. 172.

I. Fam. **PORITIDAE** E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist nat.*, tom. III, pag. 172.

Genus. **Montipora** Quoy et Gaimard.

1833. Quoy et Gaimard, *Voy. « Astrolabé », Zooph.*, pag. 247.

15. *Montipora sepulta* Meneg.

1861. Michelotti G. *Étud. foss. mioc.*, pag. 158, tav. XV, fig. 14 (Alveopora).

L'*Alveopora sepulta* Meneg. non appartiene al gen. *Alveopora*, ma al presente, si riferiva a quello, quando il gen. *Montipora* era compreso dal gen. *Alveopora*. Ciò appare manifestissimo dal Milne Edwards (*Hist. nat. Coral.*, tom. III, pag. 193). Tuttavia ancora viene erroneamente riportata la specie al gen. *Alveopora* ed al gen. *Montipora* nello stesso tempo.

Sassello (1).

Genus. **Alveopora** Quoy et Gaimard.

1834. Quoy et Gaimard. *Voy. de l'Astrolabé, Zooph.*, pag. 394.

16. *Alveopora rudis* Reuss.

1864. Reuss. *Die fossilen Foraminiferen, Anthozoen und Bryozoen von Oberburg in Steiermark*, pag. 2, tav. 9, fig. 1.

Sassello (1).

17. *Alveopora discors* n. sp.

« A. polypario incrustante?, superne subplano. Epithecio communi, membranoso, « basilari. Theca subtiliter eleganterque fenestrata. Calicibus subaequalibus, pentagonis, « marginibus liberis, productis, papillosis, profundiusculis. Pseudoseptis (6-12) clavi- « formibus pseudocolumellam constituentibus ».

Fig. 4. × 18

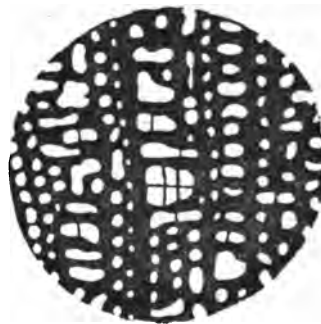



Fig. 5. × 10

Polipajo superiormente spianato. Lo si può supporre certamente incrostante, quantunque faccia vedere breve tratto dell'epitecio, ch'è comune, basale, membranoso, ruvido. La muraglia è semplice e bucherellata da moltissimi fori che le concedono un elegante aspetto: i fori sono vicinissimi fra di loro. I calici sono subeguali e molto rilevati sulla massa generale, papillosi e molto profondi. I setti sono rappresentati da tubercoli spiniformi che, ingrossandosi all'estremità, possono costituire una falsa columella molto sviluppata (fig. 4).

Le varie parti anatomiche, il loro rapporto differiscono di leggieri questa dalle forme congeneri. Per la piccolezza dei calici, per la meno simmetrica ornamentazione della teca si differenzia precipuamente questa forma dalla *A. rudis* Reuss. La struttura della teca separa la nostra forma dall'*A. spongiosa* Dana, come si può vedere dal confronto della fig. 5, con quella riportata dallo Zittel [1].

Stazzano (1).

***

Nella collezione in istudio trovo 6 esemplari (Sassello) ed 1 (Monte Grumi) chiamati col nome *A. papyracea.* Mi duole che il cattivo stato degli esemplari, completamente spatizzati, non mi permetta un'accurata osservazione che quasi certamente avrebbe rivelato una nuova forma. I caratteri generici però si distinguono in un modo evidentissimo. Ecco la descrizione:

Il polipajo superiormente spianato, qua e là presenta protuberanze; è incrostante e disteso in lamine sottili da non oltrepassare un centimetro. Epitecio comune, membranoso, basilare, a superficie irregolarissima modellando l'ostacolo. La muraglia porta trabecole spiniformi, che vanno ad incontrarsi nel centro calcinale dove costituiscono una falsa columella molto sviluppata. La muraglia è semplice, sottile e bucherellata da fori non molto lontani fra di loro. I calici, rilevati, sono di differentissimo diametro 1-3 mm. Esternamente hanno l'aspetto di essere poligonali, ci offrono una fossetta mediocremente profonda.

Genus. **Litharaea** E. H.

1848. Milne Edwards et Haime. *Comptes rendus*, t. XXIX, pag. 258.

18. *Litharaea asbestella* E. Sismd.

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 65, tav. XIII, fig. 9 (Porites collegniana).
1871. E. Sismonda. *Mat. paléont.*, pag. 25.

Belforte (circond. Novi) (3), Colli di Torino (4).

19. *Litharaea diversiformis* Michtti.

1871. E. Sismonda. *Mat paléont.*, pag. 25, tav. IX, fig. 1, 2.

Colli di Torino (7), Stazzano (9).

20. *Litharaêa ameliana* E. H. [2].

1853. Pictet. *Trat. paléont.*, tom. IV, pag. 442, tav. CVI, fig. 18.

Roncà (1).

(1) Zittel K., *Palaeozoologia*, I, 1876-80, pag. 238, fig. 150.

(2) Il d'Achiardi (*Coralli eocenici del Friuli*, pag. 83) riporta questa forma e la *Litharaea bellula* E. H. al genere *Porites?*, ma dubitativamente.

21. *Litharaea bellula* E. H.

1840-47. Michelin. *Icon zooph.* pag. 158, tav. XLIV, fig. 2, (Astraea bellula Mich.).

Montecchio (1).

22. *Litharaea pulvinata* Meneg.

1865. Michelotti, *Étud. foss. mioc.*, pag. 158, tav. XV, fig. 34.

Dego (2)

23. *Litharaea oblita* n. sp.

« L. polypario incrustante, convexo, subglobose, calicibus inaequalibus, pentagonis, « marginibus productis, fossula profundiuscula; columella magna, papillosa extremi- « tatibus septorum constituta; septis extus crassiusculis ».

Polipajo di forma convessa, incrostante in lamine sottili, nello spessore massimo si ha appena più di un centimetro. Lo sclerenchima è più abbondante in certe direzioni ed irregolarmente reticolato. I calici pentagonali hanno un diametro fra i 3 ai 6 mm., sono sporgenti e poco pro. fondi. La columella ci si presenta sviluppatissima, spugnosa e formata dalle estremità trabecolari dei setti, i quali sono ben sviluppati, massime vicino alla muraglia. Poi ci si offrono sublamellari e lateralmente bucherellati. I nuovi individui appariscono negli spazî intercalicinali. Si riscontrano traverse che riuniscono i setti, i quali alcune volte sono tra loro confluenti.

Fig. 6. × 9

Le dimensioni dei calici differiscono bene questa dalle altre forme del genere. La *L. ameliania* E. H. si avvicina per le dimensioni dei calici, ma ne differisce e per essere questi un pochino più piccoli, più profondi, e per la columella meno visibile. Quest'ultimo carattere serve per riconoscere facilmente la *L. oblita* dalle altre congeneri.

Sassello (2). Gli esemplari sono interamente spatizzati.

24. *Litharaea eximia* (Meneg. *in litt.*).

« L. polypario globoso-gibboso, incrustante, laminari. Epithecio subtili striis « laevissimis interdum exornato. Calicibus subaequalibus, saepe pentagonis, marginibus « distinctis, fossula profunda, columella magna, papillosa. Septis, superne granulosis, « extus crassiusculis, fenestratis ».

Polipajo globoso-gibboso, incrostante con lamine di 4 a 6 mm.

L'epitecio sottile riveste la parete incrostante, presentandoci in qualche punto delicate linee d'accrescimento. I calici poligonali, di frequente pentagonali, offrono

un diametro che oscilla dai 2 ai 3,5 mm., sono sporgenti e con fossula parecchio profonda. I setti (18-24) sono più sviluppati vicino alla teca che nel centro, dove ramificandosi costituiscono una grande columella densa sì, ma con soluzioni di continuità. I setti nel bordo superiore si presentano granulosi. Si scorgono numerosi fori nelle pareti dei tramezzi che non sono lamellari, ma alquanto tubercolari.

Fig. 7. × 17

Questa forma ci presenta calici di diametro ancora minore della *L. ameliana* E. H. L'aspetto vellutato che prendono i calici a causa delle granulazioni dei setti ci offrono un carattere abbastanza semplice, per riconoscere questa forma che va distinta dalle altre per i citati caratteri.

Si differenzia finalmente della *L. epithecata* Duncan e dalla varietà di questa var. *emisphaerica* Duncan (*The fossil Corals and Alcyonaria of Sind* (1880), pag. 23, 24; tav. II, fig. 1-10) [1] per avere questa i calici di maggiori dimensioni, per essere provvista di epitecio abbondante, per presentarsi non laminare.

L'unico esemplare, quantunque spatizzato, ci fa riconoscere nella superficie superiore i caratteri anatomici con molta chiarezza.

Crosara (1).

25. *Litharaea Michelottii* (Meneg. *in litt.*).

« L. polypario superne subplano. Epithecio subtili, basilari vix distincto. Cali-
« cibus inaequalibus, polygonis, distinctis, fossula profundiuscula. Septis papillosis, fene-
« stratis, extus crassiusculis. Columella spungiosa extremitatibus septorum constituta.
« Tribus cyclis ».

Polipajo composto a superficie superiore pianeggiante, leggermente ondulata. Epitecio comune, sottile, scabro ed appena riconoscibile. I piccoli calici, dal diametro di 1 mm. o poco maggiori, sono rozzamente poligonali, talvolta circolari. La fossula poco profonda è racchiusa da margini ben rilevati. I setti, non laminari e fortemente bucherellati, sono più spessi vicino alla muraglia ch'è semplice, si anastomizzano verso il centro per formare la columella abbastanza grande, ma piena di cavità. Ordinariamente i calici sono ornati da tre cicli di setti.

Fig. 8. × 18

L'esemplare studiato trovasi in pessimo stato di conservazione, pure in parecchi punti ci presenta calici ben conservati. Per la piccolezza del diametro dei calici si

[1] *Memoirs of the Geological Survey of India. — Palaeontologia Indica*, ser. VII, and. XIV, vol. I, 1871-86.

allontana dalle tre ultime forme citate; per essere pianeggiante nella superficie inferiore si differenzia precipuamente dalla *L. diversiformis*, dalla *L. abestella*, ecc.

Sassello (1).

***

La denominazione delle due precedenti specie, di pugno del Michelotti, è stata tolta dalle tavolette che portavano i fossili. Per quanto abbia rovistato nelle opere del Meneghini e del Michelotti, e di quest'ultimo anche nei manoscritti, non ho potuto trovare parola che alludesse a queste forme.

Genus. **Rhodaraea** E. H.

1849. Milne Edwards et J.-Haime, Compt. rend., t. XXIX, pag. 259.

26. *Rhodoraea ambigua* n. sp. (?)

« Rh. polypario globoso. Cenenchymate parco. Calicibus inaequalibus, obscure po-« lygonis, fossula profundiuscula, septis tuberculosis, extus « crassiusculis. Pseudocolumella fere nulla. Sex palulis « exornato. Cyclis tribus completis ».

Fig. 9. × 9

Polipajo massiccio, convesso quasi globulare. Il cenenchima è scarso. I calici, oscuratamente poligonali, hanno un diametro che oscilla dai 3 ai 6 mm. La muraglia, spessa da 1 ai 3 mm., racchiude una fossula non molto profonda. I polipieriti sono riuniti in certe direzioni da un cenenchima spugnoso, areolare; altra volta sono ravvicinatissimi e separati dalla semplice teca. I setti tubercolari, che sono più sviluppati verso l'esterno, s'avanzano all'interno per formarvi una falsa columella, spugnosa. Nei pochissimi calici meglio conservati si osserva non distintamente la rosetta caratteristica del genere, costituita dai sei pali.

Il pessimo stato di conservazione non mi permette di fare una descrizione più dettagliata. Per la qual cosa nutro qualche dubbio sulla buona istituzione di questa forma, quantunque l'esemplare quasi certamente debba essere riferito a questo genere e differisca abbastanza dalle forme congeneri. Infatti differisce dalla *Rh. Raulini* E. H. cui molto si assomiglia, per essere il nostro esemplare non pianeggiante, sprovvisto di epiteca, e con i calici non circolari.

Dego (1).

27. *Rhodaraea dissita* n. sp.

« Rh. polypario subdendroideo, flabelliformi. Calicibus inaequalibus, polygonis, « interdum fere circularibus, fossula profundiuscula. Septis tuberculosis, extus cras-« siusculis, superne granulosis. Tribus cyclis completis, quarto incompleto. Areis in-« tercalicinalibus novis individuis. Sex palulis ».

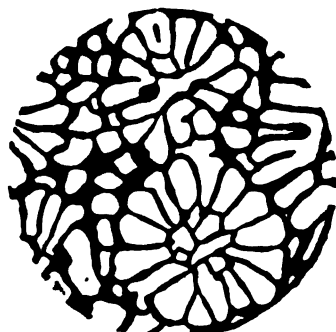
Polipajo elevato, subdendroide, flabelliforme. Negli spazî intercalicinali nascono i nuovi individui. I calici sono di variabilissime dimensioni da poco più di 1 mm.

sino quasi ai 3 mm. La forma poligonale talvolta addiviene tanto oscura, che sembrano circolari. La teca è spugnosa, ma non di molto spessa. I setti formano tre cicli completi, il quarto mostrasi incompleto; sono maggiormente sviluppati verso la teca, tubercolari, e superiormente ricoperti da papille che concedono al calice un aspetto elengantissimo. Il calice si eleva di poco sulla massa generale e racchiude una fossula poco profonda, dove si scorgono, con attenta osservazione, i sei pali, ai quali, sembra, che facciano capo le trabecole orizzontali.

Fig. 10. × 10

Il piccolo esemplare, abbastanza ben conservato, fa riconoscere tutti i caratteri enunciati, che sono sufficienti, per distinguerlo da quelli di altre forme dello stesso genere. Per i calici di minore dimensioni si allontana dalla *Rh. calicularis* E. H. (1) che vive nella Nuova Olanda; per non essere subgloboso si differenzia dalla *Rh. tenuidens* Quelch (2), che vive a Santa Cruz Major Island, a Samvoangan, Filippine.

Crosara (1).

***

Altri esemplari della collezione vanno certamente riferiti a questo genere e probabilmente anche a nuove forme, mi astengo però dal farlo, non essendo lo stato di conservazione abbastanza buono e non avendo potuto controllarli con altri esemplari, specialmente viventi. Tuttavia do le descrizioni dei seguenti:

Sassello (3).

Forse appartenevano i tre frammenti ad un solo polipajo. — Polipajo quasi massiccio, mediocremente elevato, con superficie quasi piana, leggermente convessa. La muraglia sembra intera e sottile. I calici generalmente sono poligonali, talvolta però si mostrano circolari. La fossula non è di molto profonda. I setti tubercolari, formano tre cicli, con accuratissima osservazione si scorgono i sei pali caratteristici del genere. L'epitecio sottile, granuloso, riveste la superficie inferiore, irregolare, della parte incrostante del polipajo. L'erosione ci mostra l'esemplare di maggior mole come composto di lamine sovrapposte. Nella collezione portava il nome di *Rh. neglecta.*

Stazzano (1), Colli Torino (1).

Polipajo elevato, subdendroide, quasi flabelliforme. Cenenchima scarso, areolato; talvolta manca fra i calici. Questi sono ineguali, poligonali, subcircolari, dal diametro di 1 a 2 mm. e poco più. I setti tubercolari si assottigliano avvicinandosi al centro, dove i secondarî incontrano i sei pali, non bene visibili.

(1) Milne-Edwards et J. Haime, *Brit. foss. Corals. Introd.*, p. lvi, 1850.

(2) Quelch, *Report on the Reef-Corals collected* by H. M. S. *Challenger during the years*, 1873-76, Zoology, vol. XVI, pag. 188, tav. VIII, fig. 7-7 *b*.

Genus. **Dictyaraea** Reuss.

28. *Dictyaraea elegans* Reuss.

1861. Michelotti (Meneghini *in litt.*). *Étud. Mioc. inf. It. sept.*, pag. 34, 153, tav. XV, fig. 5, 6 (Stylocaenia clinactinia).
1868. Reuss. *Die fossilen Anth....* Castelgomberto, pag. 35, tav. XV, fig. 6, 7.

Monte Grumi (7), Dego (6).

Genus. **Porites** E. H.

1860. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, tom. III, pag. 173.

29. *Porites incrustans* De Franc.

1853. Pictet. *Trat. paléont.*, tav. CVI. fig. 17.

Colli Torino (6), Stazzano (4).

30. *Porites Pellegrinii* d'Ach.

1373. Reuss. *Paläont Stud. III*, pag. 17, tav. XL, fig. 9, 10.

Roncà (1).

31. *Porites ramosa* Cat.

1869. Reuss. *Paläont. Stud. II*, pag. 38, tav. XXVI, fig. 1-3; tav. XXVII, fig. 1.

Crosara (2), Sassello (1), Castelgomberto (1).

32. *Porites microsyderea* Cat.

1856. Catullo. *Ter. sed. Ven.*, pag. 62, tav. XIII, fig. 5 (*Astraea*).

Crosara (4).

33. *Porites microtheca* d'Ach.

Il d'Achiardi chiama così la *Litharaea lobata* Reuss.
Roncà (1).

II. Fam. MADREPORIDAE Duncan.

1885. Duncan. *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 183.

Genus. **Actinacis** d'Orb.

1849. D'Orbigny, *Note sur les Polyp. foss.*, pag. 11.

34.? *Actinacis deperdita* Michtti.

1871. E. Sismd. *Mat. paléont.*, pag. 28 (Non si ha la figurazione di questa forma).

Egli è sulla fede del d'Achiardi che il Michelotti riporta questa specie al gen. *Actinacis*, giacchè non potè osservare neppure un calice che fosse sufficientemente conservato. L'esemplare, che ho dinanzi, è in pessimo stato e non mi permette di figurarlo. Vi sono molti autori che riportano in questo genere la presente forma senza alcun dubbio. Differisce però dall'*Actinacis Rollei* Reuss per la forma generale.

Sassello (2).

35. *Actinacis oblita* Michtti.

1871. E. Sismonda. *Mat. paléont.*, pag. 28, tav. IX, fig. 9, 10.

Stazzano (3).

36. *Actinacis Michelottii* (Meneg *in litt.*.).

Tav. I, fig. 5.

« A. polypario subdendroideo loboso. Cenenchymate superficie granulata. Calicibus « subcircularibus, distinctis, subaequalibus, fossula profundiuscula, palulis decorata. « Columella parva, papillosaque. Septis vix tuberculosis, subaequalibus ».

Polipajo subdendroide con lobi. Il cenenchima alla superficie si presenta granuloso, i granuli sono di diversa mole ed irregolarmente disposti. I calici subcircolari sono rilevati e distinti, dal diametro di mm. 1,5 ai 2,5. I setti tubercolari sono generalmente 12, talvolta 18, fanno questi capo ad una columella rudimentale e papillosa. I paletti, che sono 6, sono abbastanza visibili, grossi e formano corona al centro.

Il cattivo stato dell'esemplare non ci permette l'osservazione di altre particolarità anatomiche. Si distingue dall'*A. oblita* Michtti per i calici distinti, di maggiore diametro, per i pali più grossi; dall'*A. deperdita* Michtti per i calici molto maggiori.

Montecchio (1).

***

Ho studiato alcuni esemplari che erano stati battezzati coi nomi di *A. elongata*, ed *A. lobata*. Descrivo queste due forme senza però nascondere il mio grave dubbio che nutro specialmente per la seconda di queste.

37. *Actinacis elongata* n. sp.

Tav. I, fig. 6, 7.

« A. polypario dendroideo, ramis saepe duobus coalescentibus; areis intercalicina- « libus fortiter irregulariterque granulatis. Calicibus subrotundis, non distinctis. Septis « extremitatibus tuberculosis, subaequalibus. Columella rudimentali, papillosa, palulis « exornata ».

Polipajo dendroideo, spesso due rami si riuniscono per lungo tratto fra loro. Il poco cenenchima che riunisce i calici ci presenta grossi granuli disposti irregolarmente. I calici circolari sono punto rilevati. I setti coll'estremità superiore granulata sono in genere 12 o 18. La columella è rudimentale, ma papillosa. Di paletti ne ho potuto contare sino a 10 nei calici meglio conservati. Il diametro dei calici oscilla tra mm. 1,5 ai 2. Pessimo è lo stato degli esemplari. La scarsezza del cenenchima è un buon carattere differenziale.

S. Agata-fossili (9).

38. *Actinacis lobata* n. sp. (?)

Tav. I, fig. 21.

« A. polypario incrustante, laminis lobatis superpositis. Epithecio haud parco. Ca- « licibus obscure rotundis, distinctis. Areis intercalicinalibus subtiliter granulatis. « Fossula profundiuscula. Septis tenuiter tuberculatis. Columella.... Palulis? »

Polipajo formato di lamine sovrapposte, lobate, a mammelloni; incrostante. I calici subrotondi ed irregolarmente disposti. I setti sembrano un poco tubercolari ed in numero ora di 12, ora di 18. La columella pare piccolissima, ma papillosa. Dei paluli caratteristici del genere non se ne può conoscere il numero, quantunque mi siano sembrati sviluppati. La forma laminare lobata distinguerebbe questa forma, che si avvicina all'*A. deperdita* Michtti per questo carattere e dalla quale io non saprei con certezza separarla.

Sassello (2).

Genus. **Dendracis** E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat. Corl.*, tom. III, pag. 169.

39. *Dendracis Gervillii* E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat. Corl.*, tom. III, pag. 169, tav. E 3, fig. 1.

Secondo il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 73), questa specie sarebbe identica alla *Dendracis mamillosa* Reuss ed alla *Dendracis nodosa* Reuss.

Montecchio (2), Sassello (4), Monteviale (3).

40. *Dendracis Haidingeri* Reuss.

1864. Reuss., *Paläont. Stud.* I, pag. 27, tav. VIII, fig. 2-5.

Sassello (molti), S. Giustina (3).

Genus. **Astraeopora** Blainville.

1830. Blainville. *Dict. des Sci. nat.*, t. IX, pag. 348.

41. *Astraeopora pulchra* d'Ach.

Crosara (1).

42. *Astraeopora subplana* d'Ach.

Crosara (1).

43. *Astraeopora minima* d'Ach.

Montecchio (1).

44. *Astraeopora convexa* d'Ach.

Crosara (1).

Le quattro precedenti forme sono descritte dal d'Achiardi (*Cat.*, pag. 9, 10), senza essere state mai figurate.

45. *Astraeopora cylindrica* Cat.

1847. Catullo. *Ter. sed. Ven.*, pag. 61, tav. XIII, fig. 3 (Astraea).

Sassello (3), Monte Grumi (1).

46. *Astraeopora patula* E. Sismd.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 28, tav. IX, fig. 5, 6.

Sassello (2).

50. *Turbinaria cyathiformis* Blainv.

1840-47. Michelin. *Icon zooph.*, pag. 65, tav. XIII, fig. 8, *a*, *b*. (Gemmipora).

Colli Torino (13), Dego (2).

51. *Turbinaria undulata* d'Ach.

1868. D'Achiardi. *Stud. comp.*, pag. 23. Credo che questa forma non sia stata mai figurata.

Sassello (3).

52. *Turbinaria globosa* Michtti et Meneg.

1861. Michelotti, *Foss mioc. inf.*, pag. 49.

Anche questa specie non fu mai figurata. Nella collezione in istudio ho osservato l'esemplare, sopra al quale fu istituita la presente *Turbinaria*.

Sassello (3).

***

Un esemplare porta questa determinazione scritta dal Michelotti: *Turbinaria perizoides* Meneg. A mio avviso non v'ha fondamento alcuno, su cui poggiare l'esistenza di questa forma. Un solo calice di un piccolo frammento di polipajo non può esser sufficiente, anche quando non si debba attribuire all'impronta di un corallo isolato, come è nel nostro caso. Difatti, si scorge di leggieri come non sia altro che la negativa della superficie esterna di un corallo semplice e probabilmente di un *Trochocyatus*. Il frammento indubbiamente va riferito alla *Turbinaria cyathiformis* Blv. per la struttura del cenenchima e pel piccolo calice che si osserva alla parte opposta dell'impronta del grosso calice.

Sassello (2).

Genus. **Madropora** Lin. (emend. Duncan).

1885. Duncan. *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 183.

53. *Madrepora lavandulina* Mich.

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 67, tav. XIV, fig. 2.
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 27, tav. IX, fig. 4, 5 (Dendracis miocenica Michtti).

La *D. miocenica* Michtti non è altro che la presente forma; giacchè in due esemplari si scorgono i calici divisi in due logge principali per la unione di due setti opposti, ciò che forma il carattere generico del gen. *Madrepora* e non del gen. *Dendracis*. Il terzo esemplare poi, quello figurato (op. pag. tav. fig. cit.), si trova in così sconcio stato, da non far riconoscere nessun calice. Gli esemplari tutti corrispondono ai caratteri della presente forma, essendo cespitosi. I calici si presentano obliqui di molto, rilevati, substriati, subeguali.

Qui cade in acconcio notare come, con un accurato esame, tenuto il dovuto conto della diversa *facies*, non ho riscontrato nessuna, benchè minima, differenza fra gli esemplari della specie, tanto se raccolti in terreni riferiti all'Elveziano (Colli Torino), quanto a quelli del Tongriano (Sassello). — Sono simili pure con quelli provenienti da Anversa e da Merignac. A torto adunque ed *a priori* da alcuni pa-

leontologi si istituiscono varietà in una specie o se ne creano nuove forme per la sola ragione cronologica. È egli un criterio raccolto in retaggio da viete e vecchie teorie che dovrebbero ora vivere solamente nel campo storico.

Sassello (4), Colli Torino (7).

54. *Madrepora exarata* Michtti.

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 67, tav. XIV, fig. 3.

Questa forma ha forti caratteri d'affinità colla *Dendracis Haidingeri* Reuss. (d'Achiardi).

Colli Torino (7), Sassello (1), Monte Grumi (2).

55. *Madrepora Bonellii* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 29, tav. IX, fig. 11, 12.

Colli Torino (5).

56. *Madrepora discors* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 29, tav. IX, fig. 13.

Dego (1).

57. *Madrepora crispa* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 29.

Non conosco figure della specie.

Sassello (2).

***

M. subcristata mihi. Questa determinazione è stata data dal Michelotti ad un frammento di polipajo di questo genere, che deve appartenere, per quanto mi sappia, ad una nuova forma. Io non oso affermarlo per l'esiguità dell'esemplare, pel cattivo stato di conservazione e per le numerose forme di questo genere, che non ho potuto osservare. Questi sono i caratteri: « P. arborescente, a branchie numerose attaccate da una sola parte nel senso della lunghezza, schiacciato nel senso della larghezza. Cenenchima granulato fortemente e denso. Calici circolari o subcircolari, del diametro di 2 mm. circa ».

Per la forma generale questa specie si assomiglia alla *M. variabilis* Klz. vivente nel Mar Rosso (1).

Montecchio (1).

Un piccolo esemplaretto porta il nome di *M. convoluta.* « P. arborescente a rami cilindrici, per largo tratto aderenti al maggiore. Calici dal diametro mm. 0,5; subcircolari. Cenenchima granulato . . . ».

Fu mandato questo esemplare dal Michelotti al prof. d'Achiardi che lo rimandò con un punto dubitativo, e non a torto, giacchè lo stato di conservazione è pessimo.

Crosara (1).

(1) Klunzinger C. B., *Die Korallthiere des Rothen Meeres. — Die Steinkorallen.* Berlin 1879, pag. 11, tav. I, fig. 10; tav. II, fig. 1 e 5; tav. V, fig. 1 e 3; tav. IX, fig. 14.

IIIª. Fam. EUPSAMMIDAE.

(syn. *Eupsamminae* E. H.).

1885. Duncan. *Rev. Fam. and. Gen.*, pag. 172.

Genus. **Lobopsammia** E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat. Cor.*, t. III, pag. 123.

58. *Lobopsammia miocenica* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 30, tav. I, fig. 7.

Cassinelle (1).

***

Nella collezione in istudio v'ha un piccolo frammento che, non senza qualche dubbio, si potrebbe riportare a questo genere, tanto è pessimo lo stato di conservazione. Pur nullameno porta il nome di *L. cylindrica*.

Sassello (1).

Genus. **Dendrophyllia** Blainv. (1).

1830. Blainville (de). *Dict. des sc. nat.*. t. LX, pag. 319.

59. *Dendrophyllia digitalis* Blainv.

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 52, tav. X, fig. 10.

Stazzano (1), Colli Torino (16), Sciolze (1), Zinola (4).

60. *Dendrophyllia taurinensis* E. H.

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 51, tav. X, fig. 8.

Colli Torino (11), Ortovero (Albenga) (2).

61. *Dendrophyllia Michelinii* Michtti.

1840-47. Michelin. *Icon. zooph.*, pag. 52, tav. X, fig. 9 (D. cornigera), fig. 11 (D. irregularis).

Colli Torino (12).

62. *Dendrophyllia cornigera* Blainv.

1768. *Recuil des planches sur les sciences et les arts*, vol. VI, p. 16, tav. LXXXIV, fig. 2 (Grand Pore).

Stazzano (1), Colli Torino (2), Zinola (5).

63. *Dendrophyllia cladocoracea* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 32, tav. IX, fig. 20, 21.

Colli Torino (1).

(1) Interessanti sono le osservazioni che fa il Reis intorno ai generi *Dendrophyllia* e *Lobopsammia*. *Die Korallen der Reiter Schichten*. Cassel. 1889 (*Geognotische Jahreshefte*, 1889).

64. *Dendrophyllia trifurcata* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 35, tav. VIII, fig. 4.

Colli Torino (1).

65. *Dendrophyllia longaeva* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 34, tav. VIII, fig. 1.

Colli Torino (2).

66. *Dendrophyllia amica* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 32, tav. IX, fig. 15, 16.

Gli individui giovani di questa forma sono rassomiglianti alla *Balanophyllia calycularis* E. H.

Colli Torino (1), Siena (1), Chianciano (8).

67. *Dendrophyllia globulina* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 33, tav. IX, fig. 17, 18, 19.

Colli Torino (5).

***

Tre esemplari provenienti dai Colli di Torino ci porgono caratteri speciali che non isfuggirono all'occhio intelligente del Michelotti, il quale li chiamò: *D. deformis*, per avere di sovente i calici obliterati. Questo carattere anatomico mi suscita l'idea di un caso patologico. Eccone la descrizione: « Polipajo dendroideo. Si trova in piccoli frammenti. Si osservano molti rami che tendono ad andare in alto. I calici subrotondi si trovano all'estremità dei rami, spesso però avviene di trovare a queste estremità una superficie convessa, che oblitera, direi, il calice. Infatti, corrodendo una superficie convessa, non ho durato fatica a trovare al disotto un piccolo calice, attorniato da una spessa muraglia, dove si vedono abbondanti traverse endotecali, nonchè forti granulazioni relativamente alle pareti dei setti che sono numerosi. Le coste sono di svariate dimensioni, ben distinte, subplane, finemente vermicolate e ricoperte da piccolissimi granuli ».

Un altro esemplare, in pessimo stato di conservazione, porta la determinazione del Michelotti: *Dendrophyllia humilis*. I caratteri che pare vogliano differenziarlo sono: « P. piccolo, mm. 14, arborescente con rami dal diametro di mm. 3 circa, che vanno verso l'alto e s'ingrossano verso il calice. Questo è quasi circolare e largo mm. 4. La superficie ricoperta di strie, leggermente vermicolate e riunite fra di loro a diversa distanza da altre granulazioni. Teca spessa. Setti molti e sottili ».

Colli Torino (1).

Maggiore interesse suscita un esemplare dei Colli di Torino, al quale si possono assegnare i seguenti diversi caratteri specifici, ma non oso farne una nuova forma per la piccolezza del frammento del polipajo e per la non ottima sua conservazione: « Po-

lipajo arborescente, a rami cilindrici dolcemente risvolti. Polipieriti quasi del medesimo diametro. Coste semplici, coperte da una sola serie di granulazioni che sono di tanto in tanto riunite da altri granelli. I calici quasi circolari misurano mm. 8 circa. Setti sublamellari, sottili. Columella grande ».

Fig. 12. × 11

Sub-genus. **Enallopsammia** Michti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.,* pag. 31 (genus).

Il Seguenza, nel riferire una specie al gen. *Coenopsammia,* accennò ai grandi dubbî che aveva per tale determinazione, considerando la forma del polipajo, la piccolezza dei calici, lo spessore esterno, il ravvicinamento dei tramezzi, nonchè il numero di quest'ultimi che costituiscono tre cicli completi senza il rudimento di altri. Per le quali cose il Seguenza stesso riteneva doversi costituire almeno una sezione distinta nel gen. *Coenopsammia.* Egli fu per tal ragione che il Michelotti propose il gen. *Enallopsammia,* che io, come il Duncan (*Rev. Fam. and Gen.*) fece per il gen. *Coenopsammia,* lo chiamo sotto genere. La diagnosi generica è riportata dal Sismonda E. (*Mat. paléont.*, pag. 31). « Polypier composé, dendroïde, à rameaux « presque cylindriques, dont les inférieurs sont souvent coalescents. Sclérenchyme d'un « tissu très-dense, ayant sa surface légèrement striée, et converte de grains très-fins « et très-serrés. Lames murales très-peu distinctes. Calices ayant trois cycles complets, « à fossette profonde, irrégulièrement disposés, si ce n'est sur les jeunes branches, « où ils sont alternes ».

La coalescenza dei rami inferiori, le lamine murali distinte, la forma non decisamente stellata dei calici, la piccolezza di questi differenziano il presente genere dal gen. *Dendrophyllia,* cui è intimamente unito.

68. *E. Scillae* Seg.

1863. Seguenza, *Disq. Cor. fos.*, pag. 125, part. 2ª, tav. XIV. fig. 2, *a, b, c, d, e, f.*

Colli Torino (1), Messina (molti).

Genus. **Heteropsammia** E. H.

1848. Milne Edwards et J. Haime, Ann. d. Sc. nat., sér. 3ª, t. X, pag. 89.

Per quanto abbia rovistato nei lavori generali e speciali riguardanti gli Antozoi, compreso quelli dello stesso Duncan, non ho trovato nessuna forma fossile di questo genere, mentre ne conta parecchie viventi. Un esemplare fossile, già battezzato dal Michelotti, credo che si debba riferire a questo genere di cui riporto i caratteri: « Polipierite « semplice, dritto, *fisso sopra una conchiglia univalve che inviluppa da per tutto « le parti.* Senza epitecio. Tutta la superficie esterna sprovvista di coste distinte, ma « coperta da piccole strie composte da piccole papille ravvicinatissime, che risultano « costituite dall'avvicinamento di finissimi granellini da prendere un aspetto vellutato. Columella spugnosa ben sviluppata. Setti spessi esternamente, serrati e poco « debordanti ».

L'assenza delle coste distiute separa questo genere dal gen. *Balanophyllia* e dal gen. *Heterocyathus* (*Turbinolidae*),

Non ho potuto osservare alcun esemplare vivente di questo genere. Ho però rivolta la mia attenzione alle belle figure della *He. Michelini* E. H. (*Hist. nat. Atl.* tav. XXIV, fig. 3).

La nuova forma, porgendoci un tenue peduncolo, ci dimostra che il parassitismo del genere sopra una conchiglia univalve può essere un fatto non costante; se non si voglia ritenere la superficie dell'ombelico, abbastanza sviluppato, come la superficie di contatto con una conchiglia che ora non si trova. Del resto non saprei al nostro esemplare trovare più naturale posizione. Di leggieri si comprende come un genere istituito sopra due sole forme debba offrirci un ambito non molto vasto. Preferisco quindi allargare i confini di un genere all'istituzione di uno nuovo, di cui non si sente l'urgente necessità.

69. *Heteropsammia antiqua* n. sp.

Tav. I, fig. 8, 9.

« He. polypario conico-elongato, dulcissime compresso, tenuiter curvato, basi at-
« tenuata, subpedunculata? Epithecio nullo. Superficie exornata seriebus multorum
« subtilium granulorum constitutis. Costis deficientibus. Theca nulla. Columella spun-
« giosa atque magna. Septis multis extus crassiusculis, confluentibus. Calice ovato ».

Polipajo conico, dritto, leggermente ricurvo, poco compresso. Manca assolutamente l'epitecio. La superficie esterna è mancante di coste propriamente dette; ma si riscontrano granulazioni in serie, molto ravvicinate, che danno alla superficie un aspetto vellutato. I setti sono molti e sviluppati, spessi specialmente verso l'esterno; confluiscono alla columella grande e spugnosa. Del calice si può dire poco o nulla per la sua mancanza e per la spatizzazione dell'esemplare. L'altezza del polipierite misura mm. 35; l'asse maggiore del calice mm. 18, il minore mm. 14: rapporto 180: 140. L'apice dalla rottura ci fa congetturare un ombelico abbastanza allargato. Niuna traccia di conchiglia alla base, ciò che quasi ordinariamente ci presentano le forme viventi di questo genere.

Fig. 13. × 2

Quantunque abbia potuto rivolgere la mia osservazione sopra un solo esemplare, pur mi è sembrato questo tanto caratteristico da farne una nuova specie in un genere non tenuto fossile, per quanto mi sappia, ma solo vivente. Nutro tuttavia qualche dubbio sulla posizione generica, quantunque sia certo che non ve ne sia una più naturale, se non si vorrà per questa sola forma fondare un nuovo genere.

Differisce dalla *He. Michelinii* E. H. per avere un peduncolo ristretto, per le maggiori dimensioni, pel rapporto degli assi che in questa è 100 : 150. Si allontana poi dalla *He. cochlea* per la mancanza del tessuto spugnoso che riunisce i setti del 2° e 3° ciclo, per le dimensioni e per la forma esterna.

Dego (1).

Genus. **Eupsammia** E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat. Cor.*, tom. III, pag. 94.

70. *Eupsammia sismondiana* Mich.

1840-47. Michelini. *Icon. zooph.*, pag. 37, tav. VIII, fig. 3 (Turbinolia).

Colli Torino (1), Baldissero (31).

71. *Eupsammia compressa* Michtti.

1871. Sismonda E. *Mat. paléont.*, pag. 37, tav. I, fig. 6.

Colli Torino, Pino (8).

72. *Eupsammia contorta* n. sp.

Tav. 1, fig. 10.

« E. polypario conico-elongato, irregulariter curvato, subpedunculato? Costis multis « subtiliter atque incerte granulatis, vermicularibus, caniculatisque. Calice fere ro- « tundo. Columella magna, laxe porosa. Septis multis, lamellosis, superficie obscure « granulatis, ultimis cyclis coalescentibus, interne crassiusculis ».

Polipajo in cono allungato, irregolarmente, ma dolcemente, risvolto per tutta la sua lunghezza. La base è spezzata negli esemplari osservati, ma si può ritenere che sia stata subpeduncolata. Le coste sono serrate, vermicolari, finemente forellate, partono dalla base e vanno verso il calice quasi in linea retta, ingrossandosi e senza dar luogo a divisioni. Il calice non si può osservare, perchè mancante, ma deve essere stato certamente circolare. La grande columella ci si presenta spugnosa, ma pur densa. I setti sono molti, serrati, più spessi verso il centro e più sottili verso l'esterno, con le facce ricoperte da incerte granulazioni che rendono irregolare la superficie. I tramezzi degli ultimi cicli si uniscono ai vicini circa a $^2/_3$ di distanza dal centro. L'altezza dell'esemplare più grande, ma non completo, è di mm. 32: l'asse del calice di mm. 11 circa.

Fig. 14. × 3

Differisce dalla *E. haleana* d'Orb. e dalla *E. trochiformis* E. H. per il calice quasi circolare e perchè tutto l'individuo è irregolarmente risvolto.

Zinola (1).

73. *Eupsammia irregularis* n. sp.

Tav. I, fig. 11, 12.

« E. polypario trochoideo, irregulari; fortiter pedunculato. Costis multis, magnis, « rotundis, vermicularibus, confertis. Septis multis, crassis, lamellosis, superficie ir- « regulari. Columella parva septorum extremitatibus constituta. Cyclis ultimis coa- « lescentibus ».

I due esemplari, sopra i quali istituisco la specie, non sono interi, nè ben conservati, pur nulla meno tali mi sono sembrati i caratteri differenziali, da non dubitare punto ad ascriverla a nuova forma.

Polipajo trocoide, alquanto uniforme ed irregolare. Anche l'orlo calicinale si può congetturare irregolare. L'estremità inferiore ci porge una cicatrice basale profonda ed allungata. Le molte coste sono grosse, rotonde, riunite da traverse, vermicolate. Esse si suddividono, per ricoprire la superficie allargata e svasata del polipajo. I setti sono numerosi, robusti, lamellari con facce irregolari; quelli degli ultimi cicli si fondono con quelli degli ordini precedenti a diversa distanza. La columella è poco sviluppata, lamellare, costituita cioè dalla fusione dei setti dei primi cicli. La teca spessa, per erosione, ci fa conoscere i setti che la formano ad occhio nudo. L'altezza del più grande esemplare è di mm. 33; il diametro del calice approssimativamente misura 25 mm.

Differisce specialmente questa specie dalla *E. sismondiana* per lo spessore della teca, per la grossezza dei tramezzi e delle coste, per la grandezza dell'ombelico: dalla *E. compressa*, per la sezione subtriangolare, per il maggiore ombelico, per l'apice smussato, per l'irregolarità del calice.

Monte Besanzone (2).

* * *

In un frammento di polipajo, appartenente certamente a questo genere, si riscontrano tali caratteri specifici, da essere differenziato dagli altri esemplari conosciuti del genere. La piccolezza del fossile e la parte calicinale mancante, non mi permettono di elevarlo a nuova specie. Noterò per ora, sino a che non avrò migliori esemplari, i caratteri che si discernono. « P. conoide; base con largo ombelico; verso la base leggermente rivolto in direzione dell'asse minore del calice, che deve essere ovale. La « teca relativamente spessa Le coste elevate, aguzze, granulate, non si dividono, sono « crispate, danno un aspetto elegante al polipajo. Setti lamellari, di uguale spessore, « leggermente granulati; quelli degli ultimi cicli si fondono con i vicini a due terzi « di distanza dal centro del calice. Columella spugnosa, ma non di molto. L'esem- « plaretto viene dai Colli di Torino, misura 25 mm. circa ».

Genus. **Balanophyllia** Searles Wood.

1844. Searles Wood;, *Ann et Mag. Nat. Hist.*, vol. XIII, pag. 11.

74. *Balanophillia falcifera.* Michtti.

1871. E. Sismonda, *Mat. paléont.*, pag. 15, tav. IX, fig. 22.

Colli Torino (3).

75. *Balanophyllia Meneghinii.* E. Sismd.

1871. E. Sismonda, *Mat. paléont.*, pag. 15, tav. I, fig. 8.

Colli Torino (14).

76. *Balanophyllia incerta.* Michtti.

1871. E. Sismonda, *Mat. paléont*, pag. 16, tav. VIII, fig. 23.

Dego (2).

77. *Balanophyllia praelonga.* Michtti.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 96, tav. VIII, fig. 15 (Turbinolia cylindrica).

Colli Torino (36). Crosara (4). Dego (5).

78. *Balanophyllia irregularis.* Seg.

1864. Seguenza, *Disquis. paleont. Corol. fos.*, pag. 118, tav. XIV, fig. 1.

Stazzano (15). Colli Torino (7). Zinola (4).

79. *Balanophyllia italica.* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 46, tav. IX, fig. 15.

Astigiana (1).

80. *Balanophillia striatissima.* Sismd.

1871. E. Sismonda, *Mat. paléont.*, pag. 37, tav. I, fig. 5.

Colli Torino (3).

81. *Balanophillia vagans.* Michtti.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 40, tav. IX, fig. 1 (B. cylindrica).

Colli Torino (16).

82. *Balanophillia fallax*, n. sp.?

Tav. I, fig. 13.

« B. polypario conico-elongato, plus minusve curvato; basi attenuata, subpedun-
« culata?; praesertim compresso prope calicem. Costis multis, omnibus e seriebus
« granulorum constitutis, fortiter elatis prope calicem. Septis multis primariis et se-
« cundariis majoribus. Columella magna, spungiosa. Calice ovato ».

Polipajo conoide quasi retto e sufficientemente allungato, alquanto compresso, specialmente vicino al calice, ch'è ovale. Coste indivise, serrate, alquanto vermicolari; ricoperte da sottili granulazioni; s'ingrossano e divengono molto rilevate nelle vicinanze del calice, a foggia di alette. Setti moltissimi, lamellari, quelli dei due primi ordini sporgenti lateralmente. Columella grande e spugnosa. Apice con ombelico ben sviluppato, come suppongo dalla rottura apicale. L'altezza dell'esemplare più grande è di mm. 40. L'asse maggiore del calice è di mm. 20 ed il minore 12, al rapporto cioè 200 : 120. I due unici esemplari di Dego non sono ben conservati, anzi spatizzati profondamente. Laonde con qualche esitazione descrivo come nuova questa forma, perchè non ho potuto osservarne tutti i caratteri.

Differisce questa specie dalla *B. Bajardiana* E. H., vivente, cui si assomiglia, per il rialzo esterno delle coste, corrispondenti ai due primi ordini diretti, vicino al calice; come pure per la differenza grande che corre fra i rapporti degli assi del calice.

***

Esistono varî frammenti di polipaj, che appartengono a questo genere; ma difficilmente si potrebbero riportare a specie conosciute, perchè o non interi o mal ridotti. Ve ne ha uno colla determinazione di *B. seminuda* Michtti; che presenta alcuni caratteri specifici proprî: ma il fossile è mancante e dell'apice e della parte calicinale. Mi limito quindi a riportare i caratteri anatomici visibili « P. fragile, rotto, quasi cilin-
» drico, poco compresso verso la base (?) che deve essere un po' larga (?) Le coste sono

« copiosissime e molto piccole, vermicolate. Calice quasi circolare (?). Epitecio sottile, « mancante ».

Colli Torino (1).

Genus **Stephanophyllia** Mich.

1841. Michelin, *Article Astrée, Dict. des Sc. Nat.*, Supp. t. I, pag. 484.

83. *Stephanophyllia imperialis* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 31, tav. VIII, fig. 1.

Colli Torino (2), Asti (1), Zinola (3).

84. *Stephanophyllia elegans* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 32, tav. VIII, fig. 2.

Rilevo i seguenti caratteri differenziali fra questa specie e la precedente, essi sono necessarî per la facile distinzione; non furono mai riportati, a mio credere, da altri:

1°. Le *dimensioni*. Nella *S. imperialis* si raggiungono i 3 centim. di diametro, mentre nella *S. elegans* non misuriamo un diametro che si allontani dai 12-15 mm.

2.° Nelle superficie dei tramezzi della prima si trovano costicine oblique, lungitudinali, che non si riscontrano nella *S. elegans*.

3.° I raggi setto-costali che nella *S. imperialis* sono sempre acuti, nell'altra sono ottusi e quasi rotondi.

Colli Torino (1), Tortona (2), Stazzano (16), Zinola (15), S. Agata-fossili (5).

IIa. Sectio. **Madreporaria fungida.**

1885. Duncan, *Red. Fam. ad Gen.*, pag. 132.

1.a Fam. **PLESIOPORITIDAE.**

1885. Duncan., op. cit., pag. 165.

Genus. **Cyclolitopsis** Reuss.

1873. Reuss, *Paläont. Stud. III.*, pag. 15.

85. *Cyclolitopsis patera* Meneg.

1873. Reuss, *Paläont. Stud. III.*, pag. 16, tav. XLI, fig. 2, 3.

Torino, Via degli Orti (3).

Genus **Leptophyllia** Reuss.

1054. Reuss, Denkschr. der Wiener Akad. der Wiss., t. VII, pag. 101.

86. *Leptophyllia panteniana* d'Ach.

1866. D'Achiardi, *Cor. fos. Alp. Ven.*, part. I, pag. 32, tav. II, fi. 2-9 (Trochosmilia). Part. II, pag. 5, (Leptophyllia).

Crosara (13).

Col nome di *Leptophyllia ambiqua* n. sp., è determinato un esemplare della Collezione in istudio, che deve certamente essere riferito alla presente forma. Infatti, la *L. panteniana* presenta svariatissime forme, da non lasciar dubbî a chi avesse va-

ghezza di creare nuove forme, prendendo gli esemplari che distano di molto fra di loro, senza tener conto degli intermediari che facilmente li congiungono. Svariatissime sono le fòrme della stessa specie; alcune volte la base è curva, tal'altra dritta. Si riscontrano calici svasati ed altri ristretti verso il bordo estremo superiore. L'esemplare, in parola, è stato raccolto in Via degli Orti (Torino); sopra di esso non si deve avere altro parere, tanto più che oltre alla forma non si riscontrano differenze anatomiche di sorta.

2.ª Fam. LOPHOSERIDAE.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 146.

Genus **Comoseris** d'Orb.

1849. d'Orbigny, *Note sur les Polyp. foss.*, p. 12.

87. *Comoseris cistaeformis* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 66.

Sassello (5).

88. *Comoseris deperdita* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 66.

Dego (3).

Le due forme precedenti vanno ascritte a questo genere per la presenza dell'epitecio nel piano comune. Si rassomigliano alle forme del Reuss, *C. alternans* (¹), *C. conferta* (²), distenguendosene per sufficienti caratteri specifici. Disgraziatamente non si hanno le rappresentazioni iconografiche delle specie.

Sub-Genus **Oroseris** (genus, E. H.) Duncan.

1851. Milne Edwards et J. Haime, *Pol. foss. des terr. Pal.*, pag. 130.

89. *Oroseris alpina* (Meneg. *in litt.*) Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 158, pl. XV, fig. 19.

Riferisco questa forma al gen. *Oroseris*, quantunque un esemplare della stessa specie presenti incertissime traccie di epitecio nel piano comune. L'*O. alpina* somiglia alla *C. alternans* Reuss, colla quale la riunerei, se presentasse l'epitecio.

Monte Grumi (1), Sassello (1).

***

Un esemplare ci porge caratteri differenziali tanto evidenti fra le altre specie del gen. *Oroseris* e *Comoseris*, che potrebbe dar giusto motivo per l'istituzione di una nuova forma. Ma non lo credo giustificato del tutto per l'incertezza che nutro intorno alla posizione generica, causa il cattivo stato del fossile, che non mi permette verificare

(¹) Reuss, *Paläont. Stud. I*, pag. 49, tav. XIV, fig. 2 *a*, 2 *b*.
(²) Reuss, *Paläont. Stud. I*, pag. 46, taf. XIV, fig. 3 *a*, 3 *b*.

se manca od è presente l'epitecio comune. Descrivo la forma: « Polipajo a superficie superiore pianeggiante e disteso in lamine. Le colline affettano una forma allungata, conica, coll'estremità quasi appuntita. La loro direzione sinuosa concede al polipajo l'aspetto meandriniforme. I raggi-settocostali sono alquanto ricurvi, sottili ed alternativamente subeguali: in un centimetro se ne contano sino a 30; in qualche punto sono tutti della medesima grossezza. Le valli sono del pari sinuose, terminanti ad angolo deciso, meno nei punti dove trovansi i calici. I calici sono ovali, ma terminanti ad angolo acuto in rapporto dell'asse maggiore, che talvolta è molto allungato. I setti che confluiscono ai calici, sono generalmente 24. Il diametro maggiore è di 6 a 7 mm., il minore di 2-4 ».

Colli Torino (1).

Genus **Mycetoseris** Reis.

1889. Reiss O., *Die Korallen der Reiter Schichten*, pag. 115-124.

Quantunque, per mancanza di pratici e tassonomici confini proposti dall'autore che non ci porge neppure la descrizione del genere, mentre fa intorno ad esso molte e profonde considerazioni, io dovrei limitarmi a riportarvi le sole forme che il Reis vi ascrive, cambiando, secondo il suo modo di vedere, anco la sinonimia, pur nullameno vi riporto una nuova forma per la somiglianza che ha con la prima delle due seguenti.

90. *Mycetoseris hypocrateriformis* Michtti.

1861. Michelotti G., *Étud. foss. Mioc. inf.*, pag. 158, tav. XV, fig. 3, 4 (Mycedium).

Montecchio (1), Crosara (4).

91. *Mycetoseris patula* Michtti.

1861. Michelotti G., *Étud. Mioc. inf.*, pag. 45, tav. IV, fig. 3, 4 (Thamnastraea).

1868-73. Reuss, *Paläont. Stud. I, II, III*, pag. 26 (III), tav. XLVI, fig. 4 *a*, *b* (Podabacia patula) = (Podabacia prisca Reuss).

1868. d'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 21 (Podabacia patula).

Colli Torino (2).

92. *Mycetoseris adscita* n. sp.

Tav. II, fig. 2, 3.

« M. polypario laminis subtilibus, crateriformi, huic et illinc lobato. Epithecio « communi striis alternatim aequalibus, angulatis, granulatis, sulcato, Septis-costalibus « crestiformibus, obliquis, interdum tortuosis, granulatis, acutis. Calicibus irregularibus, « rotundis, subrotundis, seriatis; aliquando valles constituentibus. Fossula profun-« diuscula ».

M. polipajo in lamine sottili dai 4 mm. ad un centimetro, lobate, a mò di cratere, fisso per larga base. L'epitecio comune ci offre coste alternativamente uguali a differenza della *M. hypocrateriformis* sono aguzze, granulose. I raggi setto-costali non fanno ben riconoscere il punto dove cambiano nome per divenire tramezzi, appena l'accennano. I calici sono differenti; rotondi se isolati, subrotondi se accennano a suddivisione; allungati se in serie. In quest'ultimo caso vengono a formare colline e valli, che possono riuscire profonde verso il fondo della coppa costituita dal polipajo. Diffi-

cile è il contare il numero dei tramezzi dei calici, pure nei più piccoli ed isolati ho riscontrato intorno alla fossula, abbastanza profonda, 24 tramezzi. Tutti gli altri caratteri sono comuni alla *M. hypocrateriformis*.

Tra gli esemplari che ho studiato ve ne sono due che leggermente si allontanano dalla presente descrizione; ma non di tanto da permettere di ascriverli neppure ad una varietà.

Sassello (9).

Genus **Lophoseris** E. H. (*syn. Pavonia* Lam.).

1849. Milne Edwards et J. Haime, *Compt.-rend. de l'Acad. des Sc.*, t. XXIX, pag. 72.

Per quanto abbia rovistato nella bibliografia, non ho potuto trovare nessuna specie fossile riportata in questo genere, se facciamo astrazione della *L. Ehrenbergi* E. H., ch'è fossile nei depositi recenti dell'Egitto. Nella Collezione Michelotti trovo alcuni esemplari che non possono trovare migliore posizione che in questo genere, di cui riporto i caratteri: « P. composto, aderente, fogliaceo, ordinariamente si eleva sotto forma di « lobi o creste irregolari. Vi sono calici radiati e confluenti. Soventi v'hanno colline e « carene sporgenti la cui direzione è verticale e non trasversale. Columella tuberco- « losa, talvolta rudimentale. Piano comune nudo e minutamente striato ». Forma espansioni sottili e quindi facilmente riconoscibile genericamente.

La determinazione delle seguenti specie l'ho confortata collo studio delle viventi congeneri, colle quali esporrò i rapporti, parlando delle singole specie nuove. Queste saranno 2, cioè il minor numero possibile, tenendo conto solamente dei caratteri differenziali più vistosi. Ciò per gettare buone e salde basi a questo genere che diventa fossile.

93. *Lophoseris anteacta* n. sp.

Tav. I, fig. 22.

L. anteacta polypario laminis convexis, lobatis. Epithecio striis tenuis alternatim « aequalibus decorato. Calicibus propinquis, seriatis; rare collibus. Fossula parva sed « profundiuscula Columella vix distincta, tubercolosa. Septis communibus, angulatis, « superficie granulatis, numero 24 circiter ».

P. composto, in lamine convesse e con lobi. Epitecio striato con strie di diversa grossezza alternativamente. I calici serrati, talvolta poco lontani, in serie da offrirci raramente l'aspetto distinto delle colline. Le fossette sono piccole, ma profonde. La columella tubercolosa è diversamente sviluppata nei diversi individui; è poco distinta alla superficie; ad essa fanno capo i setti che sono 24 od in numero poco lontano da questo. I setti vanno da un individuo all'altro, si elevano di parecchio ad angolo sentito nel punto in cui cessano di far parte dell'uno, per venire setto all'altro. Le superficie dei tramezzi offrono granulazioni abbondanti: si hanno granulazioni negli orli superiori dei medesimi. L'epitecio completo, che copre il piano comune, solcato da strie costali fini ed alternativamente subeguali, fa venire il dubbio che trattasi di una *Comoseris*; dal qual genere si separa facilmente per la mancanza di colline propriamente dette.

La forma lobata ricorda la vivente *Lophoseris explanulata* E. H. (*Histoire Coral.*, vol. 3°, pag. 69, tav. D, 11, fig. 2) da cui facilmente si differenzia la nostra specie pel

maggiore spessore della lamina, per i setti più uguali fra di loro, per le dimensioni dei calici minori e per la più oscura columella.

Sassello (1).

Altri esemplari si avvicinano di molto alla presente specie, lasciando intravedere delle differenze che ascrivo più volentieri fra le individuali che nelle specifiche per la non buona conservazione degli esemplari stessi e per non prendere motivo da piccoli appigli per sciorinare una litanie di varietà. A ciò sono più facilmente condotto dall'osservazione fatta sopra i fossili, che mi si mostrano, quantunque lontanamente, come forme di passaggio alla seguente specie.

Sassello (4).

94. *Lophoseris prisca* n. sp.

Tav. I, fig. 16, 17.

« L. polypario, laminis tenuibus, lobatis. Epithecio completo, communi, striis sub-
« aequalibus, granulatisque sulcato. Calicibus inaequalibus, subrotundis, obliquis. Septis
« costalibus, prominentibus, granulatis, spinis coniunctis, prope calicem crassis. Fossula
« profunda haud magna ».

Polipajo in lamine sottili, fogliacee, lobate. Epitecio completo nel piano comune, solcato da strie pressochè uguali e ricoperte da tenui granulazioni. Calici obliqui di diversa forma, ma sempre subcircolari. I tramezzi che si originano dai raggi setto costali, ingrossandosi, sono ben rilevati, acuti, finemente granulosi e distanti l'uno dall'altro per un mm.: s'ingrossano a dismisura vicino al calice. Spine ben sviluppate uniscono i raggi setto-costali; talvolta le sono tante vicine da obliterare il solco. I calici hanno una fossula ristretta, ma ben profonda; nel fondo della quale con difficoltà si scorge la columella; che dovrebbe essere appena rudimentale. La lamina nel frammento unico e piccolo non supera lo spessore di 8 mm. I calici hanno un diametro medio di 4 o 5 mm. Un polipierite è lontano dall'altro per circa un centimetro.

Sassello (1).

Molte somiglianze, rapporti, e differenze si potrebbero istituire fra questa specie e le viventi, ma anzi che delucidare e precisare la posizione della specie, servirebbero a confonderne le idee. Le caratteristiche della specie sono tali da differenziarla facilmente dalle congeneri.

***

Trovo un esemplare colla determinazione *Lophoseris neglecta* n. sp. Non v'ha dubbio, a mio avviso, che il fossile debba riferirsi a questo genere; anzi sarei quasi per affermare, come s'abbia a fare con una specie nuova. Ciò non l'affermo per il cattivo stato dell'esemplare stesso. Ne riporto i caratteri riconosciuti: « P. a lamine
« sottili non più di un centimetro, flabelliforme; si eleva a forma di creste irregolari.
« V'hanno colline ad angolo acuto; quasi tutte normali alla direzione dell'altezza.
« Epitecio comune, con strie sottili e subequali. Similmente fini e subeguali sono i raggi setto-costali. Le valli sono profonde e dolcemente ondulate ». Intorno agli altri caratteri anatomici non si può dir nulla, almeno con certezza.

Sassello (1).

Genus **Cyathoseris** E. H.

1860. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.* t. III, pag. 59.

95. *Cyathoseris multisinuosa* Reuss.

1868. Reuss, *Paläont. stud.*, I, pag. 24, tav. VII, fig. 4.

Castelgomberto (1).

96. *Cyathoseris falcifera* d'Ach.

1867. D'Achiardi, *Cor. foss. Catg.*, pag. 8.

Monte Grumi (4), Sassello (1).

97. *Cyathoseris formosissima* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Stud. comparat.*, pag. 69, tav. IX, fig. 3.

Monte Grumi (1).

98. *Cyathoseris apennina* d'Ach.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 57, tav. XII, fig. 1.

Sassello (1).

99. *Cyathoseris scripta* Michtti.

Tav. II, fig. 5, 6, 7.

Non ancora figurata. Colgo l'occasione di farlo, avendone l'esemplare tipico.
Sassello (1).

100. *Cyathoseris parvistella* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 39.

Sassello (2).

101. *Cyathoseris crispa* n. sp.

Tav. II, fig. 4.

« C. polypario, laminis crassis, superne subplano, hinc et illinc lobato. Costis « exiguis, subliliter granulatis, aequalibus. Septis tenuibus, acutis, subaequalibus, tor- « tuosis. Calicibus inaequalibus, subrotundis. Superficie septorum « granulata. Traversis endothecalibus ».

Fig. 15. × 2, 5

Polipajo composto in lamine di un forte spessore; giacchè arriva ai 3 ed ai 4 centim.: superiormente è pianeggiante; ma dolcemente lobato. I calici centrali sono più larghi degli altri, irregolari. Si scorgono i nuovi individui che nascono dallo strozzamento calicinale dei più grandi. I raggi setto-costali, aguzzi, tortuosi; ricoperti di granulazioni; in 3 mm. se ne contano 8. Nei calici più piccoli si enumerano 12 o 18 setti, cresce di molto il numero negli altri. Nelle faccie dei tramezzi si riscontrono delle rare linee d'accrescimento e le traverse endotecali. Di coste se ne contano da 22 a 25 per centimetro. Il diametro dei calici più piccoli è di 2-3,5 mm.

Il carattere più spiccato che distingue questa specie dalle altre è la esiguità dei tramezzi e dei raggi setto-costali ed il loro terminare ad angolo acuto e la caratteristica granulazione delle faccie dei tramezzi.

Sassello (1).

Esistono in Collezione altri esemplari in pessimo stato, che con dubbio si possono riferire a questo genere, senza poter dir molto riguardo alla specie.

Genus **Cycloseris** E. H.

1860. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, tom. III, pag. 49.

102. *Cycloseris Perezii* E. H.

1873. Reuss, *Paläont. stud.*, III, pag. 16, tav. XLI, fig. 1.

Valle Organa (Asolo) (8).

103. *Cycloseris ephippiata* d'Ach.

1873. Reuss, *Paläont. stud.*, III, pag. 17, tav. XLI, fig. 4-6.

S. Giovanni Ilarione (1).

Queste due forme ne costituiscono una sola secondo il Felix. (*Kritische Studien über die tertiäre Korallen...* pag. 415. Zeitschrift. XXXVII, Band. 1885).

Genus **Trochoseris** E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat. Cor.*, tom. III, pag. 57.

104. *Trochoseris miocenica* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioe. inf.*, pag. 47, tav. IV, fig. 4, 5.

Dego (3).

105. *Trochoseris cornucopia* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 47. tav. IV, fig. 10, 11.

Sassello (1).

106. *Trochoseris venusta* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag 48, tav. IV, fig. 7, 8, 9.

Sassello (1).

3.ª Fam. **PLESIOFUNGIDAE.**

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 133.

Genus **Halomitra** Dana (*Podabacia* E. H.).

1846. Dana, *Expl. Exped.*, *Zoophytes*, pag. 311.

Il Quelch (*The voyage of. H. M. S. Challenger. Reporter on the Reef. Corals.* Vol. XVI, pag. 140) riporta il gen. *Halomitra* ed il gen. *Podabacia* E. H. (*Hist. nat. Corl.* t. III, pag. 18), assegnando tre forme a quest'ultimo, per avere precisamente i setti uniformi ed ugualmente distanti; mentre nelle forme del gen. *Halomitra* i setti sono visibilmente diseguali.

107. *Halomitra ambigua* n. sp.

Tav. II, fig. 8, 9.

« Polypario large trochoiformi, laminis; bene subpedunculato; basi subtiliter fe-
« nestrata, spiniformi, costis alternatim aequalibus, exiguis ornata. Calicibus inaequa-
« libus, elongatis, seriatis. Septis magnis, crassis alternatim aequalibus, tortuosis te-
« nuiter; secundariis vix distinctis; superficie granulatis. Traversis exiguis endothe-
« calibus ».

Polipajo a foggia di coppa molto svasata e largamente pedunculata, disteso in lamine, talvolta sottili dai 3 ad 1 centim. di spessore. La faccia inferiore ci offre un gran numero di piccoli fori, irregolarmente disposti; è irta di papille spiniformi. Verso l'orlo superiore del polipajo la superficie inferiore è decorata da piccole coste, granulose, sottili ed alternativamente uguali. I raggi setto-costali sono leggermente tortuosi, forti, ben rilevati; ricoperti da finissime granulazioni. Tra questi setti-costali grandi, a stento, se ne vedono altri alternativamente intercalati più sottili; ciò che più facilmente si osserva vicino ai calici, dove, prendendo il nome di setti, vanno a confluire. I calici di diversa forma sono quasi tutti isolati, ma disposti in serie in modo da avere piccole colline poco e dolcemente rilevate. I calici che non sono vicini alla scissione ci presentano 12-18 setti, senza contare quelli più sottili che sono altrettanti. I calici del tutto isolati sono ovali, diametro maggiore circa 4 mm., 3 il minore. Le faccie dei tramezzi non ci presentano granulazinni, ma linee d'accrescimento in senso obliquo.

Questa specie si può facilmente confondere colla *Cyathoseris apennina*; ma il piano comune a foggia di paniere, non permette confusione. Per la forma generale ricorda lontanamente la *Comoseris cistaeformis* Michtti.

Sassello (6), Dego (2).

Genus **Thamnastraea** (Lesauvage) E. H.

1860. Milne Edwards. *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 555.

108. *Thamnastraea volvox* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 46.

Credo che questa forma non sia stata mai figurata.

Sassello (1).

109. *Thamnastraea adscita* n. sp.

Tav. I, fig. 23.

« Th. polypario composito, convexo. Areis intercalicinalibus novis individuis Septis.-
« costalibus, acutis, inaequalibus, communibus. Calicibus subrotundis, fossula pro-
« funda, marginibus paullulum elatis, vix distinctis. Septis extus crassiusculis fortiter
granulatis. Synapticulis incipientibus ».

Grande polipajo, composto, convesso. I calici sono subrotondi, con fossula ben marcata e margini ben poco distinti, del diametro di circa un centimetro. Negli spazî intercalicinali si vedono apparire i nuovi individui che si ottengono per lo strozza-

mento dei calici allungati. I raggi setto-costali confluiscono alla columella assottigliandosi, continuano senza interruzione da un individuo all'altro. Se ne contano per ogni calice 30-40: sono larghi, un poco flessuosi, con angolo superiore acuto: non tutti ci porgono lo stesso spessore. Sulla superficie dei setti si osservano granelli tanto sviluppati, da costituire sinatticule, le quali sono però rudimentali. La columella è sviluppata e dove lo stato del fossile ce lo permette, si vede papillosa.

La forma generale, la gemmazione submarginale, i calici distinti, la columella papillosa, i raggi setto-costali comuni, le sinatticole, sono le caratteristiche che fanno appartenere il fossile al presente genere. Le proporzioni diverse poi di ciascuna parte anatomica differenziano di leggieri questa dalle altre forme congeneri.

Sassello (2).

110. *Thamnastraea Maraschinii* d'Ach. *in litt.*
Tav. II, fig. 10.

Un esemplare porta la determinazione: *Th. Maraschinii* d'Ach. *in litt.* Non fu mai resa da alcuno di pubblica ragione, per i caratteri differenziali che presenta credo sia nuova. Descrivo il fossile.

« Polipajo composto massiccio, leggermente convesso. I calici sono molto vicini « fra di loro, circolari, ben distinti per la loro fossula « profonda; del diametro di 2-3 mm. I setti si conti- « nuano da un individuo all'altro; poco distinto il margine « dei calici. Le superficie dei setti portano granulazioni « che si sviluppano di molto per darci quasi sinatticole « Si osservano lungo la direzione del calice, nell'interno, « traverse endotecali oblique, che non si può dire se le « siano bucherellate o no. Il numero dei setti ascende gene- « ralmente a 16. L'esemplare è completamente spatizzato ».

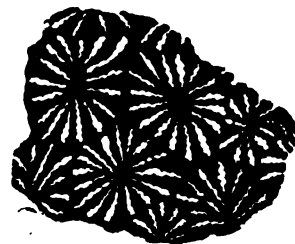



Fig. 16. × 4

Monte Grumi (1).

Genus **Siderastraea** Blainv. = (*Astraea* E. H. [1857].)

1830. Blainville, *Dict. des Sci. Nat.* t. LX, pag. 334.

111. *Siderastraea funesta* Brong.

1823. Brogniart. *Sur les terr. calcar. trapp. du Vicentin*, pag. 84, tav. V, fig. 16.

Roncà (1).

112. *Siderastraea Reussi* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 43, tav. I, fig. 13.

Stazzano (4).

113. *Siderastraea crenulata* Goldf.

1854. Michelotti. *Specim zooph. dil.*, pag. 136, tav. V, fig. 2 (Arstaea galaxa).

I calici sono quasi circolari, i tramezzi relativamente spessi specialmente vicino alla teca. La columella non è molto distinta e compatta, come nella specie seguente.

Stazzano (4), Colli Torino (2), Monte Grumi (1).

114. *Siderastraea italica* Defr.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 310, tav. LXXIV, fig. 5 (Astraea Bertrandiana).

I calici sono decisamente poligonali, le mura sottili ed i tramezzi più sottili della precedente forma.

Stazzano (4), Zinola (2).

115. *Siderastraea detecta* Michtti.

1868. d'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 17, tav. II, fig. 3, *a*, *b*.
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 43, tav. I, fig. 9.

I polipieriti sono allungati, i calici si dicono deformi più che poligonali. La columella poco o punto comparisce alla superficie. Le mura non sono molto distinte.

Stazzano (2).

Sectio. **Madreporaria aporosa.**

1885. Duncan, *Rev. Fam. and. gen.*, pag. 7.

1.ª Fam. **ASTRAEIDAE.**

» Duncan, op. cit., pag. 48.

Sub-Fam. **Astraeidae agglomeratae gemmantes.**

» Duncan, op. cit., pag. 103.

Genus **Plerastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, tom. II, 553.

Se si osservano esemplari di questo genere, che non siano interi e ben conservati, facilmente si possono con errore, ascrivere al gen. *Prionastraea,* come vedremo. Conviene quindi ricordare come nel gen. *Plerastraea* i calici siano quasi superficiali, non separati da solchi e con i tramezzi quasi confluenti. Nel gen. *Prionastraea* i calici sono invece poligonali.

Il presente genere di leggieri si distingue dal gen. *Heliastraea* per la moltiplicazione quasi marginale e non intercalicinale e per le mura prismatiche. A ciò non nasca confusione, è bene avvertire come l'estremità non logora dei calici è circolare, mentre, quando è questa abrasa, si veggono le pareti della teca formare un prisma.

116. *Plerastraea taurinensis* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 19, tav. II, fig. 6 *a*, 6 *b*.

Colli Torino (3).

117. *Plerastraea ornata* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 42, tav. X, fig. 5, 6.

Ad una prima osservazione gli esemplari di questa specie si ascriverebbero al gen. *Heliastraea;* ma convien fare attenzione alla confluenza dei raggi setto-costali, ai calici (non erosi) che sono ben circoscritti. La spatizzazione degli esemplari non ci

permette di descrivere altri caratteri che servirebbero a dileguare il dubbio che addiventa maggiore in questo caso per la poca visibilità della teca prismatica.

Dego (2), Colline Torino (1).

***

I due esemplari che ora descrivo appartengono a questo genere e quasi certamente a due distinte nuove specie. Il cattivo stato di conservazione e la mancanza di alcune parti del polipaio me ne fanno astenere.

« Polipajo composto, che si potrebbe ascrivere al gen. *Metastraea*, se la teca non si incontrasse poco compatta e la columella, invece di essere papillosa, fosse porosa. I calici sono imperfettamente poligonali, ma, dove la superficie di essi è erosa, si vedono le mura prismatiche. I setti sono molti, sottili, granulosi, si proseguono per mezzo dei raggi setto-costali da un calice all'altro. Si riscontra la gemmazione submarginale, ma con centri calicinali distinti. Vi sono moltissime traverse endotecali, oblique. Manca tutta la superficie inferiore del corallo che mostra uno spessore di 4 centim. Il diametro dei calici misura da 2-5 mm. Ciò serve abbastanza bene per distinzione specifica ».

Stazzano (1).

« Polipajo composto, disteso in lamina spessa, poco meno poco più, un centim.; incrostante; mancante di epitecio. La spatizzazione è completa. I calici mostrano che le mura non sono campatte, essendo talvolta allontanate fra loro e riunite dai raggi setto-costali, che con i setti sono finemente granulosi. I calici, quantunque non ben circoscritti, pure ad occhio pratico ed armato di debole lente d'ingrandimento si fanno riconoscere per poligonali, come si osserva nei punti erosi. La columella è scarsissima e papillosa. Abbondantissime le traverse endotecali, oblique. I calici sono di diametro diverso, oscilla dai 3-6 mm. ».

Sassello (1).

Genus **Latimaeandra** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist nat. Cor.*, tom. II, pag. 543.

118. *Latimaeandra Gastaldii* H.

1852. J. Haime, *Mém. de la Soc. géol. de France*, 2e sér., t. IV, pag. 287.

Il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 71) riporta con qualche dubbio come sinonimo di questa forma la *L. daedalea* Reuss (*Paläeont. Stud. I*, pag. 23, tav. VIII, fig. 3). A me mancano esemplari di quest'ultima specie, quindi non posso dire altro che il Reuss persiste a tener divisa la *L. daedalea* (*Paläont. Stud. III*, pag. 39). Non conosco nessuna figura che rappresenti la specie.

Monte Grumi (4).

119. *Latimaeandra Michelottii* H.

1852. J. Haime (loc. cit.), pag. 287 (senza figure).

Monte Grumi (1).

120. *Latimaeandra repanda* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 45 (senza figure).

L'esemplare che ho avanti di me, quantunque sia il tipico, pure non posso rimanere meno incerto del d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 19) riguardo alla posizione generica. Lo stato di conservazione non buono è la causa dell'esitazione. A ciò aggiungasi come lo stesso Michelotti fece fare passaggio a questa forma prima nel gen. *Ulophyllia* e quindi nel gen. *Mycetophyllia*, come si vede nelle diverse scritte attaccate al fossile.

Sassello (1).

Genus **Prionastraea** E. H. = (*Metastraea* E. H.).

1857. Milne Edwards, *Hist, nat. Cor.*, tom. II, pag. 513.

Questo genere somiglia al gen. *Septastraea* d'Orb., che appartiene ad un'altra sotto-famiglia per la riproduzione fissipara; mentre qui troviamo la gemmazione che si opera per via di gemme che sbucciano lungi dalla columella e molto vicine agli orli dei calici (submarginale). Crescendo le gemme si allontanano dall'individuo generatore. In ciò troviamo la ragione dell'integrità del centro calicinale. Tanto non avviene nella riproduzione scissipara. Maggiore è l'affinità di questo col gen. *Plerastraea*, potendosi confondere facilmente, quando si osservano solo frammenti di polipaî.

121. *Prionastraea Fromenteli* E. Sismd.

1871. E. Sismonda, *Mat. paléont.*, pag. 45, tav. II, fig. 2.

Sassello (1).

122. *Prionastraea multisepta* E. H.

1871. E. Sismonda, *Mat. paléont.*, pag. 46, tav. II, fig. 1.

Colli Torino (3).

123. *Prionastraea aranea* E. H.

1849. Mil. Edw.-H., *Ann. des Sc. nat.*, vol. XIII, pag. 133 (non v'ha figura).

Sassello (1), Colli Torino (1).

124. *Prionastraea propinqua* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 46 (non figurata).

Sasello (1).

125. *Prionastraea geometrica* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil.*, pag. 113, tav. IV, fig. 2 (Sarcinula).

Colli Torino (1).

126. *Prionastraea irregularis* E. H.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 61, tav. XII, fig. 9 (Astraea).

Colli Torino (8).

127. *Prionastraea inaequalis* Meneg.

1867. D'Achiardi, *Cat. Cor. foss.*, pag. 7 (non figurata).

Montecchio (1).

128. *Prionastraea parvula* Michtti.

1871. Sismonda E„ *Mat. paléont.*, pag. 46, tav. VIII, fig. 11. 11 *a*.

La figura ha proporzioni maggiori dell'esemplare.

Sassello (1).

129. *Prionastraea incerta* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Stud. Comp.*, pag. 19, tav. II, fig. 5 *a*, 5 *b* (Metastraea?).

Il pessimo stato di conservazione, in cui si trovano gli esemplari di questa specie lascia il d'Achiardi incerto sulla determinazione generica, tanto più perchè il gen. *Metastraea* era stato istituito sopra una sola specie fossile dei depositi recenti dell'Egitto: *Metastraea Aegyptorum* E. H. (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 525, tav. D. 9, fig. 1). Lo stesso d'Achiardi opina che potrebbe anche darsi il caso che si trattasse di una *Latimaeandra;* ma il trovarsi i calici quasi sempre isolati, e se in serie non se ne scorgono più di due, come accade dove la gemmazione è calicinale, credo che siano caratteri sufficienti, per riferirla al presente genere. Ho poi praticato una sezione che mi ha mostrato una columella spugnosa, che certamente non può chiamarsi rudimentale, come quella delle forme del gen. *Latimaeandra.* La teca poi è riunita intimamente per tutta la lunghezza dei polipieriti. Nulla si può dire dei denti, essendo sempre cattivo lo stato dei fossili.

Dego (2 fram.), Alpi Venete (1 fram.).

130. *Prionastraea centralis* Meneg. in litt. (*Metastraea*).

Tav. I, fig. 14, 15, 24.

« P. polypario composito, astraeiformi; superficie inferiori .... Calicibus irre-
« gularibus, nunc polygonis, nunc circularibus, nunc elongatis. Fossula profundiu-
« scula. Septis multis, granulosis, confluentibus, extus crassiusculis. Thecis semper
« adhaerentibus. Traversis plurimis. Columella parva, spongiosaque. Endothecio abun-
« dante ».

Non so dove ed a chi il Meneghini comunicò l'esemplare con questo nome specifico. Il Michelotti, nei manoscritti, aggiunge il dubbio della determinazione generica che per i calici poligonali vorrebbe riferirla ad un genere vicino al gen. *Favia.* Bisogna per ciò osservare come la forma del calice non sia stata, a ragione, mai tolta per carattere generico differenziale, come si potrebbe provare con moltissimi esempî.

Polipajo composto, astreiforme. La superficie inferiore non si conosce per la profonda erosione subìta dall'esemplare. I calici sono irregolari, talvolta sono poligonali, altra rotondi, specialmente quando sono da poco separati per gemmazione submarginale; finalmente quelli con gemmazione calicinale sono allungati. La fossula misura in profondità circa la metà del diametro del calice, che varia da 1-4 mm. La columella piccola e spugnosa. Si contano molti setti, che sono confluenti, granulosi, molto spessi verso la teca. Questa è intimamente saldata con quella dei vicini individui per tutta la lunghezza. Le traverse sono abbondanti, quindi presenza dell'endotecio. Il polipajo offre un piccolo peso per la sua leggerezza.

Nello studiare questa forma mi ha sorpreso la irregolarità grandissima nella disposizione dei calici in confronto colla maravigliosa regolarità che si osserva nella parte inferiore. Essendo abraso il piano inferiore, ho levigato la superficie inferiore. Da un punto centrale si dipartono i tramezzi che, senza mai essere interrotti, si allontanano e vengono intramezzati da novelli. I setti sono riuniti da traverse endotecali che sono

sottili; tra queste se ne trovano di quelle maggiori in ispessore che non sono altro che le teche dei polipieriti.

Monte Gibio (1), Stazzano (1).

***

Prionastraea elegans (*Metastraea*). È cattivo lo stato di conservazione del fossile che porta questo nome. Io con qualche dubbio lo riferisco a questo genere, giacchè non mi offre la possibilità di osservare la parete inferiore e gli altri caratteri essenziali. Ecco i distintivi riscontrati: « Polipajo emisferico, massiccio, di molto spesso. Calici irregolari, poligonali, sovente pentagonali, a bordi sottili ed acuti: quest'ultimo carattere rende elegante la superficie superiore. I setti sono molti, am poco visibili nel calice per l'abbondanza dell'endotecio; essi confluiscono irregolarmente nel centro, dove costituiscono una columella spugnosa. S'intravedono malamente i denti che adornano l'estremità dei setti. La fossula è un poco più profonda della metà del diametro del calice, che varia dai 5-10 mm. Teca unita del tutto e per tutta la lunghezza ».

Sassello (1).

Genus **Isastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 526.

Non si possono riferire a questo genere, fondato sopra esemplari giurassici, i fossili del Terziario senza gravissimo dubbio. Difatti il Reuss (*Paläont. Stud. I*, pag. 44, tav. XIII, fig. 3) istituì la specie *I. affinis*, che il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 70) riporta al gen. *Prionastraea*, corrispondendo la descrizione e la figura esattamente alle specifiche di quest'ultimo genere.

Ora il Reis (*Die Korallen der Reiter Schichten*, pag. 151) riferisce la *I. affinis* Reuss al nuovo genere *Heterastraea* Reis (parallelo al gen. *Leptastraea*) nella forma *Heterastraea Michelottina* Cat. sp. — Parimenti dubbia mi sembra la posizione della *I. miocenica* Seg. (*Disq. paleont.*, pag. 113), tav. XIII, fig. 4, 4 *a*, 4 *b*) per non presentare ben distinti i calici. Rometta (1).

Genus **Stylocoenia** E. H. (emend. Duncan).

1880. Duncan, *Pal. Indica*, ser. XIV, *Corals of Sind, for illustration*, pag. 30.

131. *Stylocoenia lobato-rotundata* Mich.

1842. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 62, tav. XIII, fig. 2 (Astraea).
1864. Reuss, *Die Fossilen Anthozoen* .... von Oberburg, pag. 20, tav. V, fig. 1.

Dego (7), Montecchio (14).

132. *Stylocoenia saxulensis* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 9. tav. I, fig. 7.

A questa si deve riferire la *Stylophora micropora* Michtti secondo il d'Achiardi (*Cor eoc. Friuli*, pag. 62).

Sassello (1).

133. *Stylocoenia monticularia* Schweigger.

1819. Schweigger, *Beob. auf Naturg. Reisen*, tav. 6, fig. 62 (Stylophora).
1850. Milne Edwards et J. Haime, *British fossil Corals*, pag. 32, tav. V, fig. 2.

Crosara, Val di Lonte (6).

134. *Stylocoenia mutata* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 66. Non figurata.

Colli Torino (4).

135. *Stylocoenia taurinensis* Mich.

1845-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 62. tav. XIIII, fig. 3 (Astraea).
1863. Reuss, *Die Fossilen*... von Oberburg, pag. 21, tav. V, fig. 2. — Idem, 1873. *Paläont. Stud.* pag. 42, tav. XLV, fig. 1.

Questa forma somiglia di molto alla *S. monticularia* e ne vennero precisate le differenze dal d'Achiardi. Riporto le distinzioni fra la presente e la *S. lobato-rotundata*, correndo fra di loro molte analogie. Nella *S. taurinensis* si hanno 6 tramezzi confluenti al centro; mentre nella *S. lobato-rotundata* se ne contano 12; in quest'ultima forma i calici sono di maggior diametro.

Belforte (3), Dego (molti), Sassello (6).

Genus **Stephanocoenia** E. H. = (*Stephanastraea* Etallon, 1864).

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, tom. II, pag. 264.

136. *Stephanocoenia sigillarioides* Meneg.

1866-68. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Venete*, pag. 47, tav. IV, fig. 7 *a*, 7 *b*.

Trovo nella Collezione due piccoli esemplaretti che sono determinati col nome di *S. cellaroides* Meneghini. Per quanto abbia per ogni dove rovistato, non ho potuto mai riscontrare questa specie. I fossili debbono certamento essere ascritti a questa forma, calzando e la descrizione e le figure della forma date dal d'Achiardi. A ciò si aggiunga anche l'uguaglianza della provenienza

Vicentino (2).

Genus **Astrocoenia** E. H. (emend. Duncan) = *Coenastraea* Etallon, 1864).

1885. Duncan. *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 120.

137. *Astrocoenia reussana* d'Ach.

1866-68. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Venete*, pag. 46, tav. IV, fig. 6 *a*, 6 *b*.

S. Giovanni Ilarione (1).

138. *Astrocoenia ornata* Michtti.

1838. Michelotti, *Specimen. zooph. dil.*, pag. 172, tav. VI, fig. 3 (Porites).
1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 63, tav. XIII, fig. 4 (Astraea).

Colli Torino (11).

Genus **Leptastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. cor.*, t. II, pag. 493.

139. *Leptastraea anomala* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 52, tav. VIII, fig. 7.

Appena veduti gli esemplari si riferirebbero al gen. *Heliastraea,* ma con un attento esame si veggono i tramezzi molto ravvicinati, con gli orli superiori quasi lisci; il muro costale ben sviluppato e compatto; l'endotecio quasi totalmente mancante, caratteri tutti del gen. *Leptastraea.*

Sassello (3).

Genus **Phyllocoenia** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 272.

A questo genere non si possono riferire che, con molto dubbio, esemplari che potrebbero, quasi con la medesima certezza, essere riportati in altri generi, come: *Heliastraea, Stylina.* Ciò è confermato dall'esitazione che si riscontra in tutti coloro che trattarono del genere, come il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 67; *Coralli* ecc., *del Friuli,* pag. 49; *Coral. Alp. Venete*, pag. 51 e seg.) ed il Reuss (*Paläont. Stud. I*, pag. 28, 29), e dal continuo passaggio di molte forme da un genere all'altro.

Il gen. *Phyllocoenia* si differenzia dal gen. *Heliastraea* per possedere quest'ultimo i setti, almeno dei primi cicli, coronati di denti, carattere difficilmente riscontrabile nei fossili, massime quando sono spatizzati. Il gen. *Heliastraea* ci presenta la columella, la teca e l'endotecio, mentre nel gen. *Phyllocoenia* è più abbondante l'esotecio. Infatti di tratto in tratto lungo i polipieriti troviamo cingoli, che non si trovano nel gen. *Heliastraea.*

Poco visibile è la differenza che corre fra il nostro genere ed il gen. *Stylina;* nel primo osserviamo la columella rudimentale, nell'altro ci si offre stiliforme. Sono questi caratteri differenziali che dànno luogo ad incertezze, essendo difficile il trovare la columella stiliforme negli esemplari fossili (d'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 66).

Pari difficoltà s'incontra nello specificare. Infatti il De Schauroth, forse non sempre a ragione, riconobbe per differenze individuali quelle che ad altri sembrarono specifiche (*Verseich... der Verst....* pag. 184, tav. VI, fig. 6. 1865).

140. *Phyllocoenia annulata* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 44, tav. IX, fig. 1 (Sarcinula).

Monte Grumi (1).

141. *Phyllocoenia lucasana* Defr.

1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Al. Ven.*, I, pag. 50, tav. V, fig. 2,

Monte Grumi (1), Dego (1).

142. *Phyllocoenia brevissima* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 56, tav. XI, fig. 5 (Astraea).

Creazzo nel Vicentino (1).

143. *Phyllocoenia deperdita* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 35, tav. III, fig. 15, 16.

Questa specie è molto somigliante alla *Phy. irradians* E. H., ma il diametro dei calici è minore, misurando appena mm. 8 e gli orli dei calici non si elevano oltre 2 mm.; nella *Phy. irradians* invece il diametro è sempre maggiore e gli orli più elevati.
Sassello (1).

***

Nella Collezione in istudio trovo alcuni esemplari con le seguenti determinazioni:

Phyllocoenia concinna. Stazzano (1).
" *superstes*. Torino (2).
" *admota*. Sassello (2).
" *hemispherica*. Sassello (2).
" *irradians*. Dego (2).

Quest'ultimo esemplare si deve ritenere con molto dubbio della medesima specie del *Ph. superstes*, essendo in cattivo stato di conservazione. Le altre non sono mai state di pubblica ragione, meno la *Ph. superstes* (*Mat. paléont.*, Sismonda E., pag. 58, senza figura).

Quantunque questi polipaj fossili si potrebbero riferire a tante nuove specie, osservandoli superficialmente; pur possono comodamente essere riportati ad una sola specie. I caratteri specifici si riferiscono più che ad altro alle proporzioni delle dimensioni degli elementi anatomici; quantunque si abbiano delle forti oscillazioni anco riguardo a questo rapporto, essendovi diametri di calici che raggiungono 3 e 4 mm. e altri che non oltrepassano un millimetro. Le altre specifiche si riscontrano di sovente nello stesso polipajo e quindi non sono sufficienti per la distinzione delle specie. Il cenenchima facilmente erodibile fa sì che gl'individui di polipaj di una stessa specie, e talvolta nello stesso esemplare, sporgano diversamente sopra la massa generale. A nulla può servire il criterio della direzione dei polipieriti, giacchè per essere la colonia incrostante è qui costretta a presentarci individui piggiati, e là ce li offre distanziati ed obliquî. In ragione dello sviluppo va il numero dei setti, i quali per tal motivo non servono ad una giusta distinzione; a ciò aggiungasi come sia difficile esaminare tali caratteri per la spatizzazione che si riscontra quasi per regola generale.

Per tali motivi tolgo a tipo la Sp. *Ph. superstes* Michtti, cui riferisco gli altri menzionati, ed allargo i confini del breve cenno del Sismonda (op. cit.): « Polipajo in « lamine talvolta spesse, incrostante, a polipieriti uniti da un cenenchima non sempre « ugualmente abbondante (quindi varia la distanza dei polipieriti), dove si scorgono « per larga plaga del calice le coste; gl'individui sono più o meno sporgenti, diritti ed « obliquî, la loro superficie porta coste, dove l'erosione non abbia pareggiato, pres« sochè uguali, con traverse esotecali non frequenti. Il calice passa per le forme dal

« circolare all'ellittico, talvolta comincia ad essere irregolare. Svariate sono le dimen-
« sioni. Il calice racchiude una fossula profonda, circa la metà del diametro. Ho riscon-
« trato tre cicli di tramezzi, quelli del primo ordine più sviluppati. Columella rudi-
« mentale, talvolta mancante, altra poco sviluppata, ma visibile ».

L'erosione più o meno profonda può dar luogo ad aspetti molto diversi fra i fossili di una medesima specie, togliendo le ornamentazioni e spesso anche le caratteristiche necessarie per la distinzione.

Tenendo conto di queste cose e trascurando quelle piccole differenze che non possono assorgere a caratteri specifici, mi penso che giustamente i sopradetti fossili siano riuniti in una sola specie. La cronologia non solo non offre ostacolo a questo aggruppamento, ma grandemente lo favorisce.

***

Altri esemplari portano tre nuovi nomi specifici, cioè:

Phyllocoenia esponens (1) Montecchio.
» *consepta* (1) Dego.
» *patula* (1) Sassello.

Dopo essermi accertato per quanto è possibile intorno alla loro posizione generica, ho voluto confrontare questi con gli esemplari congeneri. La loro abbondanza mi ha permesso di ottenere una serie che a grado a grado fa passare dall'una all'altra. Anzi si deve qui notare come non tutte le specie del genere siano presenti. Ecco l'ordine nel quale facilmente ho potuto porre i diversi esemplari, essendo le più forti caratteristiche specifiche riposate sopra le proporzioni dei fossili:

Phyllocoenia lucasana.
» *brevissima.*
» *esponens.*
» *consepta.*
» *deperdita.*
» *patula.*
» *irradians.*

Gli esemplari riferiti a specie nuove intercalano le conosciute così bene da renderne difficile la distinzione, che prima appariva facilmente. Poi porterò i caratteri di ciascuna, confrontandoli con quelli delle vicine conosciute, e se la mancanza dei caratteri specifici sufficienti mel permettono, farò entrare nelle note quelle nuove, allargandone i confini.

Ph. esponens. — Dalle brevi descrizioni e dalle pessime figure che si hanno della *Ph. brevissima,* cui la nostra si avvicina moltissimo, non posso attingere altro che dubbî. Ma anche a giudizio di Michelotti ritengo che si differenzia dalla *lucasana* per le sole proporzioni più ridotte. Era questo il posto assegnato alla *brevissima.* Per la qual cosa credo che il presente esemplare si debba riferire senz'altro alla

Ph. brevissima Cat. Nella descrizione però non si dovrebbe dire che i « polipieriti sporgono nella loro parte libera a guisa di rapidissimi coni », essendo questo un caso particolare, ben conservati sporgono di poco e con discreta inclinazione, ma non *rapidissima*. Le dimensioni dei calici possono oscillare dai 2-6 mm. di diametro. Lo spessore delle coste e dei tramezzi mi lasciano un poco perplesso. Sino a che non avrò osservato migliori esemplari, credo che questa sia la migliore opinione.

Montecchio (1).

Ph. consepta. — Questo esemplare fu mandato dal Michelotti al Reuss, il quale lo rimandò coll'indicazione generica di *Heliastraea*, senza la specifica. Esso esemplare si può riferire al gen. *Phyllocoenia*, giacchè, per quanto è possibile, non si scorgono denti sull'orlo dei tramezzi e delle coste che sono meglio conservate. Oso dire di più: appartiene ad una specie nuova certamente, quantunque per la cattiva conservazione e per la relativa piccolezza non ci permetta l'osservazione sopra tutte le parti anatomiche. Per lo chè sarà per ora imperfetta la descrizione. « Polipajo in lamine « che accennano in qualche punto a divenire spesse; incrostante. Polipieriti poco o « nulla sporgenti in generale, uniti fra loro dalle coste e dall'esotecio; spesso ravvi- « cinati fra di loro di molto; non è però assolutamente mancante il cenenchima. Ca- « lici circolari, subcircolari, talvolta divengono irregolari. Diametro 5-7 e 8 mm. Co- « lumella rudimentale. Fossula pare poco profonda. Setti....... tre cicli completi, « spessissimo vi si riscontra la metà del quarto, ch'è sempre incompleto. Traverse « endotecali ». Dego (1). — La riduzione di cenenchima, la vicinanze dei polipieriti, e le dimensioni dei calici, e la loro poca elevazione, sono i caratteri che distinguono questa dalle specie congeneri, specialmente dalla *Phy. deperdita*, cui si avvicina moltissimo.

Ph. patula. — Non riscontrando denti sull'orlo delle coste, si può quasi con sicurezza affermare la posizione generica del fossile. È giusto però avvertire come le coste sono alquanto erose. Per la forma generale si assomiglia alla *Phy. deperdita*, e pel maggiore sviluppo in ispessore dei tramezzi accenna e ricorda la *Phy. irradians*, in cui non sempre si ha una grande elevazione dei polipieriti. Se mi pungesse la voglia di creare nuove specie, non mi mancherebbero caratteri, che direi speciosi più che specifici; ma amando sopra ogni cosa l'ordine e la semplicità, riferisco il fossile alla *Ph. deperdita* Michelotti, differenziandosi dal tipo di questa per la sola regolarità di calici e per una appena sensibile grossezza.

Sassello (1).

Genus **Plesiastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 489.

144. *Plesiastraea Desmoulinsii* E. H.

1863. Seguenza G., *Disq. paleont.*, pag. 110, tav. XIII, fig. 2, 2 *a*, 2 *b*.

Stazzano (3); Rometta (3), Piazza America (3), Sicilia.

Genus **Solenastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 495.

145. *Solenastraea monsvialensis* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 61, tav. XI, fig. 5 (Astraea).
1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, pag. 51, tav. V, fig. 3 *a*, 3 *b* (Phyllocoenia).
1868. Reuss, *Paläont. Stud. I.*, pag. 30, 31, tav. XII, fig. 4 *a*, 4 *b*, 4 *c*.

Riporto col Reuss questa forma nel presente genere per la mancanza dei raggi setto-costali che uniscano i polipieriti fra di loro, ciò che viene fatto per mezzo del cenenchima. Negli spazî intercalicinali si osservano delle coste che sono appena superficiali, come ci dimostra la sezione disegnata dal d'Achiardi (loc. cit. Fig. 36).

Monte Viale (4).

Genus **Phymastraea** E. H.) emend. Duncan = (*Amphiastraea* Etallon 1883).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 106.

146. *Phymastraea Capellinii* n. sp.

Tav. II, fig. 11.

« Phy. polypario, incrustante, laminis subtilibus, superne subplano, dulcissime « convexo. Epithecio subtili. Theca crassiuscula. Costis nullis. Superficie externa indivi- « duorum verrucosa. Calicibus superne subpentagonis, irregularibus, inaequalibusque; « interne vero pentagonis inaequilateribus. Fossula profunda ?. Septis lamellaribus; « fortiter, irregulariterque granulatis; confluentibus; extremitatibus dentellatis. Colu- « mella parva, fasciculari. Duobus cyclis completis, tertio vero rudimentali ».

Polipajo incrostante in lamine sottili dai 3-9 mm.; superiormente è pianeggiante; tutta la superficie si mostra dolcemente convessa. L'epitecio è sottilissimo e non fa punto scorgere le coste. I polipieriti sono riuniti non per la teca, ch'è abbastanza spessa, ma per larghe placche verrucose che si trovano a varia distanza. Ne nascono dei vacuoli, che sono più abbondanti là dove sono vicini 3 o 4 polipieriti. Lo stato di conservazione del fossile non ci permette di dire assolutamente che la fossula era profonda, ma si può congetturare da ciò che ci fanno vedere i calici più conservati. I calici esternamente sono subpentagonali, irregolari e di vario diametro, da poco più di un mm. sino ai 3 mm. Sono però rarissimi quelli che ci si presentano di queste grandi dimensioni. Nella sezione i polipieriti ci si presentano a superficie esterna pentagonale, ma con lati di varia lunghezza. I setti sono sempre in numero maggiore di 20 senza raggiungere il numero 48, che costituirebbe la presenza del 3° ciclo. Essi non arrivano tutti al centro, ma solamente quelli dei due primi ordini; sono lamellari, ricoperti di granulazioni e all'estremità superiore dentellati. Il carattere della dentellatura che si rende sempre più vistosa, andando dall'esterno verso l'interno, è un carattere che si riconosce a gran fatica pel cattivo

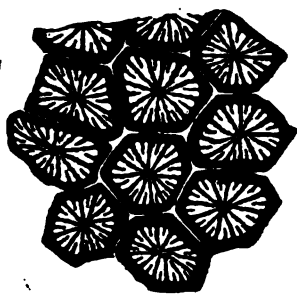



Fig. 17. × 3,5

stato del fossile. La columella è piccola, ma si mostra fascicolare. Gli orli dei calici sono liberi e di forma grossolanamente circolare. La gemmazione si effettua all'orlo del calice.

Dalla descrizione della specie appare manifesta e chiara la giusta posizione generica, nonchè i caratteri specifici differenziali. Si distingue di leggieri dalla *Ph. Valenciennesi* E. H (*Ann. sc. nat.*, 3e sér., t. X, tav. 9, fig. 3, 3 *a*) precipuamente per la columella molto meno sviluppata, per il minor numero dei setti, per le più piccole dimensioni dei calici, per la profondità dei calici:

Dalla *Ph. profundior* E. H. (*Ann. Sc. nat.*, 3e sér., t. XII, p. 125) per la columella più piccola, per il numero minore dei setti, per le molto minori dimensioni del calice.

Finalmente si allontana dalla *Ph. aspera* Quelch (*Report on the Reef.-corals.*, *Voy. Challenger*, vol. XVI, pag. 105, tav. IV, fig. 1, 1 *a*, 1 *b*) per la piccolezza molto minore dei calici, per la minore distanza fra i polipieriti, e per il più piccolo numero dei setti.

Albugnano (4).

Dedico questa forma elegantissima al prof. comm. G. Capellini, illustrazione della scienza paleontologica, in segno di profonda stima e di riconoscenza per gli ammaestramenti che gentilmente cercò d'impartirmi non solo con la viva voce, ma ancora con lunghissime corrispondenze.

Genus **Cyathomorpha** Reuss = (*Agathiphyllia* Reuss).

1869. Reuss, *Paläont. Stud. II.*, pag. 31.

Il presente genere non fu ammesso dal d'Achiardi per la stessa ragione per cui non accettò il gen. *Agathiphyllia* Reuss. Lo stesso Reuss confessa di non essere ben certa l'esistenza di veri e proprî paluli, potendosi considerare quegli organi come denti interni paliformi. In questo caso pel d'Achiardi la *C. conglobata* Reuss era sinonimo della *Brachyphyllia affinis* d'Ach. (1867) (*Stud. comp.*, pag. 68, not. 1).

Il Reis (*Die Korallen der Reiter Schichten*, pag. 147) dimostra la giusta esistenza di questo genere e la seguente sinonimia, venendo così a sciogliere una quistione importante non tanto pel genere stesso, quanto per le forme che, tenute disparate, vengono ora riunite.

147. *Cyathomorpha rocchettina* Michelin.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 58, tav. XII, fig. 2 (Astraea).
1856. Catullo, *Dei terr. sed. Ven.*, pag. 57, tav. XII, fig. 1 (Astraea).
1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, 462 (Heliastraea).
1868. D'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 14, tav. I, fig. 12, 13 (Heliastraea).
1869. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 33, tav. XXII, fig. 1 (Heliastraea Guettardi).
1869. Id., id., id., pag. 32, 33, tav. XXII, fig. 2, 3 (C. gregaria).
1869. Id., id., id., tav. XXII, fig. 4 (C. conglobata).

Colli Torino (5).

148. *Cyathomorpha affinis* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 65, tav. VIII, fig. 1 (Astraea).
1867. D'Achiardi, *Corr. foss. Catg.*, pag. 7 (Brachyphyllia).

Monte Grumi (1).

149. *Cyathomorpha umbellata* Reuss.

1869. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 31, tav. XXI, fig. 6 (Brachyphyllia).

Monte Grumi (2).

Riferisco a questo genere, col Reis, le due ultime forme citate per le giuste osservazioni che espone riguardo al gen. *Cyathomorpha* (*Die Korall.*, pag. 147-150).

Genus **Heliastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 456.

150. *Heliastraea ambiqua* E. Sismond.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 48, tav. X, fig. 9, 10.

Sassello (4).

151. *Heliastraea apenninica* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 15, tav. I, fig. 9, *a*, *b*, *c*.

Sassello (2).

152. *Heliastraea bormidensis* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 46, tav. VIII, fig. 8 (Dimorphastraea).

Riporto questa forma nel presente genere, offrendone tutti i caratteri generici tanto per la forma generale, per la columella spugnosa, per i raggi settocostali che uniscono i diversi individui, quanto per l'esotecio ed endotecio ecc.

Sassello (2), Dego (2).

153. *Heliastraea Defrancei* E. H.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 59, tav. XII, fig. 6 (Astraea argus).

Colli Torino (3), Monte Grumi (2).

154. *Heliastraea ellisiana* Defr.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 60, tav. XII, fig. 8 (Astraea astroites).

Stazzano (molti), S. Agata-fossili (molti), Colli Torino (molti); Dego (2).

155. *Heliastraea eminens* Reuss,

1868. Reuss, *Paläont. Stud. I*, pag. 22, tav. V, fig. 4.

Dego (1), Sassello (2).

156. *Heliastraea plana* Michelin.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph*, pag. 60, tav. XII, fig. 7 (Astraea).

Colli Torino (4)

157. *Heliastraea planulata* d'Ach.

1689. D'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 14, tav. I, fig. 14.

Colli Torino (2).

158. *Heliastraea prevostana* E. H.

1863. Seguenza G., *Disq. paleont.*, pag. 108, tav. XIII, fig. 6

Colli Torino (1).

159. *Heliastraea reussana* E. H.

1847. Reuss, *Die fossilen Polyparien* ....., pag. 17, tav. II, fig. 7, 8 (Explanaria astroites).

Dego (2).

160. *Heliastraea vesiculosa* E. H.

1850. Milne Edwards, Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3ª sér., t XII, pag. 107. Non figurata.

Colli Torino (1).

161. *Heliastraea alpina* d'Ach.

1875. D'Achiardi, *Coralli eocenici del Friuli*, pag. 50, tav. XI, fig. I.

S. Giovanni Ilarione (3).

162. *Heliastraea Hilarionensis* ? d'Ach.

1868. Reuss, *Paläont. Stud. I*, pag. 30, tav. XII, fig. 1 (Heliastraea immersa).
1875. D'Achiardi, *Cor. eoc. Friuli*, pag. 51.

S. Giovanni Ilarione (2) [1].

Genus **Thegioastraea** Michtti penes Sismonda.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 48.

Quantunque ben descritto questo genere dal Sismonda, pur nulla meno stimo opportuno farne risaltare maggiormente alcune differenze generiche. Il gen. *Thegioastraea* comprende forme molto vicine ai generi *Heliastraea* e *Brachyphyllia*.

Fa ostacolo all'unione col gen. *Heliastraea* il modo di gemmazione, la mancanza quasi assoluta di epitecio e di esotecio, gli orli dei calici che non sono liberi nè rialzati.

La mancanza di mura distinte, lo sviluppo dei tramezzi con forti granulazioni, il non avere gli orli rialzati non permettono la fusione del nostro genere col gen. *Brachyphyllia*.

163. Sp. *Thegioastraea Roasendai* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 48, tav. X, fig. 7. 8.

Colli Torino (2).

Sub-fam. **Astraeidae agglomeratae fissiparantes.**

Genus **Septastraea** d'Orb. [2].

1849. D'Orbigny, *Note sur les Polyp. foss.*, pag. 9.

164. *Septastraea papyracea* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 61, tav. X, fig. 18, 19.

Colli Torino (1).

[1] Le molteplici forme del genere *Heliastraea* richiedono un nuovo riordinamento. La confusione è stata generata dal passare le forme dall'uno all'altro dei seguenti generi: *Heliastraea, Astraea, Siderastraea, Brachyphyllia, Cyathomorpha* ecc.

[2] Nel 1887 (The quarterly Journal of the Geological Society of London) il prof. Martino Duncan propose il nuovo genere *Glyphastraea* (On a new Genus of Madreporaria, with Remarks on the Morphology of *Glyphastraea Forbesi*, Ed. et H., from the Tertiaries of Maryland, U. S.). L'anno

165. *Septastraea laxelamellata* Michtti.

1847. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 41, tav, III, fig. 10, 11.

Sassello (3).

166. *Septastraea polymorpha* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 61 (Non figurata).

Colli Torino (3).

Genus **Aphastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat Cor.*, t. III, pag. 102.

167. *Aphastraea Meneghinii* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 62, tav. III, fig. 5, 5 *a*.

Colli Torino (2).

168. *Aphastraea adscita* n. sp.

Tav. II, fig. 12.

« A. polypario superne subplano, spungioso, levissimo. Theca crassa, vesiculosa.
« Calicibus subcircularibus, distinctis: fossula profundiuscula. Septis-costalibus, com-
« munibus, granulatis. Septis debordantibus, extus crassiusculis, dentatis, granulatis,
« non confluentibus: traversis endothecalibus. Columella visibili, elata, magna, spun-
« giosaque. Tribus cyclis completis, quarto vero rudimentali. Epitheca? ».

Polipajo a superficie superiore pianeggiante, di un tessuto celluloso, leggero. I calici sono subcircolari, distinti e non poligonali come nella *Aph. neglecta* Michtti (D'Achiardi, *Cat.*, pag. 13, tav. I, fig. 10, 10 *a*, 11); di vario diametro. La muraglia si presenta spessa e di molto vescicola È l'epiteca che si confonde con l'endoteca. I raggi setto-costali sono granulosi e comuni a due individui. I setti s'innalzano mediocremente e si osservano maggiormente sviluppati verso l'esterno; alla superficie sono granulati e portano traverse endotecali oblique che ben presto riempiono le cavità intersettali. L'estremità del bordo dei setti è denticolata ed i denti si fanno di maggiori dimensioni di mano in mano che dall'esterno andiamo all'interno. I tramezzi nei calici più piccoli raggiungono il numero di 24; se ne noverano 34 nei più grandi: non confluiscono mai. La columella apparisce sviluppata, ma spugnosa, ben rilevata nella fossula che s'apre sufficientemente profonda. Il diametro del calice in media è di mm. 8. Lo spessore della muraglia misura 3-5 mm.

Del polipajo, come colonia intera, si può dire poco o nulla per la piccolezza del frammento che ho potuto osservare.

---

seguente, nello stesso periodico, il Dr. G. J. Hinde non accettò il genere *Glyphastraea* Duncan (1887) e ne dimostrò l'identità col gen. *Septastraea* d'Orb. (On the History ad Characters of the Genus *Septastraea*, d'Orbigny (1849), and the Identity of its Type Species witch that of *Glyphastraea*, Duncan 1887).

Le caratteristiche specifiche differenziano abbastanza facilmente la forma dalle congeneri, mentre il non potersi chiaramente riconoscere il vero modo di riproduzione fa sorgere qualche esitazione per la posizione generica. La fusione però della teca con l'endotecio ci offre un forte carattere generico.

Albugnano (circd. Asti) (1).

Genus **Goniastraea** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist nat. Cor.*, pag. 444.

169. *Goniastraea diversiformis* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 89, tav. XII, fig. 5 (Astraea).

Colli Torino (1).

170. *Goniastraea aequicostata* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 64, tav. IV, fig. 8.

A prima vista la si direbbe appartenere al genere *Plerastraea*, ma con una attenta osservazione si riconoscono gli orli dei calici acuti e crenulati, ciò ch'è carattere del presente genere.

Colli Torino (1).

171. *Goniastraea propinqua* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 65, tav. X, fig. 13.

Colli Torino (3),

Le due specie seguenti con grandissimo dubbio si riferiscono a questo genere, quantunque difficilmente troverebbero un posto più naturale in altri. Ci presentano però tutti e due i calici circolari o quasi, ciò che non è carattere del genere *Goniastraea*.

172. *Goniastraea ? crassicostata* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 63, tav. IV, fig. 5.

Colli Torino (2).

173. *Goniastraea ? miocenica* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mal. paléont.*, pag. 64, tav. IV, fig. 3.

Colli Torino (3).

174. *Goniastraea ? conferta* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 63, tav. VIII, fig. 9.

Nei due esemplari che ho avanti a me, che sono quelli figurati « op. cit. », per effetto della fossilizzazione, non permettono di riconoscere i tenui tramezzi endotecali, nè la teca. Laonde rimango molto incerto sopra la determinazione generica e sopra l'esistenza stessa della specie.

Colli Torino (2).

Genus **Spinellia** d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven. II*, pag. 16.

175. *Spinellia pulchra* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven. II*, pag. 17, tav. X, fig. 7.

Roncà (1).

Genus **Favia** Oken (emend. E. H.).

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. cor.*, pag. 426.

176. *Favia subdenticulata* d'Ach.

1867. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven. I*, pag. 29, tav. XIII, fig. 3.

Croce grande di S. Giovanni Ilarione (1).

Sub-genus n. **Clypeofavia** (genus Michtti *in litt.*).

Trovo citato il presente genere nel trattato dello Zittel (*Palaeozoologie*, *I*, Band., pag. 254) ed attribuito al Mich., abbreviazione che deve certamente riferirsi al Michelotti e non al Michelin, non trovandone cenno alcuno nelle opere di quest'ultimo. Lo Zittel ne avrà preso cognizione o per iscritto o per fossili ricevuti dallo stesso Michelotti, non avendo questi mai reso di pubblica ragione il genere in discorso. Ciò lo farò io di buon grado, avendo la fortuna di poter consultare i manoscritti del Michelotti dove si ragiona del gen. *Clypeofavia*.

Eccone la descrizione: « Polipajo formante lamine poco spesse: piano comune nudo, « avente traccie di pedicillo e di orli concentrici d'ingrandimento. Gemmazione cali- « cinale. Calici talvolta circolari, talvolta allungati e deformati per la fissiparità, ma « non formanti mai serie continue. Fossula profonda, periferie distinte. Columella rudi- « mentale, tramezzi forti quasi uguali, sporgenti verso l'esterno, con denti minuti, ad « eccezione di un ordine più elevato che circonda la columella come altrettanti pa- « letti. Coste non confluenti ».

Questo genere è prossimo al genere *Favia* ed è a questo maggiormente collegato per caratteri di quello che credeva il Michelotti; quindi è che lo riporto come sottogenere del gen. *Favia*. Tuttavia si può separare per parecchi caratteri.

Nel sub-gen. *Clypeofavia* abbiamo un polipajo che dà origine a lamine il cui spessore medio non oltrepassa un centimetro, mentre nel senso della larghezza si può estendere per due decimetri. Nel gen. *Favia* il polipajo è massiccio, cioè lo spessore quasi uguale alla larghezza. Non ci presenta poi la columella propriamente detta, i tramezzi sono spessi e sporgenti; infine non abbiamo la corona dei paletti simulata dai denti interni più grandi del gen. *Favia*.

Il Michelotti istituì il suo genere sopra le due seguenti forme:

177. *Clypeofavia circumscripta* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat paléont.*, pag. 65, tav. VIII, fig. 12 (Favia).

Sassello (5).

178. *Clypeofavia pucherrima* Micchtti.

1861. Michelotti, *Foss. Mioc. inf.*, pag. 40, tav. IV, fig. 1, 7 (Favia).

Sassello (5).

Sub-fam. **Astraeidae confluentes.**

Genus **Hydnophora** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist nat. Cor.*, t. II, pag. 419.

Moltissimi legami uniscono il gen. *Hydnophora* E. H. al nuovo genere *Hydnophyllia* proposto dal Reis (*Korallen der Reiter Schichten*, pag. 130. Cassel, 1889). Le osservazioni dotte ed esatte che fa l'autore intorno al nuovo genere (op. cit., pag. 141) sono di un gran valore scientifico per i rapporti genetici e cronologici, per i caratteri di consanguineità e di parallelismo con i gen.: *Hydnophora*, *Latimaeandra*, *Symphyllia*, *Ulophyllia* ed altri; ma non di una facile applicazione nella sistematica. Per la qual cosa, per ora, riporterò al gen. *Hydnophyllia*, a suo luogo, la sola *Maeandrina Bellardii* E. H.

La grande varietà di forme che offre questo genere nelle diverse località ed il differente modo d'apprezzare i caratteri anatomici sono state le cause di molte scissioni ed unioni che generarono grande confusione nel genere. Senza allontanarmi di molto dalle pristine idee, allettato dalla copia e dalla relativa buona conservazione degli esemplari che fortunatamente mi è dato studiare, volentieri procurerò di stabilire un ordine nelle diverse specie del genere, per farle ascendere gradatamente sino al genere vicino, mantenendosi parallele ai generi legati per caratteri anatomici e cronologici.

179. *Hydnophora sativa* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 68, tav. X, fig. 14.

Colline coniche, depresse e copiose, la cui direzione non è solamente longitudinale. Tramezzi spessi ed eguali.

Dego (1).

180. *Hydnophora venusta* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 76, tav XVII, fig. 2 (Monticularia).

Le colline sono più rialzate, risvolte e meno copiose che nella precedente.

Rivalta (2), Sassello (1).

181. *Hydnophora meandrinoides* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 57, tav. XI, fig. 9 (Monticularia).

I monticelli sono piuttosto allungati, sebbene taluni lo siano meno degli altri; però non formano serie come avviene nelle *Hy. collinaria* d'Ach., ed in altre. I tramezzi, sebbene risvolti, lo sono di meno della *Hy. venusta*.

Sassello (4).

182. *Hydnophora meandrinoides* var. *pulchra* (E. Sismond. sp.).

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 68 (nota), tav. V, fig. 4.

Questa è una varietà della *Hy. meandrinoides* cui è legata tanto intimamente, da potersi anco riunire. La maggior parte delle colline sono coniche, alcune però sono allungate.

Sassello (1).

183. *Hydnophora crispata* n. sp.

Tav. II, fig. 13, 14.

« Hy. polypario turbinato-hemispherico. Collis longis, nunc brevissimis, magnis, « elatis, acutis, irregularibus, nunc rectis, nunc contortis, saepe polygonis ad basem « paululum dilatatis. Septis lamellaribus alternatim aequalibus, tenuibus, granulatis, « numerosis ».

P. massiccio, convesso, emisferico. Le colline s'intralciano soventi, circoscrivendo calici poligonali, entro i quali si elevano monticelli conici, che talvolta sono allineati. Le colline terminano ad angolo acutissimo: le valli sono larghe, in media mm. 4-6; mentre misurano una profondità di mm. 5-7. I setti lamellari sono alternativamente uguali, moltissimi, granulosi; se ne contano circa 20 in soli 5 mm. La forma generale è caratteristica per la specie. Lo stato del fossile, quantunque buono, non mi permette di dir nulla intorno ai denti dei setti, che pure vi dovevano essere.

Le brevissime note di ciascuna forma mi risparmiano i confronti con le altre prossime alla *Hy. crispata.*

Sassello (2).

Segue per ordine la *Hydnophora affinis* Michtti, di cui non ho veduto esemplari.

184. *Hydnophora collinaria* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 69, tav. IX, fig. 5 (Meandrina).

Le colline sono elevate, risvolte, e ricurve verso l'esterno: rarissime le forme coniche. I tramezzi alternativamente eguali. Polipajo pianeggiante.

Sassello (3), Monte Grumi (6), Crosara (4).

185. *Hydnophora elongata* Michtti, et Meneg.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 67 (Non figurata).

Il Michelotti scrive in un appunto di aver separato questa specie col Meneghini per il grande sviluppo in lunghezza che offrono le colline e per il confondersi fra di loro in modo, da non potere mai dare un'idea di serie determinate e circoscritte.

Sassello (4).

186. *Hydnophora scripta* n. sp.

Tav. II, fig. 15, 16.

« Hy. polypario laminis crassis, superne subplano, incrustante. Collibus vix elatis, « longis rare brevissimis, angulatis, flexuosis, contortis; ad basem dilatatissimis. Val- « libus magnis, vix profundis, sed distinctis (frequenter). Septis subaequalibus, flexuo- « sis, granulatis, dentatis ».

Polipajo disteso in forti lamine da centim. 1-3, superiormente pianeggiante, aderente. Colline appena rilevate da non oltrepassare i mm. 2 di altezza, ciò ch'è sufficiente per la distinzione dalle altre specie. Sono poi lunghe; raramente si hanno le forme coniche generalmente flessuose, contorte, terminanti ad angolo acuto. Le valli sono larghe, poco profonde, ma distinte. Le lamelle sono quasi tutte eguali fra loro, granulose e leggermente dentellate.

Dalla figura si ricava migliore e più chiara idea della specie.

Sassello (1).

* * *

Due frammenti di polipajo, che certamente dovrebbe appartenere a questo genere, portano la determinazione di *Hy. inedita* Michtti: sono stati raccolti nei Colli di Torino. Oltre ai caratteri generici che credo assicurati per i due esemplaretti, ne riscontro pure alcuno specifico, che servirà di guida per istabilire una nuova specie, quando si avranno esemplari migliori, ed è la distanza grande che corre fra un tramezzo e l'altro, nonchè il loro sviluppo ch'è veramente grande.

Genus **Hydnophyllia** Reis.

1889. Reis O., *Die Korallen der Reiter Schichten,* pag. 130.

187. *Hydnophyllia Bellardii* E. H.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 56, tav. XI, fig. 8 (Meandrina vetusta?).
1849. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3ᵉ sér., t. XI, p. 283.
1889. Reis O., *Die Korallen der Reiter Schichten,* pag. 140, tav. III, fig. 11-14.

Sassello (4).

Genus **Plerogyra** E. H. = (*Gyrosmilia* E. H.).

1848. Milne Edwards et J. Haime, *Compt. Rend. de l'Acad. des Sc.*, t. XXVII, pag. 468.

Nei manoscritti del Michelotti trovo: *Pterogyra,* anzi lo stesso Milne Edwards nel solo indice (*Hist. nat. Cor.*) ha la medesima dicitura. Non parlarono mai, ch'io sappia, di questo genere il d'Achiardi, il Seguenza, il Reuss, il Michelin, il de Fromentel, e lo stesso Michelotti pubblicamente.

Il Duncan (*Rev. Fam. and Gen.*, pag. 95) riporta il gen. *Plerogyra* fossile nel Cretaceo e vivente in parecchie località; con le forme che ora vi si ascrivono addoventa fossile anco nel Terziario. Gli esemplari studiati mi tennero lunga pezza perplesso per le grandissime affinità che corrono fra questo genere e quelli vicini e specialmente col genere *Dendrogyra* Ehrenberg (*Cor. des roth. Meer.*, p. 100. 1834. — Milne-Edwards *Hist. nat. Cor.*, II, pag. 201). Quando però il presente genere è rappresentato da esemplari ben conservati, allora, facendoci questi riconoscere e l'ampiezza delle vescicole e la sottigliezza dei tramezzi, facilmente si differenzia.

188. *Plerogyra deperdita* n. sp.

Tav. I, fig. 25.

« P. polypario composito, masivo. Calicibus muris junctis, distinctis, valles col-
« lesque vix acutos constituentibus. Septis multis, crassis, integris, flexuosis. Columella

« nulla, Traversis endothecalibus prope thecam frequentioribus. Epithecio communi « rudimentali ».

Polipaio composto, massiccio, di molto spesso. I calici, uniti fra loro per la muraglia, costituiscono valli alquanto profonde e colline rilevate con estremità non molto aguzza, talvolta ottusa addirittura. I calici sono tuttavia distinti nei loro centri calicinali. I setti sono molti, ma ben spessi, flessuosi, scabrosi, irregolarmente disposti, integri, subeguali; se ne contano circa 15 in un centimetro. Le colline sono lontane fra di loro da 1-3 centim. La profondità varia, la maggiore sorpassa appena un centimetro. La columella è mancante. Si osservano parecchie traverse endotecali, esse riuniscono i setti vicino alle teche, quasi sempre avvicinatissime, mentre mancano fra i setti vicini al centro calicinale. A stento nella superficie inferiore vi si può riconoscere l'epitecio appena rudimentale, scabroso. Lo spessore del polipajo può raggiungere i 5 centim.

Per la forma delle colline più salienti, pel minor numero di traverse endotecali, per la maggior larghezza delle valli si differenzia questa specie dalla *Pl. interrupta* Ehr. (*Gyrosmilia*), vivente nel Mar Rosso.

Se non si avesse conto del carattere dei setti integri, si potrebbe riferire questa specie al gen. *Tridacophyllia* od ad altro a questo affine, mai al gen. *Manicina*, a cui il genere presente grandemente somiglia, per la mancanza della columella.

Sassello (3).

189. *Plerogyra crassisepta* n. sp.

Tav. I, fig. 26.

« Pl. polypario laminis, interdum massivo, individuis distinctis, seriatis. Collibus « obtusis, interdum sulcatis. Vallibus flexuosis, ramificatis. Septis multis, alternatim « subaequalibus, granulosis, interne incrassatis. Columella nulla. Traversis endotheca- « libus multis prope muros ».

Polipajo laminare, talvolta massiccio, con individui a serie flessuose e ramificate. Nei fossili ben conservati si distinguono i centri calicinali. Le colline sono di molto ottuse, anzi spesso fanno riconoscere un solco che c'indica la separazione delle serie di individui. La sommità delle colline non si mantiene sempre ugualmente elevata rispetto alla valle. I setti, alternativamente uguali, sono granulosi, abbondanti. Verso il centro divengono più spessi, si piegano di molto, l'irregolarità è costante nei setti. Manca la columella: abbondano le traverse endotecali. L'abbondanza o la scarsezza dell'endotecio è quella che rende spesse od esili le colline. La superficie inferiore dei fossili ci fa riconoscere la simmetria della parte superiore. Larghezza delle colline 6 mm. (in 4 esemplari); arriva ad 8 (altro esemplare). La profondità è variabile secondo lo stato del fossile; in quei ben conservati è circa la metà della larghezza delle valli. In un centimetro si contano 20 setti. I fossili si trovano spezzati secondo le valli per la mancanza della columella.

Sassello (5).

***

Altri esemplari si possono con molta sicurezza, per quanto è possibile, riferire a questo genere. Lo stato di conservazione non buonissimo non mi permette di riportarne la perfetta diagnosi. Eccone la descrizione:

Pl. crassisepta var. *cylindrica.* La superficie superiore del polipajo massiccio si svolge secondo la superficie cilindrica. Gl'individui formano serie diritte e semplici, raramente ramificate. Non sempre si distinguono i centri calicinali. Le mura sono quasi intimamente fuse fra di loro e sembrano più o meno spesse secondo l'abbondanza delle traverse endotecali. I setti sono spessi, corti, ineguali, s'ingrossano verso il centro, dove talvolta si piegano e si uniscono. La larghezza delle colline è di mm. 6. La profondità delle valli è meno della metà della larghezza delle stesse. In un centimetro si contano circa 15 tramezzi. Dalla descrizione appare come difficilmente si distingue questa varietà dalla specie precedente.

Sassello (1).

Pl. expansa. — Polipajo laminare, col maggior spessore, nell'esemplare, di mm. 20. Superficie superiore pianeggiante, l'inferiore nuda ed irregolare. Colline lunghe, poco tortuose, estremità sottile non aguzza. I setti pressochè uguali dànno al fossile un aspetto molto simmetrico. Si distinguono con molta fatica qua e là i centri calicinali. La distanza delle valli in media misura mm. 4: la profondità maggiore è metà della distanza. In un centimetro si contano circa 20 setti.

Sassello (1).

Pl. oblita. — Polipajo a lamine che raggiungono un centimetro di spessore. Superficie inferiore nuda, pianeggiante; un po' convessa la superiore. Le serie dei calici sono brevi, tortuose, fanno riconoscere i centri calicinali. Alcune volte gl'individui sono isolati co' loro tramezzi. I setti sono più radi che nella *Pl. crassisepta,* col bordo aguzzo, s'ingrossano verso il centro, dove quasi sempre si ripiegano nel senso della valle. Le colline sono poco o punto elevate. Le teche sono riunite fra di loro. I tramezzi sono irregolari, granulosi, più o meno lunghi; non fanno capo alla columella, perchè non esiste.

Larghezza delle valli mm. 5 circa.

Profondità mm. 2 o poco meno.

In un centimetro si contano 13 setti circa.

Sassello (1).

Genus **Tridacophyllia** Blainv.

1830. Blainville de, *Dict. des Sc. nat.,* t. LX, pag. 327.

190. *Tridacophyllia cichorium* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 71. Non figurata.

Sassello (2).

191. *Tridacophyllia subangulata* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 72. Non figurata.

Sassello (1).

192. *Tridacophillia contorta* n. sp.

Tav. I, fig. 27.

« T. polypario laminis superne subplanis, crassis: basi horizontaliter dilatata. Epi-
« thecio rudimentali hinc et illinc nullo. Superficie inferiori striis tenuibus, sub-

« aequalibus sulcata. Individuis seriatis. Vallibus brevibus, irregularissimis. Theca, « prope dicta, fere nulla. Septis extus crassis, multis, flexuosis, tenuibus, subtiliter gra- « nulatis. Collibus haud angulatis. Traversis endothecalibus plurimis ».

Polipajo poco elevato, superiormente pianeggiante, spesso da un centimetro circa ai tre. L'epitecio rudimentale, qua e là mancante, ci copre coste fine, subeguali e rettilinee. La superficie inferiore si presenta irregolare. I polipieriti sono in serie che s'intrecciano in modo da non lasciare nulla di regolare. Le vallecole calicinali sono di molto profonde negli esemplari non erosi. I setti abbondanti sono sviluppatissimi verso l'esterno del calice, flessuosi, finemente granulosi e superiormente denticolati; questo ultimo carattere non sempre si riscontra. Le colline elevate non terminano ad angolo acuto, ma le sono alquanto smussate. I diversi individui non si fondono del tutto, ma sono riuniti per le sporgenze della teca stessa. In pochi punti degli esemplari si riscontra questa caratteristica generica. Qualche calice che non trovasi in serie misura mm. 4 o 5. Difficile cosa è il conoscere quanti cicli di setti ornino il calice con fossula profonda. La larghezza delle valli non oltrapassa un centimetro, la profondità misura mm. 4-5.

Sassello (1).

Genus **Ulophyllia** E. H.

1857. Milne Ewdards, *Hist. nat. Dor.*, t. II, pag. 377.

193. *Ulophyllia flexuosa* d'Ach.

1867. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven. I*, pag. 25, tav. XI, fig. 2, 3.

Monte Grumi (1).

194. *Ulophyllia profunda* E. H.

1840-47. Michelin, *Icon. zoph.*, pag. 54, tav. XI, fig. 3.

Rivalta (Alessandria) (1).

195. *Ulophyllia laxa* n. sp.

Tav. I, fig. 28.

« U. polypario laminis crassis, superne subplano. Individuis seriatis valles pro- « fundas collesque constituentibus. Superficie inferiori costis elevatis, subaequalibus, for- « titer dentatis. Septis debordantibus, subaequalibus, subtiliter granulatis. Columella « interdum profunda. Traversis endothecalibus plurimis ».

Polipajo a lamine di grosso spessore superiormente, pianeggiante ed esteso di molto orizzontalmente. La direzione dei polipieriti fa supporre un punto di convergenza, dove doveva essere peduncolato. Polipieriti in serie più o meno lunghe e completamente saldati per la loro muraglia, onde risultano valli e colline terminanti ad angolo acuto. Le valli corrono leggermente tortuose, profondissime e larghe oltre un centimetro. La faccia inferiore è ornata da coste elevate, subeguali, che dovevano essere crestiformi, separate da solchi profondi, le sono quasi rettilinee e in un mezzo centimetro ne ho potuto contare 8. I calici sono profondi; quindi malamente si può giudicare della columella che deve essere appena rudimentale e spugnosa. I setti sono debordanti, laminari, finemente granulosi ai lati, subeguali. Il bordo dei tramezzi ci

si presenta diviso in lunghi denti, talvolta ben conservati. Le traverse endotecali abbondano. L'aspetto del fossile è caratteristico per la specie.

Si distingue facilmente questa forma dalle congeneri.

Sassello (1).

Genus **Mycetophyllia** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor*, t. II, pag. 375.

196. *Mycetophyllia multilamellosa* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven. part. II*, pag. 22, tav. XII, fig. 4.

Monte Grumi (2).

197. *Mycetophyllia dubia* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven. part. II*, pag. 23, tav. XII, fig. 6.

Sassello (7).

198. *Mycetophyllia italica* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.* parte II, pag. 21, tav. XII fig. 1-3.

Monte Grumi (1).

199. *Mycetophyllia stellifera* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 54, tav. XI, fig. 4.

Rivalta (1).

200. *Mycetophyllia interrupta* Reuss.

1868. Reuss, *Paläont. Stud. Oberburg.*, pag. 18, tav. III, fig. 4.

Sassello (3).

Genus **Dimorphophyllia** Reuss.

1864. Reuss, *Die Fossilen... Anth... von Oberburg.*, pag. 16.

201. *Dimorphophyllia oxylopha* Reuss.

1864. Reuss, *Die Fossiien* ecc. *Oberburg.*, pag. 16, tav. III, fig. 2, 3; tav. IV, fig. 3.
1868-73. Reuss, *Paläont. Stud. I*, pag. 20, tav. IV, fig. 4; tav. IX, fig. 1. — III, pag. 34, tav. XLIV, fig. 4-7.

Montecchio (2).

Genus **Symphyllia** E. H. = (*Isophyllia* E. H).

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 369.

Se è sempre arduo il cammino per chi intraprende lo studio dei vari generi di Antozoi fossili, in questo e negli affini generi diventa realmente difficilissimo e scabroso, da intimidire e costringere a procedere con incertezza ed esitazione grandissima. Quanto più attentamente si osservano gli esemplari, tante e così grandi assor-

gono le difficoltà, da non permettere neppure a sommi paleontologi la sicura determinazione.

Ciò certamente dipende dalle cattive basi, dalle peggiori caratteristiche, sulle quali vennero poggiati i generi. Invero il carattere riposto nei denti è così difficilmente riscontrabile nei fossili da scriverlo a somma fortuna, quando lo si può fondatamente congetturare. Gli altri poi sono sì relativi, che quelli necessarî per la distinzione dei generi talvolta si trovano sopra individui non solo di altri generi, ma in uno stesso esemplare: come l'altezza ed acutezza delle colline, la maggiore o minore adesione della muraglia, l'abbondanza delle traverse, il numero di lamelle contenute in un dato spazio; tutto varia, dico, nello stesso polipajo (d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, part. II, pag. 17).

Per la qual cosa procurerò di descrivere, nel miglior modo che mi sarà possibile, quelle specie che mi sembreranno doversi ascrivere a questo genere e negli affini, affermando come nessuna specie mi abbia tanto preoccupato, quanto queste, rimanendo in ultimo nella primiera esitazione.

202. *Symphyllia crebriformis* d'Orb.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 56, tav. XI, fig. 6 (Maeandrina bisinuosa).

Dego (4), Rometta (2).

203. *Symphyllia multisinuosa* n. sp.

Tav. I, fig. 29.

« S. polypario laminis lobatis, horizontaliter dilatato; basi nuda, costis subaequalibus, granulatis exornata. Calicibus irregularibus sulcis non semper visibiliter divisis; aliquando seriatis, interdum obliquis. Septis lamellosis, flexuosis subtiliter dentatis granulatisque magnam spungiosamque columellam constituentibus. Septis-costalibus communibus ».

Polipajo disteso in lamine dai 5-15 mm. lobate. La parete inferiore è nuda, ma ornata da strie incerte, subeguali, fortemente granulose, le son rettilinee: ne ho contate 15 in un centimetro. I calici sono in alcuni punti del fossile divisi da un solco sufficientemente profondo, irregolari più che nella specie precedente, obbliqui talvolta e di molto; seriati per lungo tratto da offrirci colline e valli. Le lamelle sono molte, flessuose, denticolate, granulate. La columella ci si presenta sviluppata e spugnosa, la si scorge nella fossula abbastanza profonda. I raggi setto-costali riuniscono i tramezzi di un calice con quelli di un altro. Le mura sviluppate sono rivolte le une sopra le altre; difficilmente fra di loro fanno riconoscere un solco terminando generalmente ad angolo. Il diametro dei calici in media è mm. 5. Verso la columella si osservano sopra l'orlo dei tramezzi dentelli di maggiore mole.

È distinta questa dalla precedente specie anche per avere un minore numero di tramezzi, per il solco meno appariscente fra i diversi calici.

Sassello (1).

Genus **Maeandrina** E. H. (*pars* Lamk.).

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 388.

È egli cosa facile riportare le specie del gen. *Manicina* in questo per la poca visibilità della columella: come ancora è ovvio confondere fossili di questo genere con altri spettanti al gen. *Latimaeandra*. È quindi necessario riflettere, come i polipieriti delle meandrine siano larghi, continui e non si confondano alla base, ove sono discernibili. Ciò non si riscontra nel gen. *Latimaeandra* nel quale la gemmazione è calicinale.

L'unica forma che io vi avrei potuto rapportare sarebbe stata la *M. Bellardii* E. H., che viene giustamente riportata dal Reis nel nuovo suo genere *Hydnophyllia* (*Die Korallen der Reiter Schichten*, pag. 140).

Genus **Manicina** Ehrebg. (emend. E. H.).

1857. Milne Edwards et J. Haime, *Hist. nat. Cor.*, tom. II, pag. 397.

Il Michelotti (Sismonda E., *Mat paléon.*, pag. 70) riporta a questo genere alcuni esemplari col nome di *M. antiqua*. Non avendo potuto confrontare gli esemplari della Collezione con altri viventi dello stesso genere, ometto qualunque osservazione. I fossili provengono da Sassello (2).

Genus **Pachygyra** E. H.

1848. Milne Edwards et J. Haime, *Compt. Rend. de l'Acad. des Sc.*, t. XXVII, pag. 468.

204. *Pachygyra Savii* d'Ach.

1867. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, part. I, pag. 41, tav. III, fig. 13 *a*, 13 *b* (P. arbuscula d'Ach.).
1873. Reuss, *Paläont. Stud. III*, pag. 9, tav. XL, fig. 4-8.

S. Giovanni Ilarione (1).

Genus **Rhipidogyra** E. H.

1851. Milne Edwards et J. Haime, *Pol. foss. des Terr. paléoz.*, pag. 57.

205. *Rhipidogyra Michelottii* Meneg.

1868. d'Achiardi, *Stud. Comp.*, pag. 9, tav. I, fig. 8.
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 74, tav. VI, fig. 3, 4.

Baldissero (1).

Genus **Euphyllia** E. H.

1857. Milne Edwards et J. Haime, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 191.

206. *Euphyllia contorta* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 53, tav. X, fig. 12 (esclusa la parte destra della figura che spetta alla Dasyphyllia taurinensis).

Sassello (4), Dego (11).

207. *Euphyllia laevis* Michtti et Meneg.

1861. Michelotti, *Fiss. mior. inf.*, pag. 33.

Dego (7).

208. *Euphyllia ventalina* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 78, tav. VI, fig. 9.

Colli di Torino (Piano dei Boschi) (1).

* * *

Il fossile determinato dal Michelotti col nome di *E. elata*, deve forse passare da questo al gen. *Plocophyllia* Reuss. Non ho potuto sventare i miei dubî, giacchè, e per la difficoltà che s'incontra nel distinguere le forme di questi due generi e per la spatizzazione degli esemplari, non mi è dato osservare lo spessore della teca, l'ornamento dell'epitecio; caratteri principali di determinazione. Oscuramente si vede il centro del calice ed i setti dello stesso.

Sassello (1).

Sub-fam. **Astraeidae coespitosae.**

Genus **Techosmilia** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 354.

Nella Collezione si trovano varî frammenti di polipaj, che forse si riferiscono a questo genere; ma sono state tante e così grandi le difficoltà che ho incontrato, da non valermi punto il lungo studio e la grande pazienza, per poterli determinare senza dubî. Laonde rimasi fra coloro che son sospesi e non oserò pronunziarmi sopra di loro, se prima non avrò rivolto l'attenzione sopra altri esemplari e non mi sarò meglio addestrato nella difficile palestra di questi studî.

Ciò non recherà meraviglia, qualora si consideri la difficoltà trovata trattando di questo genere anche dai sommi maestri: Milne Edwards et Haime (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 355), d'Achiardi (*Cor. foss. Alpi Ven.*, parte II, pag. 12) ed altri. Gli esemplari in parola vengono dai Colli di Torino (3).

Genus **Rhabdophyllia** E. H. (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 80.

209. *Rhabdophyllia stipata* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte II, pag. 12, tav. VI, fig. 7, 8.

Il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 62) crede che la fig. 3, data dal Reuss (*Paläont. Stud. I*, pag. 49, tav. II). col nome di *Rh. tenuis* Reuss, corrisponda alla presente forma. Le altre figure poi della stessa forma le crede che rappresentino fossili che vanno ascritti ad altro genere.

Genus **Calamophyllia** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 78.

210. *Calamophyllia crenaticosta* Reuss.

1869. Reuss, *Paläont. Stud. II.*, pag. 25, tav. XVIII, fig. 4-6 (Rhabdophyllia).
1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven*, parte II, pag. 8, tav. VII, fig. 1, 2 (Dasyphyllia compressa).
1884. Felix, *Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges.*, pag. 447; 1885, pag. 406.

211. *Calamophyllia pseudoflabellum* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 38, tav. IV, fig. 3 (Lithodendron).
1864. Reuss, *Dei Foss. Anth..... Oberburg*, pag. 15, tav. II, fig. 13, 14; taf. III, fig. 1 (C. fasciculata).
1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven*, parte II, pag. 10, tav. VIII, fig. 3-7.
1878-81. Quensted, *Petrefac. Korallen*, tav. 180, fig. 43-45 (Cricotheka genuina e trigona).

Castelgomberto (8); Savona, Cairo, (3).

212. *Calamophyllia planicostata* d'Ach.

1863. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte II, pag. 11, tav. VIII, fig. 8.

Castello (1).

213. *Calamophyllia dissita* n. sp.

Tav. II, fig. 17, 18.

« C. polypario multis individuis propinquis constituto. Ramis dichotomice con- « fertis. Theca subtili, interdum anulis inaequalibus constricta. Costis magnis, vix « prominentibus, sua vice subtiliter irregulariterque striatis. Septis multis, variis, lamel- « losis. Fossula profundiuscula. Columella rudimentali. Traversis endothecalibus ».

Polipajo fascicolato a copiosi polipieriti, molto ravvicinati fra di loro, da lasciare al più 8 mm. di distanza al campione che osservo. Le ramificazioni avvengono dicotomicamente. La muraglia che è meno spessa che nella *C. pseudoflabellum* Cat., presenta di tanto in tanto collaretti, ora poco ora molto sviluppati. Le coste sono abbastanza grosse, rare e confuse. Tra queste e sopra se ne scorgono altre molto sottili, che poco o punto disturbano la decorazione offertaci dalle più grandi. I calici, che difficilmente passano i mm. 5 di diametro, sono rotondi, schiacciati, irregolari. La fossula è alquanto profonda. La columella appare rudimentale. I setti sono numerosi ed in vario numero secondo lo stadio del calice; sono lamellari. Non si può dire nulla del bordo superiore dei tramezzi. Si riscontrano le traverse endotecali.

Tanto la posizione generica, quanto le differenze specifiche mi paiono accertate, per quanto lo stato del fossile lo permette. Si allontana dalla *C. pseudoflabellum* per i suoi calici più numerosi e più strettamente ravvicinati e per le dimensioni dei calici molto più piccole

Sassello (1).

214. *Calamophyllia compressa* n. sp.

Tav. II, fig. 19, 20.

« C. polypario fasciculato, fortiter compresso. Theca crassiuscula, raris costis, acutis « vel subrotundis, subaequalibus, granulosis, sua vice subtiliter striatis. Individuis non « propinquis dichotomice confertis. Septis multis, prope centrum flexuosis, sublamello- « sis. Columella nulla. Calicibus elongatis, proteiformibus. Epithecio rudimentali ».

Polipajo fascicolato, con polipieriti lontani fra di loro nell'esemplare che osservo in media 4-5 mm.; tuttavia sono molto compressi e così disposti, da ricordarci il quarzo pegmatico. La muraglia piuttosto spessa, anzi che no, è esternamente decorata da grosse e non numerose coste rettilinee, non tutte della medesima grossezza. Le coste alcuna volta sono acute, altre rotonde; se ben conservate, granulose. Queste alla loro volta vengono ricoperte da costicine sottili difficilmente visibili, che nulla tolgono di regolare alla primiera ornamentazione. Il calice ha forme svariatissime, ma sempre molto compresse ed anche flessuose. Moltissime sono le lamelle, sublamellari che si protendono verso il centro, dove addivengono flessuose. Ciò ci dimostra la mancanza della columella. Esternamente non si scorgono collaretti. Il diametro maggiore del calice oscilla fra due estremi molto lontani cioè da 9-15 mm.; mentre il diametro minore misura mm. 2-4, Qua e là si osserva un epitecio rudimentale. Lo stato pessimo dell'esemplare non mi permette di dire nulla dei denti del bordo superiore dei setti e delle traverse endotecali che pur s'intravedono dove l'erosione ha messo allo scoperto l'interno dei polipieriti.

Questa forma va riferita al presente genere per la mancanza di columella e non al gen. *Rhabdophyllia*, come trovo scritto presso l'esemplare. Si avvicina di molto alla *C. pseudoflabellum* e si potrebbe considerare la *C. compressa* come un caso patologico della prima, qualora non si osservasse che la forma così schiacciata dei calici è naturale, che mancano collaretti, che i tramezzi sono flessuosi ecc. Laonde con qualche esitazione s'istituisce questa forma che pur presenta caratteri specifici differenziali abbastanza netti.

Sassello (1).

Sub-fam. **Astraeidae gemmantes.**

Gen. **Cladocora** E. H.

1857. Milne Edwards et J. Haime, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 588.

215. *Cladocora subintricata* Meneg.

1867. d'Achiardi, *Cor. fos. Catg.*, pag. 8.

Questa forma non è figurata nè posso riportarne la rappresentazione iconografica pel pessimo stato del fossile.

Castelgomberto (1).

216. *Cladocora multicaulis* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 313, tav. LXXV, fig. 4 (Lithodendron).

Sono incertissimo sopra questa determinazione per la cattiva conservazione del fossile, pel diametro di molto maggiore a quello che assegna il Milne Edwards (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 597) a questa forma.

Sassello (1).

217. *Cladocora Michelottii* E. H.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 49, tav. X, fig. 2 (Lithodendron flexuosum).

Astigiana (1)

218. *Cladocora granulosa* Goldf.

1833. Goldfuss, *Petref. Germ.*, t. I, pag. 107, tav. XXXVII, fig. 12 (Lithodendron).
1838. Michelotti, *Specimen. zooph. dil.*, pag. 85, tav. III, fig. 4 (Caryophyllia reptans).

Diolo (8).

219. *Cladocora prevostana* E. H.

1875. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 597. Tav. D 4, fig. 5.

Asti (2), Diolo (1).

220. *Cladocora caespitosa* E. H.

Rimando, per amore di brevità, al Milne Edwards (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 594) chi volesse conoscere la lunga sinonimia. La presente forma è tanto vicina alla *C. Reussi* de Fromentel (*Introductio a l'étud. des Polyp. foss.*; pag. 150) (¹) che io credetti giusta la riunione (*I Zoantari foss. dei dint. di Roma*, pag. 17-19) (²). Attribuisco la forma al Milne Edwards ed ad Haime, come quelli che ne riconobbero la naturale posizione e non già al Linné od al Lamark, come si osserva fare continuamente. Se si volesse attribuire al primo che ne parlò, dovremmo ricordare i nomi di Bauhin e Cherler (1651), d'Imperato (1679), del Chabraeus (1677) o con più ragione quello di Gualtieri (*Index testarum*, tav. LVI, CVI, fig. G, 1744; *Acropora caespitosa*).

Colli Torino (molti), Dego (molti).

Sub-fam. **Astraeidae reptantes.**

Genus **Cladangia** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 618.

221. *Cladangia Cocchii* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven*, parte II, pag. 30, tav. XIII, fig. 4 (Goniastraea).
1889. Reis, *Die Korallen der Reiter Schichten*, pag. 152.

Sassello (1), Roncà (1), Castelgomberto (1).

222. *Cladangia proxima* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 40. Non figurata.

Le dimensioni dei diametri dei calici sono minori che non nella *C. hybrida* (Meneg.) d'Ach. (*Catg. cor. foss.*, pag. 8). In un esemplare proveniente da Sassello in una parte della superficie inferiore si scorge il falso cenenchima, chiamato dal Milne Edwards *peritecio;* cioè l'assieme delle espansioni murali che uniscono gl'individui fra di loro. È questo un distintivo del genere che ottimamente serve per la separazione netta dal gen. *Phyllangia* E. H., cui grandemente il gen. *Cladangia* si avvicina

Sassello (3).

(¹) Reuss. *Naturwiss. Abhandl. v. Haidniger*, t. II, pag. 20, tav. III, fig. 6 e 8 (Cladocora caespitosa) 1888.
(²) Est. *Bol. Soc. geol. Ital.*, vol. XII, fasc. I.

223. *Cladangia minima* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Stud. Compt.*, pag. 20, tav. II, fig. 7 (Astrangia).

Quantunque il d'Achiardi ascriva questo fossile ad altro genere, pure credo che vada riferito al presente per i calici rilevati sopra la massa generale, per i centri calicinali poco profondi, per le coste distinte e poco prominenti, finalmente per il falso cenenchima. Il diametro dei calici è minore di quello della specie precedente.

Sassello (6).

A questa ultima forma si può riportare la *C. quaesita* Michtti *in litt.*, che, essendo ben conservata, mi permette di ampliare la descrizione poco precisa, per il cattivo stato del fossile, che ne dà il d'Achiardi (loc. cit.).

Polipajo composto, incrostante, dallo spessore 2-6 mm., a superficie superiore irregolare modellando il corpo che incrosta. I calici sono subcircolari e talvolta alquanto deformati, elevati ed obliqui, in modo che da un lato sporgono più che dall' altro. Le coste sono poco visibili o punto, divengono distinte ed elevate nell'avvicinarsi al bordo calicinale. Il calice ha un diametro variabile 1,5-3 mm. circa. La fossula quasi profonda. I setti debordanti, più spessi verso la teca sono generalmente in numero di 24 o più, dei quali 6 soli sogliono arrivare nel centro, dove trovasi la columella ch'è papillosa. La columella non la riscontrai mai appuntita. I setti sono granulosi ed uniti fra di loro per traverse endotecali che sono sviluppatissime. La teca, in rapporto dell'ampiezza del calice, si mostra abbastanza spessa. Il falso cenenchima, peritecio, abbonda ed è costituito dalle espansioni murali, che di tanto in tanto congiungono i diversi individui, risultandone una irregolarissima stratificazione fortemente porosa. Nulla si può dire della superficie inferiore del fossile, mancando spesso od essendo invisibile per essere il polipajo incrostante.

Colli Torino (1).

Genus **Astrangia** E. H.

1848. Milne Edwards et J. Haime, *Compt. Rend. de l'Acad. des Sci.*, t. XXVII, pag. 496.

224. *Astrangia patula* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 42. Non figurata.

Con una prima osservazione si riferirebbe la presente specie al gen. *Heliastraea*, anzi la si direbbe la *He. ellisiana* Defr.; ma la grande brevità dei polipieriti, l'assenza di epitecio, l'orlo aguzzo dei calici ci convincono della giusta posizione generica della specie.

Sassello (3).

Subgenus **Phyllangia** (E. H. genus) Duncan.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 67.

225. *Phyllangia alveolaris* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 54, tav. XI, fig. 1 (Astraea).

Monte Grumi (3), Dego (1).

226. *Phyllangia festiva* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 41, tav. X, fig. 3, 4.

Colli Torino (1).

227. *Phyllangia microsyderea* n. sp.

Tav. I, fig. 30.

« Phy. polypario composito, laminis subtilibus, superficie subplana. Individuis pro-
» pinquis, vix elatis. Calicibus rotundis, rariter deformatis, subaequalibus. Fossula pro-
« funda. Costis basi vix distinctis; distinctissimis, dentellatisque prope calicem. Septis
« integris, circiter 24, granulatis: sex primariis columellam rudimentalem constituen-
« tibus. Traversis endothecalibus, crassis, obliquis. Inferiori .... ».

Polipajo composto, disteso in lamine che si mostrano non di molto ispessite. Gl'individui sono ravvicinati fra di loro da 1-3 mm., elevati appena sulla superficie, quasi pianeggiante, non mai più di 2 mm. I calici sono circolari, raramente deformati, con orlo aguzzo; quasi tutti delle medesime dimensioni, il diametro oscilla dai 2-3 mm. (Fig. 18). La fossula si mostra profonda. Le coste sono poco o punto distinte alla base, divengono rilevate man mano che si avvicinano al bordo calicinale, dove si uniscono ai setti che sono debordanti. I setti generalmente sono in numero di 24 circa, i primi sei si protendono sino al centro, dove fanno capo ad una columella rudimentale, essi sono, per quanto è possibile scorgere dal fossile, a margine intero. Gli altri setti più o meno, secondo gli ordini cui appartengono, si allontanano poco od appena dalla teca, che esternamente ci si presenta granulosa. I setti pure sono ornati di granulazioni non molto frequenti: a vario intervallo si osservano le traverse endotecali spesse ed alquanto oblique. Le coste si protendono da un calice all'altro, mostrandosi ben dentellate. La faccia inferiore. I calici infine sono affollati ed addossati, ciò non avviene nel gen. *Astrangia*. Da questo genere si allontana il fossile anco pel carattere degli orli dei setti interi.

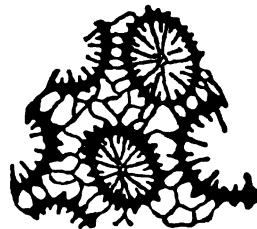



Fig. 18. × 5

Questa forma si distingue dalle congeneri con molta facilità. S'allontana dalla *Phy. americana* E. H. (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 616, Pl. D 4, fig. 6) per i calici molto più piccoli, e per presentarci i polipieriti meno elevati sulla massa generale.

Albugnano (Asti) (1).

Sub-fam. **Astraeidae simplices.**

Genus **Circophyllia** E. H.

Subgenus **Antillia** Duncan.

1863. Duncan, *Quart. Journ. Geol. Soc.*, vol. XIX, pag. 28.

228. *Antillia cylindroides* Reuss.

1868. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 23, tav. XVII, fig. 8 (Circophylla).

Montecchio (1).

Subgen. **Leptaxis** Reuss.

1868. Reuss, *Paläont. Stud. I.* pag. 13.

229. *Leptaxis elliptica* Reuss.

1868. Reuss, *Paläont. Stud. I,* pag. 12, tav. I, fig. 9.

Monte Grumi (1).

Genus **Lithophyllia** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 290.

230. *Lithophyllia Basterotii* E. H.

1849. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3ᵉ sér., t X, pag. 239.

Colli Torino (6).

* * *

Il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 10) riferì al gen. *Circophyllia* un esemplare mandatogli dal Michelotti, senza specificarlo. Il Sismonda E. poi (*Mat. paléont.*, pag. 82) riporta questa *Circophyllia* coll'aggettivo di *conica* Michtti. L'esemplare che trovo in Collezione ha invece la denominazione: *Lithophyllia conica* Michtti.

Veramente l'esemplare che ho avanti di me non si trova in perfetto stato di conservazione, per poterci assicurare la giusta e naturale posizione del fossile: nullameno per le coste che non sono semplicemente granulose e per il bordo dei tramezzi non diviso nettamente in lobi arrotondati lo si ascrive più naturalmente in questo genere. I caratteri che sicuramente si possono rilevare sono:

« Polipajo semplice, largamente fisso, come lo dimostra la lunga superficie d'aderenza, per quanto stretta. La forma è conica. La superficie poveramente rivestita da un epitecio affatto rudimentale e localmente mancante. Le coste sono forti, ben rilevate, che, quantunque erose, pur fanno riconoscere le basi di processi spiniformi; del resto non sono abbondanti, nè di grandi dimensioni. Il calice mostrasi ovale, con fossula poco o nulla profonda. La columella ci appare sviluppata, non molto spugnosa e composta di trabecole longitudinali che si riuniscono. La superficie superiore è pianeggiante. I setti sono sviluppati, granulosi, relativamente spessi: formano più di 4 cicli. La superficie dei tramezzi è qua e là forata; verso l'esterno si hanno linee d'accrescimento, che costituiscono le traverse vescicolose ed abbondantissime ».

Colli Torino (1).

Porta il nome di *L. pulchella* Michtti un frammento di polipajo, fisso sopra una valva di conchiglia. Il suo stato pessimo di conservazione non mi permette di parlarne oltre alla sua posizione generica, che a mio credere, penso sia questa la migliore. Infatti fa riconoscere una superficie esterna non del tutto ricoperta di epitecio e probabilmente con coste portanti spine. I setti sono molti, rilevati, spessi, lateralmente granulosi. Columella spugnosa, e pianeggiante superiormente. L'estremità superiore dei setti accenna ad una divisione in lobi rotondi. Quest'ultimo carattere lo farebbe

ascrivere al gen. *Circophyllia,* se non esistessero gli altri che accertano la posizione generica al fossile.

Colli Torino (1).

Genus **Parasmilia** E. H. (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 58.

231. *Parasmilia cingulata* Cat.

1847. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 18, tav. I, fig. 5 — 1856, pag. 46, tav. VI, fig. 5 (Caryophyllia).

Roncà (10).

232. *Parasmilia excentrica* Meneg.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 85, Non figurata.

Colli Torino (1).

***

Col nome di *P. elata* trovasi in Collezione un esemplare in pessimo stato di conservazione. Si può osservare solamente la parte inferiore. « Polipajo semplice, quasi cilindrico, allungato. Coste molte, alcune ben rilevate, tutte ornate da sottili granulazioni. Setti un poco flessuosi e grossi. Non scarse le traverse endotecali. Quest'ultimo carattere ricorderebbe il gen. *Trochosmilia,* al quale il fossile non può certamente appartenere, offrendoci la columella fascicolare ».

Colli Torino (1).

P. cernula Meneg. *in litt.* Eoc.? Val di Lonte. — È questa la scritta, di pugno del Michelotti, che esservo attaccata ad un esemplare. Credo che la forma non sia mai stata fatta di pubblica ragione. Il cattivo stato del fossile ci lascia in dubbio sulla posizione generica. L'arenaria poi che lo riempie non permette di riconoscere la presenza o mancanza della columella e delle traverse endotecali. Per gli altri caratteri corrisponde esattamente al genere presente, infatti « il polipajo è semplice, fisso per largo peduncolo, trocoide; nel bel mezzo ci offre un sensibile restringimento. I setti sono abbondantissimi, alternativamente subeguali, dritti, arrotondati. La fossula pare profonda. Teca nuda ».

Genus **Moltlivaultia** Lamx.

1821. Lamouroux, *Exp. méth. des genres de pol.*, p. 78 (Montlivaltia).

233. *Montlivaultia bormidensis* H.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, p. 36, tav. III, fig. 2, 3.

Dego (6).

234. *Montlivaultia carcarensis* d'Ach. et H.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 37, tav. III, fig. 7, 8 (M. poculum).

Dego (1), Carcare (2).

235. *Montlivaultia Japheti* Mich.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 33, tav. VIII, fig. 5 (Turbinolia).

Colli Torino (2).

236. *Montlivaultia coronula* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 83, tav. VII, fig 2.

Colli Torino (5).

237. *Montlivaultia humilis* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 83, tav. X, fig. 17.

Mornese (1).

238. *Montlivaultia patula* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 84, tav. VII, fig. 4.

Colli Torino (1).

239. *Moltlivaultia oblita* n. sp.

Tav. II, fig. 21, 22, 23.

« M. polypario conico-inflato, parce pedunculato. Theca nulla. Epithecio subtili « hinc et illinc nullo. Calice rotundo, dulcissime compresso, septis crassis, ultimis cyclis « confluentibus, debordantibus, circiter 96, idest quinque cyclis completis. Columella « parva: fossula profundiuscula. Superficie septorum granulata, traversis endothecalibus « ornata ».

Polipajo semplice, conico, breve, solido, di forme molto svariate, ben poco peduncolato. La teca manca del tutto ed è costituita da una epitecio membranoso qua e là sviluppatissimo che copre, lasciando bende scoperte, quasi tutta la superficie sino alla vicinanza del calice. Questo è rotondo, dolcemente compresso, ci presenta i setti debordanti, sviluppati e solidi, i quali determinano una fossula abbastanza profonda. I setti, che offrono le superficie granulate, e con traverse oblique endotecali, sono in numero di 96; cioè 16 per ciascuno dei sei settori del calice, ciò che costituisce cinque cicli completi. Potendo osservare solamente la metà del polipajo, mancando l'altra, mi sono valso, per determinare il numero dei setti, delle leggi del Milne Edwards ed Haime. Se in qualche camera principale (*loggia*) vi sia il rudimento del sesto ciclo, come se è mancante qualche setto del quinto, non possiamo assicurarlo. La columella pare rudimentale e quantunque presenti vacuoli, pure si mostra relativamente densa. I setti degli ultimi cicli confluiscono con quelli vicini; tale riunione avviene presso la columella. Gli assi dei calici, dalle proporzioni fatte, misurano mm. 58 e 50, al rapporto cioè 158 : 158. L'altezza del polipajo è di m. 28.

La forma generale, il rapporto quantitativo delle parti anatomiche differenziano facilmente questa forma da tutte le altre dello stesso genere.

Colli Torino (1).

Subgenus **Leptomussa** d'Ach.

1869. Reuss, *Paläont.*, *Stud. II*, pag. 24.

240. *Leptomussa variabilis* d'Ach.

1868. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte II, pag. 7, tav. VII, fig. 1-9.
1869. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 24, tav. XVII. fig. 11, 12; tav. XVIII, fig. 1, 2.

Dego (4).

Genus **Trochosmilia** E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Compt. Rend. de l'Acad. des Sci.*, t. XXVII, pag. 467.

241. *Trochosmilia corniculum* Mich.

1840-46. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 267, tav. LXI, fig. 4 (Turbinolia).

Palarea (1).

242. *Trochosmilia incerta* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 86.

Sassello (8), Cassinelle (9).

Subgenus **Coelosmilia** (E. H. genus) Duncan.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 52.

243. *Coelosmilia miocenica* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 85, tav. VII, fig. 12.

Bldissero (3).

2.ª Fam. POCILLOPORIDAE.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 46.

Genus **Pocillopora** Lamk et Verrill.

1870. Verrill, *Notes on Radiata*. pag. 519.

244. *Pocillopora madreporacea* Lamk.

1840-47. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 66, tav. XIV, fig. 1 (Madrepora).
1868. d'Achiardi, *Cor. fos. Catg.*, pag. 24, tav. II, fig. 8.

Colli Torino (7), Sassello (1).

Da molti viene fatta la *Madrepora glabra* Goldf sinonimo di questa forma; Milne Edwards (*Hist. nat. Cor.*, t. III, pag. 308), Sismonda E. (*Mat. paléont.*, pag. 23), de Fromentel *Intr. Polyp. fos.*, pag. 276) ed altri. Noto ciò, osservando come ancora si riporti da parecchi l'antica *M. glabra* nel genere *Madrepora*.

Col nome di *P. adfixa* Michtti è designato un frammento di polipajo appartenente certamente a questo genere per i caratteri che ci porge. Lo si distinguerebbe dagli altri congeneri per essere *incrostante* e *piano*. Non credo doversi per questo solo istituire una nuova specie, tanto più che nelle Pocillopore viventi si riscontrano differenze notevoli nello stesso polipajo e riguardo l'abbondanza del cenenchima ed anche nelle parti costituenti lo stesso calice. Ciò fu osservato da tutti quelli che si occuparono di queste forme; ultimamente dal Klunzinger [1], e dal Quelch [2]. Laonde riferisco l'esemplare alla *P. madreporacea*.

Colli di Torino (1).

3.ª Fam. OCULINIDAE.

Genus **Stylophora** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 133.

245. *Stylophora annulata* Reuss.

1854. Reuss, *Die fossilen von Oberburg*, pag. 42, tav. II, fig. 1, 3.
1866. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte I, pag. 29, tav. I, fig. 10.

Dego (8).

246. *Stylophora contorta* Leymerie.

1846. Leymerie, *Mém. de la Soc. géol. de France.* ser. II, tom. I, pag. 358, tav. XIII, fig. 5 (Astraea).

S. Giovanni Ilarione (3).

247. *Stylophora distans* Leymerie.

1846. Leymerie, *Mém. de la Soc. géol. de France*, ser. II. tom. I, pag. 368, tav. XIII, fig. 6 (Astraea).

Roncà (2).

248. *Stylophora tuberosa* Cat.

1856. Catullo, *Dei terr. di sed. Ven.*, pag. 77, tav. XVII, fig. 5 (Porites).
1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, pag. 31, tav. I, fig. 15.

Monte Grumi (1).

249. *Stylophora oligastra* Meneg.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf.*, pag. 33. Non figurata.

Monte Grumi (1). Sassello (2), Mornese (molti).

250. *Stylophora microstyla* Meneg.

1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven*, pag. 28, tav. I, fig. 13.

Montecchio (1).

251. *Stylophora raristella* E. H.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil*, pag. 109, tav. IV, fig. 6 (Sarcinula punctata).
1840-46. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 63, tav. XIII, fig. 5 (Astraea).

Merignac (Gironda) (1).

[1] Klunzinger, *Die Korallthiere des Rothen Meeres — Mad. Ocul.* — pag. 68, 69 (Berlin, 1879).
[2] Quelch, *Report ont Reef Corals* (op. cit.) pag. 64-70 (1886).

Sinonimo della presente specie riportano la *Porites complanata* Michtti (*Spec. zooph. dil.*, pag. 170, tav. VI, fig. 2), tanto il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 8), come il Milne Edwards (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 138); mentre va riferita ad altro genere, per la costituzione della teca, per il modo di unirsi gli individui fra di loro e per la columella.

252. *Stylophora palmata* E. H.

1850. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3° sér. t. XIII. pag. 103.

Sassello (1).

253. *Stylophora italica* d'Ach.

1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte I, pag. 27, tav. I. fig. 14.

Il Michelotti esclude affatto le ubicazioni di Dego e di Belforte.

Monte Carlotto (2).

254. *Stylophora thyrsiformis* E. H.

1847. Michelotti, *Foss. terr. mioc. Ital. sept.*, pag. 44, tav. XVI. fig. 4 (Astraea)
1866. d'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte I, pag. 29, tav. I, fig. 11, 12.

Belforte (5).

* * *

La determinazione delle specie di questo genere è molto difficile. Difatti la medesima specie si riscontra spianata, aderente, digitata, dendriforme. I polipieriti che alla base sono lontani fra di loro e circolari, divengono nelle parti superiori ravvicinatissimi e di forma poligonale. Le dimensioni dei calici oscillano fra limiti abbastanza vasti sul medesimo polipajo.

I caratteri del genere sono basati sopra parti anatomiche che si riscontrano difficilmente nei fossili, specialmente quando si trovano spatizzati, ciò che accade di frequente. In tal modo ne origina confusione, difatti questo genere si distingue dal gen. *Stylocoenia* per i pilastrini che circondano il calice, i quali non si conservano quasi mai negli esemplari fossili.

Genus **Trymohelia** E. H.

1849. Milne Edwards et J. Haime, *Comptes rend. de l'Acad. des Sci*, t. XXIX, pag. 68.

255. *Trymohelia solida* Meneg.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc., inf.*, pag. 154, tav. XV, fig. 13.

Sassello (3).

Genus **Astrohelia** E. H. (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 40.

256. *Astrohelia deperdita* Michtti.

1861. Michelotti. *Étud. Mioc. inf.*, pag. 32 (Stylophora).
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 60, tav. III, fig. 4.

Il cenenchima poroso e la tendenza dei calici ad obliterarsi pare che ostino al collocamento della specie in questo genere, e procurino di farla entrare nel gen. *Sty-*

lophora, cui fu riferita primieramente. Ma l'irregolarità dei calici, la difficoltà di scorgerci una columella, sono caratteri sufficienti, per farla ascrivere a questo genere. Del medesimo avviso è il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 8).

Dego (7).

257. *Astrohelia mamillosa* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 20 (Cladangia).
1871. Sismonda E., *Mat., paléont.*, pag. 60.

Questa specie per i caratteri che ci presenta deve essere ascritta a questo genere, come gia sospettò lo stesso d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 8). Si distingue questa dalla forma precedente, per non presentarsi ramosa ed a rami compressi, e per non avere un cenenchima granuloso alla superficie, ma compatto. L'*A. mamillosa* ha la superficie mammellonata, i calici ineguali a contorno irregolarissimo, spesso angoloso, quindi non circolare, come ce lo presenta l'*A. deperdita*.

Sassello (2).

258. *Astrohelia vasconiensis* E. H.

1850. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, vol. XIII, pag. 75.

Colli Torino (4), Dego (1).

4.ª Fam. TURBINOLIDAE.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*,pag. 9.

Sub-fam. **Turbinolidae gemmantes.**

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 33.

Genus **Coenocyathus** E. H.

1848. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3ᵉ sér., t. IX, pag. 297.

259. *Coenocyathus anthophyllites* E. H.

1848. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. Nat.*, 3ᵉ sér., t. IX, pag. 299; tav. 9, fig. 10. Vive nel Mediterraneo.

Colli Torino (5).

260. *Coenocyathus taurinensis* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Stud. comp.*, pag. 5, tav. I, fig. 3 *a*, 3 *b*.

Il mal conservato esemplare non mi permette di essere sicuro sopra la determinazione di questa forma.

Colli Torino (1).

261. *Coenocyathus affinis* n. sp.

Tav. III, fig. 1, 2, 3.

« C. polypario composito, polypis rectis, elatis, conicis. Costis planis, subtiliter granulatis. Septis plurimis, prominentibus fortiter granulatis, primariis secundariisque aequalibus. Palulis parvis fere cylindraceis. Columella magna sed parvis lamellis constituta Fossula profunda. Epithecio ».

Polipajo composto, come si può arguire dai polipieriti conici, dritti, che ci presentano sempre il peduncolo di molto allargato, rivelandoci l'origine per gemmazione (lateralo-subbasilare). La teca è sottile ed esteriormente ricoperta da epitecio che stringe i polipieriti con tanti collaretti diversamente distribuiti. Tuttavia si scorgono spesso le coste che dall'apice vanno all'orlo calicinale. Le coste sono larghe, appiattite e finemente granulate. Il calice è circolare od appena ellittico con fossula profonda. I setti sono elevati sull'orlo calicinale, sono molti, relativamente spessi, e ricoperti da forti granulazioni, che possono riunirsi fra quelle di due setti contigui, senza formare sinittacoli. Le dimensioni dei granelli sono in rapporto con la grandezza dei setti.

I setti dei due primi ordini sono quasi uguali, ai lati di questi si scorgono facilmente i piccoli paletti, ma ben visibili; negli esemplari fossili sono quasi cilindrici. La columella è sviluppata, ma composta di poche bacchettine.

L'altezza oscilla dai mm. 8-14: il diametro del calice mm. 4-6.

I polipieriti si trovano staccati e potrebbero quindi far sorgere il dubbio se il polipajo sia composto o meno; ma, osservando nelle loro larghe basi le traccie che lasciarono gli altri individui con cui vivevano uniti, possiamo essere certi che il polipajo era composto.

Questa forma si distingue di leggieri dal *C. anthophyllites* E. H., per le minori dimensioni, per i paletti maggiormente visibili, per l'irregolarità dell'epitecio. S'allontana poi dal *C. taurinensis* d'Ach., per l'epitecio irregolare, per essere i polipieriti interi liberi per lungo tratto.

Zinola (3).

***

Nella Collezione in istudio si trovano quattro frammenti di polipajo composto, con molti polipieriti, generati per gemmazione, che portano il nome di *C. proliferus*. Sono così malconci e così poco visibili le parti anatomiche essenziali, da non credere che sia il caso di una nuova specie.

Quantunque dall'aspetto generale si possa quasi certamente asserire che appartengano a questo genere, pure non posso affermarlo, poichè potevano possedere le traverse endotecali, e quindi fare ascrivere il fossile non in questa famiglia. I caratteri principali sono: Polipajo composto, elevato, con molti polipieriti laterali e subbasali (gemmazione laterale, subbasale). Il calice è subcircolare, ovale. Epitecio sottile, in alcuni punti se ne scorgono parecchî strati. Le coste delicatissime, larghe, appiattite, ed elegantemente granulose. I setti del primo ordine sono sporgenti e più sviluppati. Non si può dire nulla della columella e dei pali. La fossula è profondissima, ma dovrebbe essere causata dalla caduta dei pali e della columella rudimentale.

Zinola (4).

***

C. adipatus.
C. propinquus.

Sono queste le determinazioni che hanno due tavolette portanti una due esemplari e l'altra 8, tutti provenienti da Zinola. Evidentemente questi esemplari vanno riuniti

in una sola specie, giacchè non ci offrono caratteri sufficienti per la specifica distinzione. Infatti, l'unico carattere sarebbe riposto nella minore o maggiore elevatura dei polipieriti, dei quali neppure uno si presenta completamente intero. L'elevazione poi dei polipieriti è in rapporto con l'età che qui è variabilissima.

Dopo un accurato esame ho riconosciuto parecchie traverse endotecali oblique che vengono così a chiudere le logge comprese fra due tramezzi in modo, che la camera viscerale non rimane aperta sino alla profondità. Sarebbe sufficiente questo carattere per far passare il fossile dalla famiglia delle *Turbinolidae* a quella delle *Astraeidae* e specialmente alla sottofamiglia: *Astraeidae reptantes.* Invero le traverse non sono abbondanti, anzi si vedono mancare per lunghi tratti, ciò che costituirebbe un carattere della sottofamiglia menzionata.

Nella speranza di possedere migliori esemplari che mi permettano di dipanare la quistione e di precisare meglio i rapporti del gen. *Coenocyathus* con quelli dei due gruppi di generi *Rhizangioida* ed *Astrangioida* (Duncan, op. cit., pag. 64, 66), per ora riporterò la figura del più grande degli esemplari, descrivendo i caratteri che ho potuto chiaramente rilevare. — Tav. III fig. 4. Polipajo composto con polipieriti cilindrici poco o nulla elevati generalmente; ma liberi nella loro muraglia, mentre alcuni si rendono liberi per parecchio tratto. Gl'individui nascono per gemmazione latero-basilare, alcune volte del tutto laterale; ci danno l'aspetto di un cespuglio basso e poco ramificato. La teca è di molto spessa e sulla superficie si riconoscono sino a 5 foglietti di epitecio. Questi nascondono le coste che pur si veggono nei giovani individui. Il calice è subcircolare e racchiude una fossula profonda e spaziosa. Solo i setti dei due primi ordini, che sono subeguali, si protendono nel centro del calice. I tramezzi sono spessi vicino alla muraglia, poi subito si assottigliano. Le superficie portano minute e distinte granulazioni. I tramezzi veduti con forte lente ci si mostrano composti da due sottili lamine (*suturae*), che nella parte ingrossata vicino al calice, lasciano un vuoto riempito dall'epitecio. Questo costituirebbe un carattere (Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 8) della fam. *Turbinolidae.* Secondo lo sviluppo degli individui si contano 3 cicli, 3 $^1/_2$ e 4 completi. Tavolette oblique riuniscono, a diversissima distanza, i tramezzi contigui. I pali sono larghi, granulati, sottili; uno solamente ne ho osservato in posto. La columella pare poco o nulla visibile negli individui adulti fossili.

L'altezza dei polipieriti e variabilissima, come il diametro calicinale che oscilla dai 4-12 mm..

Sub-fam. **Turbinolidae simplices.**

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 9.

Gen. **Ceratotrochus** E. H. (emend. Duncan) = (*Conotrochus* Seg.).

1885. **Duncan,** *Rev. Fam. and Gen.*, **pag. 26.**

262. *Ceratotrochus multispinosus* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil.*, pag. 71, tav. II, fig. 9 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 42, tav. IX, fig. 5 (Turbinolia)

Savona (1), Tortona (6), S. Agata-fossili e Stazzano (moltissimi).

263. *Ceratotrochus multiserialis* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil.*, pag. 70, tav. II, fig. 7 (Turbinolia multispina).
1841. Michelin, *Icon zooph.*, pag. 41, tav. IX, fig. 6 (idem).
1848. Milne Edwards et J. Haime, *Monographie des Turbinolides. Ann. des Sc. nat.*, 3ᵉ sér. tom. IX, pag. 249.

Quando non si hanno individui adulti e ben conservati, occorre il caso di rimanere in dubbio nella specificazione fra le due precedenti forme. Riuscirà quindi non discaro riportare le differenze specifiche. Il *C. multiserialis* porta bitorzoli non spinosi, non allontanati, ma dentiformi. Il *C. multispinosus* porta tubercoli spinosi, lontani, sopra le dodici coste più grandi e solo eccezionalmente, negli individui adulti, si osserva qualche spina sopra coste intermedie in vicinanza del calice; nel *C. multiserialis* invece quasi tutte le coste sono ornate di punte dentiformi, che acquistano uno sviluppo maggiore sopra coste alternate. Nella prima specie osserviamo le spine da 7-10 sopra ogni costa, situate con una certa regolare disposizione; nell'altra ne abbiamo molte, dentiformi, che non offrono ordine alcuno.

S. Agata-fossili (molti), Stazzano (17), Colli Torino (2).

264. *Ceratotrochus duodecim-costatus* Goldf.

1826. Goldfuss, *Petref. Germ.*, pag. 52, tav. XV, fig. 6 (Turbinolia).

Torsero (6), Baldissero (1). Ho osservato molti esemplari provenienti da Chianciano, Orvieto, Orciano, Città della Pieve.

265. *Ceratotrochus rimosus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.* pag. 91, tav. VII, fig. 23.

Stazzano (1).

266. *Ceratotrochus anceps* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 89, tav. VII, fig. 20, 21.

Torsero (10).

267. *Ceratotrochus typus* Michtti.

1864. Seguenza G., *Disq. paleont.*, pag. 83, tav. X, fig. 1 *a, b, c, d.* (Conotrochus typus Seg.).

Colli Torino (3); S. Agata-fossili, Stazzano (16); Zinola (5).

268. *Ceratotrochus subrectus* n. sp.

Tav. III, fig. 5, 6, 7.

« C. polypario conico, plus minusve curvato; inferne attenuato; interdum basi « dilatata, incrustante. Epithecio continuo, sed undulato, superficie granulata. Costis « vix distinctis, fere aequalibus, rotundisque. Fossula latiuscula, profunda. Calice fere « circulari. Septis fere debordantibus, extus crassiusculis, superficie granulatis: prima- « riis, secundariisque aequalibus. Quarto cyclo completo (nostris fossilibus). Columella « e plurimis bacillis oscure cylindraceis, superne incrassatis, rotundatisque constituta ».

Polipajo conico, più o meno curvato, si assottiglia nella parte inferiore; ma alcuna volta nuovamente si dilata per divenire peduncolo ed incrostante. L'altezza, come il diametro del calice, è variabile. L'epitecio è molto sviluppato e ricopre tutta la superficie esterna, ma si mostra leggermente ondulato. Le coste vengono dall'epitecio obliterate e coperte in modo che difficilmente s'intravedono: in questo caso si osservano uguali e rotonde. Il calice è circolare ed i setti appena debordanti. La fossula s'apre spaziosa e profonda. I tramezzi spessi all'esterno si assottigliano ben presto; sono granulosi nelle pareti. Sono le granulazioni che dànno un aspetto singolare ai setti del V ordine, che sono esilissimi. In tutto 48 setti. Quelli dei due primi ordini sono quasi uguali fra di loro, molto spessi e s'avvicinano alla columella.

Si distingue questo *Ceratotrochus* dal *C. typus*, cui grandemente si assomiglia per la forma generale, per la superficie esterna tutta avvolta da epitecio, per le particolarità dei primi due ordini di setti.

Altezza 8-14 mm.; diametro calicinale 6-9 mm.

Serravalle-Scrivia (2).

***

Nella Coll.ne porta il nome di *Echinotrochus dertonensis* un piccolo esemplare, non intero. Il pedicillo è ricoperto da un corpo estraneo, se non vogliamo negarne l'esistenza; tanto è cattivo lo stato di conservazione. Parmi che in questo genere si trovi con minor disaggio, che in altri. Infatti si presenta libero o quasi; discoide, ma pur elevato. L'epitecio è uguale, quantunque sottilissimo. I setti sono poco o nulla sporgenti, ricoperti di granulazioni, anco nella parte superiore. La columella si mostra non sviluppatissima, composta di piccole bacchettine (fascicolare). Il calice è circolare; la fossula profonda. I tramezzi costituiscono tre cicli completi.

Stazzano (1).

Genus **Caryophyllia** Lam. (emend. Duncan).

1801. Lamarck, *Syst. Anim. sans Verteb.*, pag. 370.
1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 24.

269. *Caryophyllia clavus* Schacchi.

1836. Philippi, *Enum. mollusch. Sicil.*, pag. 54, tav. IV, fig. 18; tav. XII, fig. 24 (Cyathina turbinata).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 48, tav. IX, fig. 18 (C. pseudoturbinolia).

Albenga (1).

270. *Caryophyllia Sismondae* E. H.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 38, tav. XIII, fig. 14 (Turbinolia clavus).

Il Michelin riferì questa forma alla *Turbinolia clavus* Michtti. Osservando la figura, or ora citata, non si comprende se trattasi di polipajo libero o fisso; anzi nella descrizione si dice « *basi acuta vel adherens* ». Ma quello che più monta egli è che non si scorge il pedicillo grosso e ricurvo e le coste piane e larghe. Il Milne Edwards ed Haime riportando questa specie (*Ann. des Sc. nat.*, sér. 2ª, vol. IX, pag. 332) col nome del Michelin, notarono il grosso pedicillo ricurvo, le dimensioni e le altre par-

ticolarità. Non mancarono però di emettere un dubbio sulla posizione generica, riferendola dubitativamente al gen. *Cyathina?*. Nel successivo lavoro (*Arch. du Museum*, V, 5) cambiarono di posizione questa forma, ciò che poi confermò il Milne Edwards (*Hist. nat. Corl.*, t. II, pag. 17).

Colli Torino (7).

271. *Caryophyllia Michelinii* Michtti.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 38, tav. IX, fig. 17 (C. cyathus).

Questa specie è l'antica *Caryophyllia cyathus* Lamx, var. *minor*. Michelin (*Icon. zooph.*, pag. 47, tav. IX, fig. 17), istituita sopra un esemplare del Pliocene di Gadiasco. Il Michelotti (*Foss. terr. mioc.*, pag. 33) riporta la forma, appoggiandosi all'autorità del Michelin. Però il Milne Edwards ed Haime (*Ann. des Sc. nat.*, 3^e sér., t. IX, pag. 330) misero in dubbio la posizione generica, ascrivendola al gen. *Paracyathus ?* Nel lavoro generale dei corallari il Milne Edwards riporta la forma nel gen. *Caryophyllia*, senza nascondere il dubbio manifestato e senza entrare nella questione sulla identità della forma fossile con quella vivente (*Hist. nat. Corl.* t. II, pag. 14).

L'esemplare sopra il quale istituì il Michelin la varietà appartiene alla Collezione del Museo della R. Università di Torino e non proviene dal Pliocene di Godiasco, ma dall'Elveziano dei Colli di Torino, come trovo scritto in un appunto del Michelotti. Credo che non possa riferirsi ad un *Paracyathus* perchè ci presenta una sola corona di paletti. Tuttavia il d'Orbigny (*Prod. de Paléont.*, t. III, pag. 190) la riferisce al gen. *Paracyathus* forse perchè non credeva che la *C. cyathus*, vivente nel Mediterraneo, potesse essere anco fossile.

Si propose per queste ragioni dal Michelotti il nuovo nome che ho riportato. Le differenze che corrono fra questa forma con quella precedente sono le dimensioni più piccole (Altez. mm. 15; diametro calicinale mm. 12), la base generalmente più ristretta, (questo fatto costituisce un carattere sufficiente per la distinzione delle specie secondo Milne Edwards ed Haime [*Ann. der Sc. nat.*, 3^e sér., vol. IX, pag. 286]); la superficie liscia fino presso l'orlo del calice, infine alcuni tramezzi più sporgenti degli altri.

Colli Torino (2).

272. *Caryophyllia neglecta* n. sp.

Tav. III, fig. 9, 10.

« C. polypario conico, brevi, superne fere cylindrico, curvo: basi dilatata incru-
« stante. Epithecio fere continuo. Costis aequalibus, planis, granulatis. Calice elliptico,
« interdum subcirculari, semper inclinato. Septis multis, granulatis vix debordantibus.
« Columella elliptica, magna, lamellis contorto-plicatis constituta. Fossula profun-
« diuscula. Theca subtili. Palis ».

Polipajo semplice, conico, breve, presso il calice quasi cilindrico, alquanto ricurvo. Alla base si dilata e diviene incrostante. Le coste sono ricoperte da un epitecio quasi continuo. Dove questo manca o diviene sottile fa scorgere le coste uguali, appiattite, granulate. Poco o nulla sporgono i tramezzi dei due primi cicli dall'orlo del calice. Il piano degli assi del calice è costantemente inclinato da una parte. La columella è sviluppata, risulta da bacchettine allargate e ritorte. La fossula è pochissima pro-

fonda. La teca è piuttosto sottile. Pali.... Altezza mm. 12-15. Diametro calicinale mm. 5-8.

Questa specie somiglia di molto alla *C. Sismondae* E. H. ed alla *C. Aradasiana* Seg. La nostra forma si differenzia dalla prima per le dimensioni; e per la mancanza delle granulazioni sempre distinte vicine al calice come nella *C. Sismondae*. Si distingue dalla *C. Aradasiana* per presentare quest'ultima le coste visibilmente separate da solchi profondi, le strie trasversali vicino al calice, la particolarità del maggior sviluppo del quarto ordine.

Serravalle-Scrivia (8).

273. *Caryophyllia revoluta* n. sp.

Tav. III, fig. 8, 9.

« C. polypario elato, conico, prope basem vix attenuato, cylindraceo, saepe revoluto, basi dilatata. Superficie costis vix distinctis, subaequalibus, tenuiter granulatis, subplanis. Calice ovali. Septis fortiter granulatis, primariis secondariisque subaequalibus, superne prominentibus. Fossula profunda. Columella elliptica, parva, paucis lamellis constituta. Palulis prominentibus, granulatis, tenuibus. Epithecio rudimentali ».

Polipajo semplice, conico, allungato da sembrare quasi cilindrico. Si restringe poco verso la base, quasi sempre ricurvo, talvolta ripiegato in varie guise. Alla base si dilata per fissarsi. La superficie è munita di coste non sempre facilmente visibili. Quando si scorgono, sono uguali, depresse, finemente granulose: qua e là ricoperte da un epitecio rudimentale. Sull'orlo del calice pare che si elevino i tramezzi dei due primi cicli che sono uguali e che si protendono verso il centro più degli altri. La superficie dei tramezzi porta granulazioni molto sporgenti e numerose. La fossula s'apre profonda. La columella non raggiunge un grande sviluppo. Vi sono pali. L'epitecio talvolta forma anelli circolari molto rilevati. Altezza media mm. 22. Diametro calicinale mm. 4-6.

Questa specie si avvicina alla *C. geniculata* Seg. (*Disq. paleont.*, pag. 28, tav. II, fig. 3), ma se ne distingue per le dimensioni minori, per le costicine evidenti lunghesso tutta la superficie, per le granulazioni.

Serravalle-Scrivia (4).

274. *Caryophyllia Zanclaea* Seg.

1863. Seguenza G., *Disq. paleont.*, pag. 29, tav. II, fig. 4.

Serravalle-Scrivia? (2).

275. *Caryophyllia inflata* Seg.

Tav. III, fig. 12, 13, 14, 15.

1863. Seguenza, *Disq. paleont.*, pag. 23.

Il Seguenza, con grave dubbio, riferisce questa forma al gen. *Caryophyllia*, trovandosi sempre colla base rotta e col calice incrostato con la roccia calcarea. Crede anzi che dovrebbe far parte del gen. *Paterocyathus* Michtti stabilito nel 1860 (*Mém. sur les Coralliaires des Antilles* par Duchassaing et Michelotti, pag. 60).

Quantunque la base sia sempre rotta, pure il sovrapporsi di più lamine di epitecio in vicinanza della base e la direzione di queste che si allontana dall'apice

tolgono ogni dubbio e fanno ritenere la specie come peduncolata (fig. 13). Il calice ripieno di roccia calcarea non impedisce riconoscere nelle sezioni perpendicolari all'asse del polipajo il quinto ciclo incompleto ed i paletti. Quest'ultimi lasciano il posto alla columella fascicolare, non molto sviluppata (fig. 15). Tanto i tramezzi, che i pali fanno riconoscere il modo d'accrescimento per le linee di sovrapposizione (fig. 14). I tramezzi infine portano una cavità tubulare verso l'estremità esterna lasciata dalle due lamelle costituenti i tramezzi (*suturae*) e l'epitecio. Lo spessore dell'epitecio diminuisce, andando verso il bordo calicinale, portando finissime granulazioni irregolarmente disposte

Tutto ciò toglie ogni dubbio intorno alla posizione generica della specie. Ciò mi perdoni la piccola digressione.

Messina (1), S. Filippo (1).

276. *Caryophyllia calix* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont*, pag. 105, tav. VII, fig. 26.

Torsero (4), Zinola (2).

277. *Caryophyllia granulosa* n. sp.

Tav. III, fig. 16, 17, 18.

« C. polypario elato, vix curvo, cylindraceo, basi dilatata, incrustante. Costis « planis, granulatis. Calice subcirculari, ovali. Septis tenuibus, primariis secundariisque « aequalibus, prominentibus, fortiter granulatis. Palulis latis, tenuibus, granulatis, pli- « catis. Epithecio communi, subtili interdum plicato. Columella elliptica, magna, la- « mellis tenuibus, contorto-plicatis constituta. Theca subtili ».

Polipajo semplice, elevato, leggermente ricurvo; di forme conica, talvolta cilindraceo. La superficie esterna è ricoperta da coste finemente granulose. Qua è là si osservano solchi che corrono orizzontalmente. La base è dilatata, formando un largo organo atto al fissarsi; anch'essa si mostra ugualmente ornata. Il calice è quasi circolare, negli individui più adulti è alquanto ellittico. I tramezzi si presentano sottili, quelli dei due primi ordini uguali; così fra di loro quelli degli altri ordini. Tutti portano la superficie granulata con granelli molto rilevati, disposti in linee oblique. I pali sono larghi e deboli. La columella fascicolare consta di poche lamine risvolte. La fossula alquanto profonda. I setti sono alquanto elevati sopra gli orli del calice, massime quelli dei due primi cicli. L'epitecio rudimentale si rende ben vibisile negli individui per mezzo di anelli orizzontali.

L'altezza varia fra limiti abbastanza lontani, mm. 10-20; così il diametro calicinale mm. 4-10.

La forma generale, la granulazione uguale per tutta la superficie esterna, l'uguaglianza dei setti dei due primi ordini, come quella dei tre altri, credo siano sufficienti caratteri specifici.

Zinola (4).

***

Nella Coll.ne 3 esemplari portano la determinazione di *C. taurinensis* Mich. (*Icon. zooph.*, pag. 39, tav. VIII, fig. 17. *Turbinolia*). Essi, non mostrandoci la colu-

mella, vanno riferiti al gen. *Desmophyllum*, come già fecero il Milne Edwards, (*Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 78), il de Fromentel (*Intr. et poly. foss.*, pag. 95) ed il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 7).

Subgen. **Acanthocyathus** (E. H. genus). Duncan.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 25.

Si riferiscono a questo sottogenere, non senza grave esitazione, alcuni esemplari che non ci fanno riconoscere chiaramente il solo giro di pali, ch'è il carattere precipuo che distingue le forme di questo sotto genere dai Trocociati armati.

278. *Acanthocyathus pedemontanus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 101, tav. VII, fig. 9.

I tramezzi sono alquanto sporgenti sopra l'orlo del calice ovale. Le spine si osservano quasi esclusivamente limitate ai due lati corrispondenti all'asse maggiore del calice. La columella è sviluppatissima.

Colli Torino (9).

***

Il nome di *A. subrectus* è portato da un esemplare che presenta i seguenti caratteri: — P. semplice, coneiforme, alquanto schiacciato; a piccolo pedicillo, ma ben distinto. Porta spine brevi ed ottuse ai due lati corrispondenti all'asse maggiore del calice. In una sezione si scorge una columella molto sviluppata, ciò che costituisce una caratteristica generica. — Colli Torino (1).

Non credo che questi soli caratteri, che ci fa rilevare il mal conservato fossile, siano sufficienti per stabilire una nuova forma.

Genus **Paracyathus** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t. II, pag. 52.

279. *Paracyathus pedemontanus* Mich.

1838. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 47, tav. IX, fig. 16 (Caryophyllia pedemontana).

Asti (5).

280. *Paracyathus turonensis* E. H.
Tav. III, fig. 19, 20.

1848. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3e sér., t. IX, pag. 324.

Torino (2).

281. *Paracyathus Spinellii* d'Ach.

1866. D'Achiardi. *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte I, pag. 19, tav. I, fig. 4.

S. Giovanni Ilarione (1).

282. *Paracyathus cristatus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 96. tav. VII, fig. 27, 27 *a*.

Colli Torino (1),

***

Nella Collezione vi sono 3 piccoli esemplari che debbonsi riportare, con qualche dubbio, a questo genere a causa della cattiva conservazione. Nullameno li trovo già

battezzati coi nomi di *P. minutus*, *P. oblitus*. Descrivo tutti i caratteri anatomici osservati, che secondo il mio avviso non sono sufficienti a giustificare l'istituzione di nuove forme.

« *P. minutus:* Polipajo semplice, minuto nelle sue dimensioni. Alto 6 mm.; diametro del calice quasi circolare 5 mm. Fisso per larga base e cilindrico verso il calice. « Teca nuda, guarnita di coste aguzze, quasi tutte eguali fra loro. Cicli 4 di setti; non « sono discernibili i caratteri di questi. Non si scorge nè columella, nè pali; ma due o « tre papille mediane ci fanno suppore certamente la presenza della prima e dei pali ».

Stazzano (2).

« *P. oblitus:* Polipaio semplice, con una larga base incrostante, eretto, cilindraceo; « talvolta risvolto. Teca nuda, coste rotonde, subeguali. Tramezzi granulati alquanto « debordanti. Quelli dei due primi ordini terminano vicino alla columella, gli altri « si rimangono vicino alla teca; sono 48, cioè 4 cicli completi. I setti lasciano una « fossula profonda. Columella sviluppata di forma allungata, formata da piccole bac« chettine, quindi alla superficie si mostra papillosa. I pali non si distinguono dalle « papille della columella ».

Stazzano (1).

Genus **Deltocyathus** E. H.

1857. Milne Edwards, *Hist. nat. Cor.*, t II, pag. 23.

283. *Deltocyathus italicus* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil.*, pag. 51, tav. I, fig. 8 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 32, tav. VIII, fig. 3 *a, b, c.* (Stephanophyllia).
1848. Milne Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, sér. 3ª, t. IX, pag. 326, tav. X, fig. 12.

S. Agata-fossili (moltissimi), Monte Gibio (7), Tortona (7), Colli di Torino (raro: Collezione Cav. Roasenda).

284. *Deltocyathus cylindricus* Michtti.

Tav. III, fig. 21, 22.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 100.

Riporto la rappresentazione iconografica di questa forma, non essendo stata mai rappresentata. L'esemplare figurato è uno di quelli che servirono al Michelotti per l'istituzione della nuova specie. Una sezione poi dell'intero calice $\frac{7}{1}$ ci dimostra i rapporti anatomici della columella, dei paletti, dei setti e della teca. L'altra sezione, poi maggiormente ingrandita, ci rivela l'intima struttura dei setti e della teca, confermando così la sezione le investigazioni del de Lacaze-Duthiers, Fowler, ecc.

Fig. 19.

Torino, S. Raffaello (4).

285. *Deltocyathus taurinensis* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 101.

Non posso rappresentare il tipo di questa forma pel pessimo stato di conservazione.
Toriuo, S. Raffaello (1).

Genus **Trochocyathus** E. H. (emend. Duncan) ([1]).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 22.

Syn. *Aplocyathus* d'Orb., *Stephanocyathus* Seguenza ([2]), *Platycyathus* E. de From.

286. *Trochocyathus mitratus* Goldf.

1826. Goldfuss, *Petr. Germ.*, pag. 52, tav. XV, fig. 5 (Turbinolia).
1838. Michelotti, *Specimen zooph. dil.*, pag. 69, tav. II, fig. 9 (Turbinolia plicata).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 40, tav. IX, fig. 26 (Turbinolia plicata).

Per mezzo di una lunga serie di esemplari, come asserisce il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 5), si passa da questa specie al *T. crassus*, e da questa al *T. simplex;* anzi il d'Achiardi assicura che si può arrivare al *T. bellingherianus*. Quest'ultimo passaggio non mi consta. Pur nulla meno credo che si debbano tenere separate queste forme tra loro affini, per non generare confusione e perchè non mancano caratteri per tenerle distinte. Laonde non mancherò di riferire i caratteri che più degli altri specificano le forme di questo numeroso genere.

Stazzano (moltissimi), S. Agata-fossili (moltissimi), Tortona (moltissimi).

287. *Trochocyathus crassus* Mich.

1338. Michelotti, *Specimen. zooph. dil.*, pag. 69, tav. III, fig. 1 (Turbinolia plicata).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 40, tav. IX, fig. 2 (esclusa 2^b) (Turbinolia).

Si distingue questa specie dalla precedente per essere di forma più tozza, per portare i tramezzi più sottili e serrati ed ugualmente sporgenti. Il pedicillo è meno ricurvo, i paletti larghi e più spessi dei tramezzi.

S. Agata-fossili, Stazzano, Monte Gibio (molti).

288. *Trochocyathus simplex* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. Sc. nat.*, 3e sér., t. IX, pag. 304.

Questa specie, per la grandissima affinità che presenta colla precedente, non venne neppure figurata; si distingue per una forma meno tozza (ciò che l'avvicinerrbbe al *T. mitratus*), per lo spessore dei pali che è uguale a quello dei setti e per essere i pali uguali fra di loro. Con molti esemplari è difficile riconoscere, senza dubbio, la specie.

Stazzano (4).

289. *Trochocyathus bellingherianus* Mich.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 41, tav. IX, fig. 3 (Turbinolia).

Anche questa forma è così intimamente unita alle tre precedenti, da potersi fondere con esse. Si distingue per un certo smalto che denota un epitecio; dove questo manca

([1]) Non è questo il caso di seguire la divisione dei Trocociati in *T. striati* ed in *T. armigeri*. Preferisco attenermi all'ordine che scaturisce dalla somiglianza. In tal modo infatti il concetto della specie risulta più chiaro e determinato.

([2]) Il gen. *Stephanocyathus* Seg., credo che si potrebbe tenere separato dal gen. *Trochocyathus*, perchè i caratteri basati sopra le modificazioni dei paletti furono sempre stimati sufficienti per la distinzione generica (Milne-Edwards, Haime, de Fromentel ecc.). A ciò aggiungasi la diversità della forma esterna, che, a differenza del gen. *Trochocyathus*, si presenta breve, molto allargata e quasi discoidale.

si scorgono le coste eleganti ed uguali. Le coste sono serrate e distinte solamente verso l'orlo del calice. sopra di questo i tramezzi dei primi ordini, di dimensioni pressocchè uguali, si elevano notevolmente.

Baldissero (2), Tortona (molti); Stazzano e S. Agata-fossili (moltissimi).

290. *Trochocyathus costulatus* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. Sc. nat.*, 3e sér., t. IX, pag 304.

La base o pedicillo è acuto, piuttosto risvolto che ricurvo. Le coste dei due primi ordini sono quasi uguali fra di loro, rialzate, crestiformi; mentre le altre sono rotonde e poco appariscenti in generale. Non vi sono nè spine, nè tubercoli.

Difficilmente gli esemplari si trovano in buono stato di conservazione.

Colli Torino (molti).

291. *Trochocyathus sinuosus* Brong.

1823. Brong Al., *Mém. Vic.* pag. 83, tav. V, fig. 12 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 270, tav. LXIII, fig. 1 (Turbinolia).
1869. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 16, tav. XXVII, fig. 1.

S. Giovanni Ilarione (1), Roncà (2).

292. *Trochocyathus Douglasii* Michtti.

1847. Michelotti, *Foss. terr. mioc. Ital. sept.*, pag. 26, tav. I, fig. 20 (Turbinolia).

Stazzano (1), Colli Torino (6).

293. *Trochocyathus Sismondae* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime. *Ann. des Sc., nat.*, 3e sér., pag 307, tav. X, fig. 4.

La forma è breve, conica, risvolta alquanto nella parte inferiore. Le coste si mostrano appiattite, quasi uguali, solo quelle dei due primi ordini si discernono dalla base e quelle degli altri ordini anco dalla base, ma solo nella parte esterna, dove è risvolto il polipierite. Le coste sono costantemente ricoperte da granulazioni.

Colli Torino (3).

294. *Trochocyathus subcristatus* E. H.

Tav. III, fig. 23, 24, 25.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3e sér., t. IX, pag. 310.

Colli Torino (15).

295. *Trochocyathus versicostatus* Mich.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 43, tav. IX, fig. 8 (Turbinolia).

La figura è poco o punto riuscita, giacchè a torto rappresenta larghe creste e spine in rapporto dei setti primarî.

Colli Torino (13), Stazzano (2), Monte Gibio (1).

296. *Trochocyathus latero-cristatus* E. H..

1848. Milne-Edwards, et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3e sér., tom. IX, pag. 308, tav. X, fig. 3.

Colli Torino (28), Dego (15).

297. *Trochocyathus latero-spinosus* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. Sc. nat.*, 3e sér., t. IX, pag. 309.

Colli Torino (7).

298. *Trochocyathus raricostatus* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil*, pag. 68 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 35, tav. VIII, fig. 9 *a* (Turbinolia).
1871. Sismonda, *Mat. Paléont.*, pag. 104 (Ceratocyathus) (¹).

La fig. 9 *b* del Michelin appartiene al *T. punctatus* Michtti. Le coste dei due primi ordini sono più rialzate che quelle degli altri. Il pedicillo è acuto, ma breve e ripiegato di molto verso l'estremità.

Colli Torino (7), Stazzano (4).

299. *Trochocyathus verrucosus* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3e sér., t. IX, pag. 311, tav. D 1, fig. 3.

Un solo esemplare lo riferisco, con qualche dubbio, a questa forma. Ciò è dipeso dalla poca corrispondenza della descrizione con la figura dell'opera citata.

Colli Torino (1).

300. *Trochocyathus undulatus* Mich.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 41, tav. IX, fig. 4 (Turbinolia).

S. Agata-fossili (1).

301. *Trochocyathus cornucopia* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil.*, pag. 67, tav. II, fig. 8 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 39, tav. VIII, fig. 16 (Turbinolia).

Questa specie si somiglia molto alla precedente; però il *T. undulatus* è più decisamente cilindrico ed allungato: i due primi ordini di coste sono meno rialzati e tutte le coste sono del pari leggermente crispate. Il calice è piuttosto circolare che allungato, la superficie dei setti è ricoperta di minor numero di granulazioni.

Monte Gibio (1), S. Agata-fossili (molti), Stazzano (molti), Tortona (5).

(¹) Quantunque sia piuttosto proclive a perdonare l'istituzione di nuove forme, pure sono lontanissimo dall'approvare la fondazione di nuovi generi; dacchè, se il primo criterio tende alla minuta analisi che forma la materia prima della scienza, il secondo, gettando malamente il primo fondamento della sintesi, non può non riuscire dannoso. Tuttavia i molti caratteri, rapporti e differenze, egregiamente esposti dal Seguenza (*Disq. paleont.*, pag. 35), ci persuadono a ritenere ben fondato il genere *Ceratocyathus* Seg. (1861) che dagli studiosi o non è riconosciuto o vien fatto sinonimo del gen. *Caryophyllia*. Con ciò non voglio nascondere la difficoltà che s'incontra nel riscontrare l'unica corona di paletti, che deve trovarsi innanzi al penultimo ciclo a causa della cattiva conservazione dei fossili. Le forme di questo genere, dice il Seguenza, rimpiazzano nella formazione miocenica Messinese quelle del gen. *Trochocyathus* abbondantissime nella formazione del Terziario medio dell'Alta Italia, della Francia e delle altre regioni più settentrionali d'Europa.

Il *C. raricostatus* ed il *C. deperditus* appartengono certamenle al gen. *Trochocyathus* di cui possegono tutti i caratteri, come di leggieri ci si convince, leggendone le descrizioni.

302. *Trochocyathus obesus* Michtti.

1838. Michelotti, *Icon. zooph. dil.*, pag. 53, tav. II, fig. 5 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Spec. zooph.*, pag. 34, tav. VIII, fig. 7.

Un'impronta sopra la marna grigia di Ceva, in quel di Mondovì, la riferisco ad un individuo di questa specie per la sezione circolare, pel numero dei setti e perchè vi sono vuoti nella direzione delle coste dei due primi ordini, lasciati probabilmente dalle spine che guarniscono la specie.

Con dubbio riporto qui un pessimo esemplare di Torino.

S. Agata-fossili (75), Tortona (4), Colli Torino (1 ?), Ceva (1 ?).

303. *Trochocyathus pyramidatus* Michtti.

1838. Micheletti, *Specimen zooph. dil.*, pag. 53, tav. II, fig. 4 (Turbinolia) Pessima figura.
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 36, tav. VIII, fig. 11 (Turbinolia).

Colli Torino (5), Stazzano (1).

304. *Trochocyathus armatus* Michtti.

1838. Michelotti, *Specimen zooph. dil.*, pag. 52, tav. I, fig 9 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 35, tav. VIII. fig. 8 (Turbinolia).

Colli Torino (6).

305. *Trochocyathus perarmatus* Tal.

1849. *Tallavignes in Alex.* Rouault, *Mém. soc. géol. de France.* 2e sér., t. III, pag. 462, tav. XIV, fig. 4.

Cassinelle (6).

306. *Trochocyathus sublaevis* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3e sét., t. IX, pag. 316.

Il calice è circolare, come si può vedere dall'unico esemplare che, pel cattivo stato in cui si ritrova, non si può figurare.

Le coste sono ben poco distinte, con minute granulazioni; si scorgono due esigue costicine fra le coste; i tramezzi sottili servono di precipuo distintivo dal *T. Sismondae*, cui questa specie molto si avvicina.

Colli Torino (1).

307. *Trochocyathus elegans* Michtti.

1861. Michelotti, *Étud. Mioc. inf. Ital. Sept.*, pag. 29, tav. II, fig. 14-16.

Si distingue questa specie dalle congeneri per la forma quasi cilindrica, sensibilmente risvolta verso la base; la curva si sviluppa nel senso del piccolo asse del calice: le coste sono tutte uguali fra loro e rotonde.

Il Michelotti asserisce, nei suoi appunti, di non conoscere che un solo esemplare dei Colli di Torino, il quale corrisponde esattamente a tutti i caratteri esterni, mentre nulla si può dire degli altri a causa dello stato del fossile.

Torino (1), Dego (6).

308. *Trochocyathus decussatus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.* pag. 102, tav. VII, fig. 14 (Ceratocyathus).

Nella forma generale si avvicina di molto al *T. revolutus* E. H., ha però la curva nel piano del grande asse, ed oltre alle 12 coste dei due primi ordini, anche quelle degli altri sono lamellari e cristate, sebbene più minutamente.

Sciolze-Torino (12).

309. *Trochocyathus sulcatus* E. Sismd.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 100, tav. VII, fig. 22.

Si differenzia questa specie dalle consimili, come dal *T. raricostatus*, per le dimensioni più piccole; ha la superficie ornata di molte coste fra loro uguali, quasi acute od alquanto ondulate, ma non granulose, come è in molte altre forme.

Colli Torino (7).

310. *Trochocyathus deperditus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 102, tav. VII, fig. 24 (Ceratocyathus).

La presente specie, per le considerazioni fatte nel trattare del gen. *Ceratocyathus* (pag. 95 nota), passa in questo genere, quantunque la classificazione sia sempre alquanto dubbiosa per il cattivo stato dei fossili.

Colli Torino (3).

311. *Trochocyathus ponderosus* Michtti.

1848. Michelotti, *Foss. mioc.*, p. 27, tav. II, fig. 4 (Turbinolia crassa).

Il nome specifico di *crassus* lo ha preso un altro *Trochocyathus*. La base ricurva si svolge nel senso del piccolo asse del calice. Le coste sono visibili fin quasi dalla base, uguali, piccole ed angolose con intervalli lisci. I tramezzi si mostrano verso l'esterno molto spessi. Questi caratteri servono per distinguere la presente dalle altre specie, massime dal *T. Douglasii*.

Stazzano (1).

312. *Trochocyathus? Bourqueti* Cat.

1856. Catullo, *Mem. sui terr. di sedim. sup. delle Venezie* tav. XVII, fig. 1. (Monticularia).

Siccome non si conoscono che noduli d'imperfettissima conservazione, quindi rimane ancora problematica la classificazione di questa forma. Il d'Achiardi è, per la stessa ragione, dubbioso (*Corallari fossili. Alpi venete*, 1866, pag. 17).

Cassinelle (3), Castelgomberto (1).

313. *Trochocyathus impari-partitus* E. H.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 103 (Ceratocyathus).

Secondo il Milne-Edwards (*Corall.*, vol. II, pag. 35) questa specie si avvina di molto al *T. costulatus;* cioè ha la forma di un cono breve, con pedicillo alquanto risvolto; ma le coste non sono cristiformi, quindi meno acute. Sopra tutta la superficie esterna vi sono distinte granulazioni.

Dal *T. crassus* si distingue per lo spessore dei paletti, ch'è uguale a quello dei tramezzi, e tutti di eguale lunghezza (Milne-Edw., *Corall.*, vol. II, pag. 28). Quantunque distinta questa specie dal *T. costulatus*, pur nullameno non si trovano esemplari che si possano figurare come tipici della specie.

Stazzano (9).

314. *Trochocyathus ambiguus* Michtti.

1861. Michelotti, *Fos. mioc. inf.*, pag. 29, tav. II, fig. 11-13.
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 101 (Ceratocyathus).

Si differenzia la presente specie dal *T. latero-cristatus* per essere non solo meno compressa e risvolta, ma per le coste longitudinali dei due primi ordini alquanto ed ugualmente crispate; mentre nel *T. latero-cristatus* solo le coste laterali sono notevolmente cristate.

Con la sua forma generale ci ricorda il *T. versicostatus*, ma non ci offre le coste spinifere. Infine vi troviamo, sopra la superficie, una serie di grossi bitorzoli discosti, come ce li presenta il *T. verrucosus*.

Dego (10).

315. *Trochocyathus aequicostatus* Reuss.

1847. Catullo, *Dei terr. di sedimento sup. delle Venezie*, pag. 40, tav. IV, fig. 14 (Strombodes? incurvus).
1865. De Schauroth, *Verzeich... der Verst...*, ecc., pag. 183, tav. VI, fig. 4 (Parasmilia aequicostata). 1856, pag. 37, tav. III, fig. 14; non fig. 15.
1866. D'Achiardi, *Coral. foss.*, *I*, pag. 37, tav. I, fig. 2, 3 (Coelosmilia).
1869. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 15, tav. XXVII, fig. 6-9 (Part. II) (Trochocyathus).

Come si scorge dalla sinonimia, la presente specie fece passaggio successivamente in parecchi generi, come: *Strombodes*, *Lithodendron*, *Parasmilia*, *Coelosmilia*, *Trochocyathus*. Il Reuss, per dimostrare la giusta posizione della forma nel gen. *Trochocyathus*, riportò diverse figure, tra le quali una (6 b) rappresentante il calice. In questa figura si osserva una ben distinta columella papillosa; columella che non aveva potuto osservare sicuramente il d'Achiardi (op. cit., pag. 38).

Fig. 20. × 5

In una sezione (fig. 20) da me praticata nella parte superiore di un polipierite vi si vede una columella abbastanza sviluppata. Con ciò credo che venga finalmente assicurata la posizione generica di questa specie.

Roncà (10).

316. *Trochocyathus lineatus* E. H.

1829. Goldfuss, *Petref. Germ.*, t. I, pag. 108, tav. XXXVII, fig. 18 (Turbinolia).

Vicentino (1).

317. *Trochocyathus exaratus* Michtti.

1861. Michelotti, *Fos. mioc. inf.*, pag. 30, tav. II, fig. 17 e 18.
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 103 (Ceratocyathus).

La forma generale del polipierite ci ricorda quella del *T. latero-cristatus*; ma le coste nella presente specie sono liscie, rotonde, leggermente ondulose.

Dego (2).

318. *Trochocyathus polyedrus* Seg.

1863. Seguenza, *Disq. Paleont.*, pag. 58, tav. VI, fig. 6 (Ceratocyathus).

Messina (1).

319. *Trochocyathus protensus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 104, tav. VII, fig. 18-19 (Ceratocyathus).

La forma esterna di questa specie è di molto somigliante a quella che ci presentano gli individui del gen. *Trochosmilia*. Ho praticato una sezione perpendicolarmente all'asse del polipierite, che ci mostra una columella abbastanza sviluppata. Questo solo carattere è sufficiente, per fare ascrivere la forma a questo genere e non al gen. *Trochosmilia*.

Fig. 21. × 4

Dego (15).

320. *Trochocyathus punctatus* Michtti.

1838. Michelotti, *Specim. zooph. dil.*, pag. 74 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag 35 (pro parte), tav. VIII, fig. 9 *b* (esclus. 9 *a*).

I due esemplari che si riferiscono a questa specie hanno la parte basale senza avere la parte superiore, per lo che lasciano molti dubbî. Di più essi sono giovani, come lo dimostra il pedicillo ben marcato e la forma generale depressa. Il Milne-Edwards esprime il dubbio della giusta determinazione di questa specie, credendo doversi riferire al suo *T. sublaevis* (*Ann.*, vol. IX, pag. 336). Basta paragonare le due figure citate del Michelin per conoscere come si tratti di due specie.

Torino (2).

321. *Trochocyathus elongatus* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.* 3e sér., t. IX, pag. 305.

Il Michelotti ritiene come sua questa specie e ne traccia due righe di descrizione, ma già si trova tale specie riportata dal Milne-Edwards (*Hist. nat. Cor.*, vol. II, pag. 29). Per le poche caratteristiche riportate da ambedue e per la mancanza di figura non si può certamente assicurare se trattasi di una specie o di due distinte. Gli esemplari della Collezione che sono mal ridotti pare appartengano alla specie descritta dal Milne-Edwards.

Stazzano (2).

***

Sette esemplari, provenienti da Dego, portano il nome specifico di *T. devexus*. Per quanto cattivo sia lo stato di essi fossili, pur nullameno vi sono tali caratteri esterni, da essere quasi sufficienti per la distinzione. « Polipierite allungato, quasi cilindrico, verso il calice schiacciato. Base gradatamente acuta e lievemente contorta nel senso dell'asse maggiore del calice, ch'è ovale. Coste distinte sin dalla base, rotonde, granulose. Nella superficie esterna è leggermente ondulato, pare sia stretto da irregolari strozzamenti ».

Lunghezza dai 25 mm. ai 52 mm. Diametro maggiore del calice dai 6-20 mm.; minore dai 4 ai 12 mm.

Si distingue dal *T. ambiguus* per avere coste pressochè uguali e non crispate, pel calice allungato, dal *T. elegans* per le coste meno fitte, meno chiaramente granulose, e per offrirci la curva della base nel piano dell'asse maggiore del calice.

La spatizzazione dei fossili non ci permette di dire nulla intorno ai caratteri interni della specie.

Forse dovranno appartenere ad una nuova specie due esemplari che riunirebbero con le loro specifiche quelle del *Tr. latero-cristatus* e *versicostatus:* ma il loro stato di conservazione e la mancanza della parte calicinale non lo permettono. Benchè le 6 coste primarie presentino talune spine elevate, come si osservano nel *T. versicostatus*, pure nella sua forma generale si assomiglia al *T. latero-cristatus*. Un carattere distintivo esterno sarebbe costituito dalle coste molto larghe, appiattite e rare.

Nella Collezione Michelotti v'ha un esemplare che, per la sua speciale forma esterna, s'ebbe il nome di *T. conicus;* questo esemplare, a prima vista, mi sembrò appartenere ad una specie già conosciuta; difatti tutti i caratteri delle coste piane, granulose; dei setti in numero di 48, spessi all'esterno, sottili all'interno, aguzzi alla sommità; delle due corone di paletti pressochè uguali ecc., del calice ovale mi hanno fatto riconoscere il *T. crassus*. Spesso tra gl'individui di simile specie se ne riscontrano parecchi conici: come attesta il Guettard (*Mém. sur diff. part. des sc. et arts*, vol. II, p. 385, tav. XXI, f. 5, 1870) che pel primo descrisse questa specie (*Caryophyllia*).

Stazzano (1).

Col nome di *T. incomptus*, sono stati classificati 7 esemplari dei Colli di Torino: dopo un attento esame, credo che si debbano riferire senza alcun dubbio al *T. latero-spinosus*. E. H. Infatti hanno le spine orizzontali sopra le coste primarie, le altre sono poco rilevate. Similmente corrispondono i caratteri interni, per quanto si può vedere pel cattivo stato dei fossili. Anche la forma generale è uguale.

Colli Torino (7).

Genus **Conocyathus** d'Orb.

1849. D'Orbigny, *Notes sur des Pol. foss.*, pag. 5.

322. *Conocyathus dertonensis* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 106, tav. VII, fig. 13, 13 *a*.

Questa specie va riferita con molto dubbio al presente genere, giacchè l'esemplare, ch'è quello figurato nel lavoro del Sismonda, ha scavezzato l'apice, quindi non ci fa riconoscere se sia libero o peduncolato. Parimenti non si scorge se manca la columella o se trovasi nel solo stato incipiente; nè si possono riscontrare i pali avanti al penultimo ciclo: caratteri tutti del genere.

Stazzano (1).

Genus **Rhizotrochus** E. H. (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 15.

323. *Rhizotrochus deperditus* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 92, tav. VIII, fig. 13, 13 *a*.

Albugnano (1).

Genus **Flabellum** Lesson (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 13.

324. *Flabellum Bellardii* H.

1850. *Mém. de la Soc. géol. de France.* 2ᵉ sér., t. IV, pag. 282, tav. XXII, fig. 1.

Crosara (1).

325. *Flabellum avicula* Michtti.

1838. Michelotti, *Spec. zooph. dil.*, pag. 58, tav. III, fig. 2 (Turbinolia).
1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 44, tav. IX, fig. 1 *a* (non la fig. 11 *c*).

Dego (6), Fossetta (Sassuolo) (3).

326. *Flabellum intermedium* Michtti.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 44, tav. IX, fig. 1 *c* (F. avicula).

Quasi tutti i caratteri di questa forma sono comuni al *F. avicula* Michtti, specie che di molto si avvicina alla presente, specialmente per i caratteri che ci presenta nella parte inferiore del polipierite. Non mancano però distintivi, cioè: Il *F. avicula* Michtti porta generalmente sopra i due lati, in rapporto dell'asse maggiore, tre coste aliformi, che si protendono fin verso l'orlo del calice; mentre nel *F. intermedium* non oltrepassano la metà inferiore delle coste. Nel *F. avicula* il calice all'estremità dell'asse maggiore si presenta ad angolo acuto; rotondo nel *F. intermedium*. Quello è molto compresso, meno questo. Il *F. avicula* forma un angolo colle estremità costali acute di 90°-100°; mentre il *F. intermedium* offre un angolo di minor numero di gradi. L'*avicula* poi ha 12 coste rilevate, la granulazione dei tramezzi molto distinta e diverso il rapporto degli assi.

Stazzano (7), Zinola (3).

327. *Flabellum appendiculatum* A. Brong.

1823. A. Brongniart, *Sur les terr. calcaréo-trappéens du Vicentin*, pag. 83, tav. VI, fig. 17.
1869. Reuss, *Paläont. Stud. II*, pag. 17, tav. XXVIII, fig. 1-7.

Roncà (10), Fossetta (1).

328. *Flabellum deperditum* Michtti.

1861. Michelotti, *Foss. mioc. inf.*, pag. 30, tav. II, fig. 20-22.

Il d'Achiardi (*Stud. comp.*, pag. 7) non nutre fiducia sopra la distinzione di questa specie, adducendo il motivo dell'ignoranza dei caratteri specifici. Il carattere distintivo

per Michelotti riposa nel restringimento che ci offre attorno al calice. Se è buono tale carattere, la specie deve distinguersi; conviene però osservare come il *F. intermedium* ed altri ci porgono spesso tale particolarità.

Dego (2).

329. *Flabellum dissitum* Michtti.

1861. Michelotti, *Foss. mioc. inf.*, pag. 31, tav. II, fig. 23, 24.

Di questa specie il d'Achiardi nutre lo stesso sentimento della precedente; ma le coste dei due primi ordini sono in questo flabello alquanto crispate e lamellose a differenza di quello che ci presentano altre specie.

Dego (2).

330. *Flabellum asperum* E. H.

1841. Michelin, *Icon. Zooph.*, pag. 45, tav. IX, fig. 12 (p. p. F. appendiculatum).

S. Agata (12), Pino (1).

331. *Flabellum extensum* Mich.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 46, tav. IX, fig. 14.

Colli Torino (10).

332. *Flabellum sinense* Michtti.

1838. Michelotti, *Specimen zooph.*, pag. 65, tav. II, fig. 3 (Turbinolia).

Colli Torino (4).

333. *Flabellum foecundum* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 94, tav. VII, fig. 25.

Il costante ed uguale rilievo delle coste dei due primi ordini; la forma poco elevata e regolarmente conica, donde la mancanza di depressioni ai due lati; le curve regolari dell'epitecio, a mò di festoni, fino all'orlo del calice ch'è ovale ed orizzontale servono da buoni distintivi per il *F. foecundum*.

Colli Torino (12).

334. *Flabellum acutum*. E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, sér. 3ᵉ, t. IX, pag. 267, tav. VIII. fig. 6.

S. Agata (10), Zinola (1).

335. *Flabellum Michelini* E. H.

1841. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 45 tav. IX, fig. 13 (F. cuneatum).

Zinola (4), Fossetta (1).

336. *Flabellum laciniatum* E. H.

1841. A. Philippi. *Neues Jahrbuch für und Geol.*, t. IX, pag. 665, tav. XI, fig. B 2 (Phyllodes laciniatum).

Torsero (1).

337. *Flabellum majus* E. H.

Tav. III, fig. 26, 27, 28.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3[e] sér., t. IX, pag. 264.

Albenga (7).

338. *Flabellum Hohei* E. H.

1832. Goldfuss, *Petr. Germ.* pag. 108, tav. XXXVII, fig. 17 (Turbinolia).

Fossetta (1).

339. *Flabellum siciliense* E. H.

Tav. III, fig. 29, 30.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, sér. 2[e], t. IX, pag. 267.

Diolo (1), Collezione pisana (1).

340. *Flabellum Woodi* E. H.

1850. Milne-Edwards et Haime, *Britsh. foss. corals.*, pag. 6, tav. I, fig. 2. Senza località.

341. *Flabellum acelanum* Cat.

1856. Catullo, *Ter. sed. Venez.*, pag. 36, tav. II, fig. 8.

Diolo (8), (Piacenza).

342. *Flabellum affine* E. H.

1848. Milne-Edwards et J. Haime, *Ann. des Sc. nat.*, 3[e] sér., t. IX, pag. 274, tav. VIII, fig. 10.

Il Michelotti assicura esser sua questa specie. Veramente non si può asserire che corrisponda alla descrizione ed alla figura del Milne-Edwards e del Haime, perchè la prima è appena abbozzata e la figura non tanto ben riuscita. A costoro parve avvicinarsi al *F. compressum*, perchè la riportavano sotto la categoria dei *Flabella truncata* cioè fissi in goventù e liberi nell'età adulta per la rottura del peduncolo. Il Michelotti invece la paragona al *F. Michelini*, perchè parevagli doversi ascrivere tra i flabelli dalla teca liscia, senza creste, nè spine. Il numero dei setti è per i due casi il medesimo. Hanno, a mio avviso, ragione tutti e due; ma la specie nuova è una sola ed è quella dapprima descritta dal Milne-Edwards e dal Haime, e può entrare in ambedue le categorie. Siccome costoro riportano bene i caratteri distintivi dal *F. compressum*, io riporterò quelli che lo differenziano dal *F. Michelini*. È di questo meno compresso, meno allungato; le dimensioni del calice sono più piccole ed il rapporto degli assi è di 20 : 23.

Asti (1).

***

F. ambiguum Mornese (1).
F. fallax Dego (2).
F. allectum Mornese (6).

Queste tre specie, di cui tolgo il nome sopra le tavolette portanti i fossili, credo che non abbiano alcuna ragione di esistere, perchè mancanti di sufficienti caratteri distintivi e debbono tutte rientrare nel *F. appendiculatum*. Infatti questo ci presenta

svariate forme come si vede dalle figure riportate dal Reuss (*Paläont. Stud. II*, pag. 17, tav. XXIII, fig. 1-7); a queste se ne dovranno aggiungere altre con caratteri intermedii senza sentire il bisogno di ricorrere a nuove specie. I caratteri interni non si possono riscontrare e per la rottura del calice e per la spatizzazione; quelli poi che si possono studiare rispondono esattamente al *F. appendiculatum:* come i quattro cicli di lamelle incompleti, la columella parietale ecc. ecc. Altre osservazioni sono riportate dagli autori citati nel *F. appendiculatum.*

Nella Collezione in istudio vi sono quattro coralli fossili del tortonese, immersi totalmente in una marna arenacea, che portano il nome specifico datogli dal Michelotti: *F. repandum.* Questa specie fu istituita certamente per la periferia del grande asse che occupa $^3/_4$ di una circonferenza ciò che non è facile il riscontrare in tutti gli esemplari. Ne deriva un'apparenza di ventaglio ed una lontana somiglianza col genere *Diploctenium* Goldffuss, caretteristico dei terreni cretacei. Dopo un lungo studio necessario per la pessima conservazione degli individui, dei quali rimangono solamente i tramezzi impaniati nella marna, non senza qualche dubbio, li riferisco come appresso:

Uno piccolo e con la teca ben conservata e non offrente quella dilatazione dell'asse maggiore per $^3/_4$ di circolo, possiede tutti i caratteri del *F. extensum* Mich.

Gli altri tre del *F. repandum* Michtti si possono riferire, per quanto lo permettono i fossili, al *F. Vaticani* Ponzi. Non si riscontrano i festoni dell'epitecio per la mancanza della teca; per la stessa ragione non si osservano le coste spinose. Troviamo però gli altri caratteri come il numero dei setti con i maggiori più sviluppati, la grandezza e la forma speciale, finalmente il peduncolo ristretto. Si rimane sempre con qualche esitazione pel cattivo stato degli esemplari.

Tre altri fossili, tra cui un'impronta, provenienti pure essi dal torinese ed immersi nella marna arenacea, ci offrono i caratteri del *F. solidum* Seg., al quale li riferisco, con molta esitazione, non avendo la fortuna di confrontarli con individui della specie, ma solamente con la figura del Seguenza, cui manca pure il peduncolo, che nei nostri esemplari si presenta aguzzo-conico. Anche il calice ci offre un allargamento maggiore nella parte vicina al calice. Del resto anche questi non sono in buono stato, essendo obliterata quasi completamente la teca.

Un polipierite, con la parte calicinale rotta, porta il nome di *F. discrepans.* Appena veduto, lo si prende pel *F. Hohei* E. H.; ma ne differisce per la mancanza delle cinque coste rilevate e salienti nelle due facce laterali, per la teca più sottile, quantunque mostri la medesima ornamentazione a piccoli festoni; il calice poi è meno compresso da essere ovale e non ellissoideo. Queste differenze però credo non siano sufficienti per farne una specie distinta, ma solamente una varietà. Ne riporto le più minute particolarità: « Polipaio cuneiforme, con il peduncolo compresso sensibilmente e colla parte inferiore risvolto verso il piano del piccolo asse del calice. Coste uguali e poco distinte; solamente le due laterali portano creste pronunziate ed aliformi. L'epitecio orna la superficie con minuti festoncini. Calice ovale; setti in numero di 50, cioè cicli quattro ed $^1/_4$. I setti sottili dei 3 primi ordini si fanno spessi verso il calice e per

mezzo di bastoncelli rari, ma grossi formano una columella parietale. La superficie dei setti è ricoperta da granulazioni aguzze in serie oblique ed irregolari.

Altezza mm. 25. Diametri del calice 18-25 mm.

Zinola (1).

Subgenus **Blastotrochus** (E. H. genus) Duncan.

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 14.

343. *Blastotrochus ? proliferus* d'Ach.

1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte I, pag. 24, tav. I, fig. 8.

Riporto a questo genere ed alla presente forma un esemplare con la stessa esitazione del d'Achiardi. Il cattivo stato del fossile impedisce l'osservazione di caratteri non ancora osservati.

S. Giovanni Ilarione (1).

***

Due frammenti di polipieriti, raccolti nelle Colline di Torino, si debbono forse riferire a questo genere e nel loro aspetto differiscono e dal *B. proliferus* e dal B. *nutrix* E. H., che vive nelle Isole Filippine; ma il cattivo stato di conservazione non mi permette di dir nulla a loro riguardo.

Genus **Desmophyllum** Ehr. (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 11.

344. *Desmophyllum clavatum* Seg.

1863. Seguenza, *Disq. paleont.*, pag. 75, tav. IX, fig. 4 *a*, 4 *b*.

Il Sismonda E. (*Mat. paléont.*, pag. 87, tav. VII, fig. 6) riporta questa specie come del Michelotti e ne dà la figura. Quest'ultima non è chiarissima, tuttavia pare che si avvicini a quella del Seguenza. La brevissima decrizione non ci permette di assicurare, se trattasi della stessa specie. Del resto l'esemplare che trovasi nella Collezione in istudio corrisponde interamente e alla descrizione ed alla figura del Seguenza.

Il Sismonda riporta la presente forma fossile a Torino.

Messina (1).

345. *Desmophyllum affine* Seg.

1864. Seguenza, *Disq. paleont.*, pag. 72, tav. VIII, fig. 4.

Colli Torino (3).

346. *Desmophyllum striatum* E. Sismd.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 88, tav. VII, fig. 10.

Colli Torino (4 e frammenti).

347. *Desmophyllum pedemontanum* d'Ach.

1868. D'Achiardi, *Stud. Comp.*, pag. 7, tav. I, fig. 5, 5 *a*, 5 *b*.

Colli Torino (4).

348. *Desmophyllum ambiguum* Michtti.
Tav. III, fig. 31.

1871. Sismonda E *Mat. paléont.*, pag. 87.

Alla breve descrizione della specie riportata dal Sismonda aggiungerò le seguenti specifiche: « Forma irregolarmente clavata; le coste dei due primi ordini sono ango- « lose, specialmente verso il calice; quelle intermediarie sono spianate, ma nel loro « mezzo hanno qua e là una piccola costicina che le fa credere in quel tratto ango- « lose. Si riterrebbe per un *Trochocyathus*, se non mancasse e columella e pali ».

Colli Torino (1).

349. *Desmophyllum turgidum* Michtti.

1847. Michelotti, *Foss. mioc.*, pag. 23, tav. I, fig. 19 (Turbinolia).
1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 89, tav. VII, fig. 11.

Si assomiglia di molto al. *D. clavatum*, ma se ne distingue per le coste rilevate dei primi ordini.

Colli Torino (1)

350. *Desmophyllum subturbinatum* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 88, tav. VII, fig. 7, 8.

Colli Torino (5).

351. *Desmophyllum simplex* Michtti.
Tav. III, fig. 32.

1871. Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 8.

Colli Torino (1 frammenti).

352. *Desmophyllum nudum* Michtti.

1871. Sismonda E., *Mal paléont.*, pag. 87, tav. VII, fig. 5.

Colli Torino (1).

353. *Desmophyllum elatum* n. sp.
Tav. III, fig. 33, 34, 35.

« D. polypario elato, parvo, subcylindrico, curvato, undulato; prope basem attenuato « inde dilatato, incrustante; calice ovali aut subcirculari. Costis propre calicem distinctis « praecipue primariis secundarisque: septis tenuibus elatioribus primariis superne pro- « minentibus; granulatis. Fossula magna, profunda. Palis nullis. Columella nulla ».

Piccolo polipajo elevato, subcilindrico, claviforme; curvato e talvolta risvolto. Verso la base si assottiglia, per poi allargarsi di nuovo di molto per divenire anco incrostante. Nella parte dilatata si vedono nascere i nuovi e piccolissimi polipieriti, che talvolta si riscontrano persino dentro il calice dei più grandi. Le coste non sono visibili se non verso il calice, dove si distinguono quelle del primo e secondo ordine. I setti sono tutti sporgenti, ma sono sporgentissimi quelli del primo ordine, poi quelli del secondo ordine. Sono esternamente grossi, ma ben presto si assottigliano per dar

luogo ad una fossula grande, e profondissima. Non v'ha columella affatto. I setti sono granulosi ed in numero di 24 (i visibili), nelle rotture verso la base se ne scorgono 6 che vengono a toccarsi nel centro e nelle prime loggie cominciano a comparirne altri 6; compare finalmente il terzo ciclo ma molto poco sviluppato. Non ho potuto riscontrare neppure l'indizio del 4 ciclo. L'altezza varia, mantenendosi sempre in limiti abbastanza bassi 7-13 mm. Questo è un carattere ben distintivo dalle altre specie. Il calice che è ovale o quasi circolare ha un diametro che oscilla fra 4-6 mm.

Non fa mestieri riportare le differenze fra questa e le altre forme, per i molti caratteri specifici che ci presenta.

Zinola (6).

***

V'ha un frammento di un polipierite, che appartiene certamente a questo genere e deve certamente riferirsi ad una specie nuova. Il cattivo stato del fossile proibisce di asserirlo senza dubbio. Ecco i caratteri ch'io vi rilevo: « Polipierite solido, « conico, alquanto compresso, base.........; superiormente dilatato. Circolarmente « corrono delle insenature che tolgono la regolarità esterna. Esternamente scabro. Molte « coste. Fossula probabilmente grande. I setti verso il calice sono rilevati, ciò che ci « fa presupporre che i setti siano sporgenti, specialmente quelli dei primi ordini. Nella « parte inferiore levigata riscontro i setti che secondo il carattere precipuo generico si « addossano uno sull'altro. La rottura ci fa riconoscere le superficie granulose dei setti « e della columella ». Questo fossile porta il nome di *D. oblitum.*

S. Giovanni Ilarione (1 non intero).

Genus **Smilotrochus** E. H. (emend. Duncan).

1885. Duncan, *Rev. Fam. and Gen.*, pag. 10.

354. *Smilotrochus incurvus* d'Ach.

1866. D'Achiardi, *Cor. foss. Alpi Ven.*, parte I, pag. 20, tav. II, fig. 1, 1 *a*.

Via degli Orti (Asolo) (3).

355. *Smilotrochus tuberosus.*

Non so se questa forma corrisponda allo *S. tuberosus* E. H. (*Pol. foss. des terr. paleoz.*, ecc., p. 29. 1851) figurato dagli stessi autori (*Britsh. fos. Cor.*, pag. 58, tav. 10, fig. 2. 1750, *Trochosmilia?*), tanto sono poco esatte le descrizioni e pessimo lo stato dell'unico esemplare fossile. Confrontando però la figura citata col fossile, si vede che non corrisponde allo *S. tuberosus* E. H. Invece l'esemplare che ho avanti è quello tipico del *S. tuberosus* Michtti (Sismonda E., *Mat. paléont.*, pag. 89, tav. VII, fig. 3), quantunque la figura sia mal riuscita, presentandoci caratteri anatomici che non si riscontrano nell'esemplare. Solamente adunque col confronto dei fossili, sopra cui furono istituite le forme, si potrà troncare la questione.

Baldissero (1).

***

Il Michelotti mandò col nome di *S. oblitus* un esemplare al Meneghini, che gli venne rimandato col nome di *Placosmilia elliptica;* ma, avendo praticato nel fossile una sezione longitudinale, questa gli dimostrò come le loggie non sieno divise da piani.

Laonde il fossile deve appartenere ad altra famiglia e non a quella cui è ascritto il gen. *Placosmilia*. La columella costituita da una sola lamella e sottile non fa ascrivere il fossile al gen. *Smilotrochus*. Quest'ultimo carattere anatomico fu quello che decise il Meneghini ad ascriverlo al gen. *Placosmilia*. Credo che potrà essere riferito, con molta certezza, al gen. *Lophosmilia*, dove le traverse sono rare e la columella lamellare e rudimentale.

Un altro esemplare, raccolto nei Colli di Torino, porta il nome: *S. conicus*. Per la dilatazione del peduncolo non può appartenere a questo genere; per gli altri caratteri deve riportarsi, quasi senza dubbio, alla *Caryophyllia clavus* Scacchi, quantunque presenti l'interno del calice non in buono stato, tanto che non si veggono i paletti e la columella.

CONCLUSIONE

Riuscirebbe del tutto superfluo ed inutile inferire le solite conclusioni generali attingendo largamente ai classici lavori, come quello uscito or ora dalla dotta penna del Walther [1].

Le forme citate, costituendo solo una parte della ricca fauna corallina delle menzionate località che si riferiscono, con certezza, a diversi livelli del Terziario, non ci autorizzano a trarre conseguenze cronologiche e corologiche. Per la medesima ragione non possederebbero valore alcuno i confronti ed i parallelismi più precisi di quelli che si conoscono, fra le faune delle località dell'età stessa.

Impossibile e presuntuoso sarebbe tentare di svolgere il filo genetico delle forme attraverso i piani. Manca infatti una minuta analisi che c'indichi le emigrazioni, le immigrazioni, i centri di creazione, i limiti delle provincie, e la sovrapposizione delle medesime. A ciò si aggiunge la diversa interpretazione, riguardo al tempo di formazione, con cui si spiegano i piani dello stesso terreno; ritenendosi originati nel medesimo tempo, ma in zone batimetriche diverse. I ravvicinamenti ed i caratteri d'affinità, non certo d'importanza filogenetica, che mi sono sembrati chiari e certi, li ho esposti brevemente ragionando delle singole forme.

Laonde, a titolo di conclusione, riporto l'elenco delle forme coll'indicazione dei piani cui si riferiscono le località donde provengono gli esemplari. Ciò costituirà il frutto di questo mio qualsiasi lavoro.

L'ordine cronologico dei piani è quello proposto dal Mayer-Eymar [2]. Conviene ricordare che ora alcuni piani della stessa formazione giustamente sono ritenuti come contemporanei. La loro diversa natura litologica e la svariata fisonomia corologica sarebbe causata dalla sola eteropicità, come genialmente dimostrarono G. Jeffreys, Seguenza, Fischer, Fontannes, Tournouër, Pantanelli, Welsch, Fuchs, de Stefani, ecc. Ciò appare sommamente giusto, quando si considera che per rettemente precisare la relativa cronologia di uno strato e di una fauna, conviene usare il confronto di faune isomesiche, isotopiche, ed isopiche. Giacchè solamente in questo caso si conosce la comparazione filogenetica dei fossili, unica interprete dei rapporti cronologici. Tale fatto importante non viene contradetto dalle faune coralline, anzi ottimamente confermato, come ebbi a constatare per le forme d'Antozoi fossili raccolte nelle argille (Piacentino) e nelle sabbie grigie-gialle (Astiano) del Monte Mario, Roma [3].

(1) Walther J., *Lithogenesis der Gegenwart. — Die Korallenriffe*, pag. 893. Jena, 1894.

(2) Mayer-Eymar C., *Tableau des terrains de sédiment*. Ex. — Glasnik Hrvatskoga Naravoslovnoga Druztva IV. Godina. — Zagreb (Agram), 1889. Ed in altri moltissimi lavori.

(3) De-Angelis G., *I Zoantari fossili dei dintorni di Roma*. Es. Soc. Geol. Ital., vol. XII, fas. 1°. Roma, 1893.

N. d'ordine	FORME	ZONE: Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
	Typus. COELENTERATA							
	Classis. ANTHOZOA							
	I. Ordo. ALCYONARIA							
	Familia **GORGONIDAE** E. H.							
	Sub-Fam. **Isidinae** E. H.							
1	*Isis melitensis* Goldf.			+	+			
2	" *brevis* d' Ach.					+	+	
3	" *peloritana* Seg.			+				
4	" *contorta* E. Sismd.			+				
5	" *compressa* Seg. (?)			+				
	Sub-fam. **Corallinae** Dana.							
6	*Corallium rubrum* Costa				+			
7	" *pallidum* Mich.				+			
8	" *sulcatum* Mich.				+			
9	" *inaequale* n. sp.						+	
	Fam. **PENNATULIDAE** E. H.							
10	*Pavonaria Portisi* n. sp.				+			
	Sub-Ord. ANTIPATHARIA Gray.							
11	*Leiopathes vetusta* Mich.				+		+	
	Fam. **MILLEPORIDAE** E. H.							
12	*Heliopora supergiana* Mich				+			
13	" *Bellardii* H.							+
14	*Polytremacis abdita* n. sp.							+
	II. Ordo. ZOANTHARIA.							
	Sub-Ordo. MADREPORARIA.							
	1ª. Sectio **Madreporaria perforata.**							
	I. Fam. **PORITIDAE** E. H.							
15	*Montipora sepulta* Meneg.						+	
16	*Alveopora rudis* Reuss						+	
17	" *discors* n. sp.			+				
18	*Litharaea asbestella* E. Sismd.				+		+	
19	" *diversiformis* Mich.			+	+			
20	" *ameliana* E. H.							+
21	" *bellula* E. H.					+		
22	" *pulvinata* Meneg.						+	
23	" *oblita* n. sp.						+	

N. d'ordine	FORME	ZONE: Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
106	*Trochoseris venusta* Mich.						+	
	III. Fam. **PLESIOFUNGIDAE**							
107	*Halomitra ambigua* n. sp.						+	
108	*Thamnastraea volvox* Mich.						+	
109	" *adscita* n. sp.						+	
110	" *Maraschinii* d'Ach. *in litt.*					+		
111	*Siderastraea funesta* Brong.							+
112	" *Reussi* Mich.			+				
113	" *crenulata* Goldf.			+	+	+		
114	" *italica* Defr.		+	+				
115	" *detecta* Mich.			+				
	3ª. Sectio. **Madreporaria aporosa.**							
	1. Fam. **ASTRAEIDAE**							
	Sub-Fam. **Astraeidae agglomeratae gemmantes.**							
116	*Plerastraea taurinensis* d'Ach.				+			
117	" *ornata* Mich.				+		+	
118	*Latimaeandra Gastaldii* H.					+		
119	" *Michelottii* H.					+		
120	" *repanda* Mich.						+	
121	*Prionastraea Fromenteli* E. Sismd.						+	
122	" *multisepta* E. H.				+			
123	" *aranea* E. H.				+		+	
124	" *propinqua* Mich.						+	
125	" *geometrica* Michtti.				+			
126	" *irregularis* E. H.				+			
127	" *inaequalis* Meneg.					+		
128	" *parvula* Mich.						+	
129	" *incerta* d'Ach.						+	
130	" *centralis* Meneg. *in litt.*				+	+		
131	*Stylocoenia lobato-rotundata* Mich.					+	+	
132	" *saxulensis* d'Ach.						+	
133	" *monticularia* Schweigger.							+
134	" *mutata* Mich.				+			
135	" *taurinensis* Mich.						+	
136	*Stephanocoenia sigillarioides* Meneg.							?
137	*Astrocoenia reussana* d'Ach.							+
138	" *ornata* Mich.				+			
139	*Leptastraea anomala* Mich.						+	
140	*Phyllocoenia annulata* Cat.					+		
141	" *lucasana* Defr.					+	+	
142	" *brevissima* Cat.							?
143	" *deperdita* Mich.						+	

N. d'ordine	FORME	ZONE Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
144	*Plesiastraea Desmoulinsii* E. H.		+	+				
145	*Solenastraea monsvialensis* Cat.					+		
146	*Phymastraea Capellinii* n. sp.	+						
147	*Cyathomorpha rocchettina* Michelin				+			
148	" *affinis* Cat.					+		
149	" *umbellata* Reuss					+		
150	*Heliastraea ambigua* E. Sismd.						+	
151	" *apenninica* d'Ach.						+	
152	" *bormidensis* Mich.						+	
153	" *Defrancei* E. H.				+	+		
154	" *ellisiana* Defr.			+	+		+	
155	" *eminens* Reuss						+	
156	" *plana* Michelin				+			
157	" *planulata* d'Ach.				+			
158	" *prevostana* E. H.				+			
159	" *reussana* E. H.					+		
160	" *vesiculosa* E. H.				+			
161	" *alpina* d'Ach.							+
162	" *Hilarionensis ?* d'Ach.							+
163	*Thegioastraea Roasendai* Mich.				+			
	Sub-fam. **Astraeidae agglomeratae fissiparantes.**							
164	*Septastraea papyracea* Mich.				+			
165	" *laxelamellata* Mich.						+	
166	" *polymorpha* Mich.				+			
167	*Aphastraea Meneghinii* Mich.				+			
168	" *adscita* n. sp.	+						
169	*Goniastraea diversiformis* Mich.				+			
170	" *aequicostata* Mich.				+			
171	" *propinqua* Mich.				+			
172	*Goniastraea ? crassicostata* Mich.				+			
173	" *miocenica* Mich.				+			
174	" *conferta* Mich.				+			
175	*Spinellia pulchra* d'Ach.							+
176	*Favia subdenticulata* d'Ach.							+
177	*Clypeofavia circumscripta* Mich.						+	
178	" *pucherrima* Mich.						+	
	Sub-fam. **Astraeidae confluentes.**							
179	*Hydnophora sativa* Mich.						+	
180	" *venusta* Cat.						+	
181	" *meandrinoides* Mich.						+	
182	*Hydnophora meandrinoides* var. *pulchra* (E. Sismd. sp.)						+	
183	" *crispata* n. sp.						+	

N. d'ordine	FORME	ZONE	Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
106	*Trochoseris venusta* Mich.							+	
	III. Fam. **PLESIOFUNGIDAE**								
107	*Halomitra ambigua* n. sp.							+	
108	*Thamnastraea volvox* Mich.							+	
109	" *adscita* n. sp.							+	
110	" *Maraschinii* d'Ach. *in litt.*						+		
111	*Siderastraea funesta* Brong.								+
112	" *Reussi* Mich.				+				
113	" *crenulata* Goldf.				+	+	+		
114	" *italica* Defr.			+	+				
115	" *detecta* Mich.				+				
	3ª. Sectio. **Madreporaria aporosa.**								
	1. Fam. **ASTRAEIDAE**								
	Sub-Fam. **Astraeidae agglomeratae gemmantes.**								
116	*Plerastraea taurinensis* d'Ach.					+			
117	" *ornata* Mich.					+		+	
118	*Latimaeandra Gastaldii* H.						+		
119	" *Michelottii* H.						+		
120	" *repanda* Mich.							+	
121	*Prionastraea Fromenteli* E. Sismd.							+	
122	" *multisepta* E. H.					+			
123	" *aranea* E. H.					+		+	
124	" *propinqua* Mich.							+	
125	" *geometrica* Michtti.					+			
126	" *irregularis* E. H.					+			
127	" *inaequalis* Meneg.						+		
128	" *parvula* Mich.							+	
129	" *incerta* d'Ach.							+	
130	" *centralis* Meneg. *in litt.*					+	+		
131	*Stylocoenia lobato-rotundata* Mich.						+	+	
132	" *saxulensis* d'Ach.							+	
133	" *monticularia* Schweigger.								+
134	" *mutata* Mich.					+			
135	" *taurinensis* Mich.							+	
136	*Stephanocoenia sigillarioides* Meneg.								?
137	*Astrocoenia reussana* d'Ach.								+
138	" *ornata* Mich.					+			
139	*Leptastraea anomala* Mich.							+	
140	*Phyllocoenia annulata* Cat.						+		
141	" *lucasana* Defr.						+	+	
142	" *brevissima* Cat.								?
143	" *deperdita* Mich.							+	

N. d'ordine	FORME	Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
144	*Plesiastraea Desmoulinsii* E. H.		+	+				
145	*Solenastraea monsvialensis* Cat.					+		
146	*Phymastraea Capellinii* n. sp.	+						
147	*Cyathomorpha roccheltina* Michelin				+			
148	" *affinis* Cat.					+		
149	" *umbellata* Reuss					+		
150	*Heliastraea ambigua* E. Sismd.						+	
151	" *apenninica* d'Ach.						+	
152	" *bormidensis* Mich.						+	
153	" *Defrancei* E. H.				+	+		
154	" *ellisiana* Defr.			+	+		+	
155	" *eminens* Reuss						+	
156	" *plana* Michelin				+			
157	" *planulata* d'Ach.				+			
158	" *prevostana* E. H.				+			
159	" *reussana* E. H.					+		
160	" *vesiculosa* E. H.				+			
161	" *alpina* d'Ach.							+
162	" *Hilarionensis* ? d'Ach.							+
163	*Thegioastraea Roasendai* Mich.				+			
	Sub-fam. **Astraeidae agglomeratae fissiparantes.**							
164	*Septastraea papyracea* Mich.				+			
165	" *laxelamellata* Mich.						+	
166	" *polymorpha* Mich.				+			
167	*Aphastraea Meneghinii* Mich.				+			
168	" *adscita* n. sp.	+						
169	*Goniastraea diversiformis* Mich.				+			
170	" *aequicostata* Mich.				+			
171	" *propinqua* Mich.				+			
172	*Goniastraea* ? *crassicostata* Mich.				+			
173	" *miocenica* Mich.				+			
174	" *conferta* Mich.				+			
175	*Spinellia pulchra* d'Ach.							+
176	*Favia subdenticulata* d'Ach.							+
177	*Clypeofavia circumscripta* Mich.						+	
178	" *pucherrima* Mich.						+	
	Sub-fam. **Astraeidae confluentes.**							
179	*Hydnophora sativa* Mich.						+	
180	" *venusta* Cat.						+	
181	" *meandrinoides* Mich.						+	
182	*Hydnophora meandrinoides* var. *pulchra* (E. Sismd. sp.)						+	
183	" *crispata* n. sp.						+	

N. d'ordine	FORME	Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
184	*Hydnophora collinaria* Cat.						+	+
185	" *elongata* Mich. et Meneg.						+	
186	" *scripta* n. sp.						+	
187	*Hgdnophyllia Bellardii* E. H.						+	
188	*Plerogyra deperdita* n. sp.						+	
189	" *crassisepta* n. sp.						+	
190	*Iridacophyllia cichorium* Mich.						+	
191	" *subangulata* Mich.						+	
192	" *contorta* n. sp.						+	
193	*Ulophyllia flexuosa* d'Ach.							+
194	" *profunda* E. H.	?						
195	" *laxa* n. sp.						+	
196	*Mycetophyllia multilamellosa* d'Ach.							+
197	" *dubia* d'Ach.						+	
198	" *italica* d'Ach.							+
199	" *stellifera* Mich.	?						
200	" *interrupta* Reuss						+	
201	*Dimorphophyllia oxylopha* Reuss							+
202	*Symphyllia crebriformis* d'Orb.						+	
203	" *multisinuosa* n. sp.						+	
204	*Pachygyra Savii* d'Ach.						+	
205	*Rhipidogyra Michelottii* Meneg.				+			
206	*Euphyllia contorta* Mich.						+	
207	" *laevis* Mich. et Meneg.						+	
208	" *ventalina* Mich.				+			
	Sub-fam. **Astraeidae caespitosae.**							
209	*Rhabdophyllia stipata* d'Ach.						+	
210	*Calamophyllia crenaticosta* Reuss						+	
211	" *pseudoflabellum* Cat.					+		
212	" *planicostata* d'Ach.						+	
213	" *dissita* n. sp.						+	
214	" *compressa* n. sp.						+	
	Sub-fam. **Astraeidae gemmantes.**							
215	*Cladocora subintricata* Meneg.					+		
216	" *multicaulis* Mich.						+	
217	" *Michelottii* E. H.	+						
218	" *granulosa* Goldf.	+						
219	" *prevostana* E. H.	+						
220	" *caespitosa* E. H.	+	+		+		+	
	Sub-fam. **Astraeidae reptantes.**							
221	*Cladangia Cocchii* d'Ach.					+		+
222	" *proxima* Mich.						+	
223	" *minima* d'Ach.						+	

N. d'ordine	FORME	Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
224	*Astrangia patula* Mich.						+	
225	*Phyllangia alveolaris* Cat.					+	+	
226	» *festiva* Mich.				+			
227	» *microsyderea* n. sp.	+						
	Sub-fam. **Astraeidae simplices.**							
228	*Antillia cylindroides* Reuss					+		
229	*Leptaxis elliptica* Reuss					+		
230	*Lithophyllia Basterotii* E. H.				+			
231	*Parasmilia cingulata* Cat.							+
232	» *excentrica* Meneg.				+			
233	*Montlivaultia bormidensis* H.						+	
234	» *carcarensis* d'Ach. et H.						+	
235	» *Japheti* Mich.				+			
236	» *coronula* Mich.				+			
237	» *humilis* Mich.						+	
238	» *patula* Mich.				+			
239	» *oblita* n. sp.				+			
240	*Leptomussa variabilis* d'Ach.						+	
241	*Trochosmilia corniculum* Mich.							
242	» *incerta* Mich.						+	
243	*Coelosmilia miocenica* Mich.				+			
	II. Fam. **POCILLOPORIDAE**							
244	*Pocillopora madreporacea* Lamk.				+			
	III. Fam. **OCULINIDAE**							
245	*Stylophora annulata* Reuss						+	
246	» *contorta* Leymerie							+
247	» *distans* Leymerie							+
248	» *tuberosa* Cat.					+		
249	» *oligastra* Meneg.					+	+	
250	» *microstyla* Meneg.					+		
251	» *raristella* E. H.							
252	» *palmata* E. H.						+	
253	» *italica* d'Ach.							
254	» *thyrsiformis* E. H.						+	
255	*Trymohelia solida* Meneg.						+	
256	*Astrohelia deperdita* Mich.						+	
257	» *mamillosa* d'Ach.						+	
258	» *vasconiensis* E. H.				+		+	
	IV. Fam. **TURBINOLIDAE**							
	Sub-fam. **Turbinolidae gemmantes.**							
259	*Coenocyathus anthophyllites* E. H.				+			

N. d'ordine	FORME	Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
260	*Coenocyathus taurinensis* d'Ach.				+			
261	„ *affinis* n. sp.		+					
	Sub-fam. **Turbinolidae simplices.**							
262	*Ceratotrochus multispinosus* Mich.			+				
263	„ *multiserialis* Mich.			+	+			
264	„ *duodecim-costatus* Goldf.		+	+				
265	„ *rimosus* Mich.			+				
266	„ *anceps* Mich.		+					
267	„ *typus* Mich.			+	+			
268	„ *subrectus* n. sp.				+			
269	*Caryophyllia clavus* Schacchi		+					
270	„ *Sismondae* E. H.				+			
271	„ *Michelinii* Mich.				+			
272	„ *neglecta* n. sp.				+			
273	„ *revoluta* n. sp.				+			
274	„ *Zanclaea* Seg.				?			
275	„ *inflata* Seg.							
276	„ *calix* Michtti.		+					
277	„ *granulosa* n. sp.		+					
278	*Acanthocyathus pedemontanus* Mich.				+			
279	*Paracyathus pedemontanus* Mich.	+						
280	„ *turonensis* E. H.				+			
281	„ *Spinellii* d'Ach.							+
282	„ *cristatus* Mich.				+			
283	*Deltocyathus italicus* Mich.			+	+			
284	„ *cylindricus* Mich.				+			
285	„ *taurinensis* Mich.				+			
286	*Trochocyathus mitratus* Goldf.			+				
287	„ *crassus* Mich.			+				
288	„ *simplex* E. H.			+				
289	„ *bellingherianus* Mich.			+				
290	„ *costulatus* E. H.				+			
291	„ *sinuosus* Brong.							+
292	„ *Douglasii* Mich.			+	+			
293	a *Sismondae* E. H.				+			
294	„ *subcristatus* E. H.				+			
295	„ *versicostatus* Mich.			+	+			
296	„ *latero-cristatus* E. H.				+		+	
297	„ *latero-spinosus* E. H.				+			
298	„ *raricostatus* Mich.			+	+			
299	„ *verrucosus* E. H.				+			
300	„ *undulatus* Mich.			+				
301	„ *cornucopia* Mich.			+				
302	„ *obesus* Mich.			+	+			
303	„ *pyramidatus* Mich.			+	+			

N. d'ordine	FORME	ZONE Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
304	*Trochocyathus armatus* Mich.				+			
305	" *perarmatus* Tal.						+	
306	" *sublaevis* E. H.				+			
307	" *elegans* Mich.				+		+	
308	" *decussatus* Mich.				+			
309	" *sulcatus* E. Sismd.				+			
310	" *deperditus* Mich.				+			
311	" *ponderosus* Mich.			+				
312	" *? Bourqueti* Cat.					+	+	
313	" *impari-partitus* E. H.			+				
314	" *ambiguus* Mich.						+	
315	" *aequicostatus* Reuss							+
316	" *lineatus* E. H.							?
317	" *exaratus* Mich.						+	
318	" *polyedrus* Seg.		+					
319	" *protensus* Mich.						+	
320	" *punctatus* Mich.				+			
321	" *elongatus* E. H.			+				
322	*Conocyathus dertonensis* Mich.			+				
323	*Rhizotrochus deperditus* Mich.				+			
324	*Flabellum Bellardii* H.							+
325	" *avicula* Mich.						+	
326	" *intermedium* Mich.		+	+				
327	" *appendiculatum* A. Brong.							+
328	" *deperditum* Mich.						+	
329	" *dissitum* Mich.						+	
330	" *asperum* E. H.			+				
331	" *extensum* Mich.				+			
332	" *sinense* Mich.				+			
333	" *foecundum* Mich.				+			
334	" *acutum* E. H.		+	+				
335	" *Michelini* E. H.		+					
336	" *laciniatum* E. H.		+					
337	" *majus* E. H.		+					
338	" *Hohei* E. H.		+					
339	" *Woodi* E. H.							
340	" *siciliense* E. H.		+					
341	" *acelanum* Cat.		+					
342	" *affine* E. H.	+						
343	*Blastotrochus ? proliferus* d'Ach.							+
344	*Desmophyllum clavatum* Seg.				+			
345	" *affine* Seg.				+			
346	" *striatum* E. Sismd.				+			
347	" *pedemontanum* d'Ach.				+			
348	" *ambiguum* Mich.				+			
349	" *turgidum* Mich.				+			

N. d'ordine	FORME	ZONE						
		Astiano	Piacentino	Tortoniano	Elveziano	Oligocene superiore	Tongriano	Eocene medio
350	*Desmophyllum subturbinatum* Mich.	. .	. .	. .	+	. .	. .	. .
351	" *simplex* Mich.	. .	. .	. .	+	. .	. .	. .
352	" *nudum* Mich.	. .	. .	. .	+	. .	. .	. .
353	" *elatum* n. sp.	. .	+	. .	. .	. .	. .	. .
354	*Smilotrochus incurvus* d'Ach.	. .	. .	. .	. .	. .	. .	+
355	" *tuberosus*	. .	. .	. .	+	. .	. .	. .

FIGURE INTERCALATE NEL TESTO

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I [1].

Fig.	1.	*Corallium inaequale* n. sp.	grand. nat.
»	2.	*Pavonaria Portisi* n. sp.	5/1
»	3.	*Polytremacis abdita* n. sp.	2/1
»	4.	» » » sezione longitudinale	3/1
»	5.	*Actinacis Michelottii* (Meneg. *in litt.*)	grand. nat.
»	6.	» *elongata* n. sp.	1/2
»	7.	» » »	1/2
»	8.	*Heteropsammia antiqua* n. sp.	grand. nat.
»	9.	» » »	» »
»	10.	*Eupsammia contorta* n. sp.	» »
»	11.	» *irregularis* n. sp.	» »
»	12.	» » »	» »
»	13.	*Balanophyllia fallax* n. sp.	» »
»	14.	*Prionastraea centralis* (Meneg. *in litt*) (fig. 24)	» »
»	15.	» »	2/1
»	16.	*Lophoseris prisca* n. sp.	grand. nat.
»	17.	» » »	» »
»	18.	*Stylocoenia mutata* Michtti (pag. 50)	» »
»	19.	*Trochosmilia incerta* Michtti (pag. 80)	» »
»	20.	» » » »	2/1
»	21.	*Actinacis lobata* n. sp.	1/2
»	22.	*Lophoseris anteacta* n. sp.	»
»	23.	*Thamnastraea adscita* n. sp.	»
»	24.	*Prionastraea centralis* (Meneg *in litt.*)	»
»	25.	*Plerogyra deperdita* n. sp.	»
»	26.	» *crassisepta* n. sp.	»
»	27.	*Tridacophyllia contorta* n. sp.	»
»	28.	*Ulophyllia laxa* n. sp.	»
»	29.	*Symphyllia multisinuosa* n. sp.	»
»	30.	*Phyllangia microsyderea* n. sp.	»

Tavola II.

Fig.	1.	*Oroseris?* sp. (pag. 37, 38)	grand. nat.
»	2.	*Mycetoseris adscita* n. sp.	» »
»	3.	» » »	2/1
»	4.	*Cyathoseris crispa* n. sp.	grand. nat.
»	5.	» *scripta*	» »
»	6.	» Profilo di una collina	» »
»	7.	» Piano comune	» »
»	8.	*Halomitra ambigua* n. sp.	» »
»	9.	» » »	2/1
»	10.	*Thamnastraea Maraschinii* d'Ach. *in litt.*	grand. nat.
»	11.	*Phymastraea Capellinii* n. sp.	2/1

[1] La parte inferiore della tavola porta la rappresentazione diretta degli esemplari, la superiore quella dei miei disegni. Per tale ragione fui obligato a non seguire l'ordine naturale delle forme nella disposizione delle tavole.

Fig. 12. *Aphastraea adscita* n. sp. — grand. nat.
» 13. *Hydnophora crispata* n. sp. — » »
» 14. » » » — » »
» 15. » *scripta* n. sp. — » »
» 16. » » » — » »
» 17. *Calamophyllia dissita* n. sp. — » »
» 18. » » » — » »
» 19. » *compressa* n. sp. — 3 1
» 20. » » » — 2 1
» 21. *Montlivaultia oblita* n. sp. — grand. nat.
» 22. » » » — » »
» 23. » » » — » »

Tavola III.

Fig. 1. *Coenocyathus affinis* n. sp. — × 3
» 2. » » — × 4
» 3. » » — × 3
» 4. » sp. — × 2
» 5. *Ceratotrochus subrectus* n. sp. — × 2
» 6. » » — × 3
» 7. » » — × 2,5
» 8. *Caryophyllia revoluta* n. sp. — × 2
» 9. » » » — × 2
» 10. » *neglecta* n. sp. — × 2
» 11. » » » — × 2
» 12. » *inflata* Seg. — × 2
» 13. » » » — × 2
» 14. » » » — × 2
» 15. » » » — × 3
» 16. » *granulosa* n. sp. — × 2
» 17. » » » — × 2
» 18. » » » — × 2
» 19. *Paracyathus turonensis* E. H. — × 3
» 20. » » » — × 3
» 21. *Deltocyathus cylindricus* Michtti — × 3
» 22. » » » — × 3
» 23. *Trochocyathus subcristatus* E. H. — grand. nat.
» 24. » » » Sagoma del calice — » »
» 25. » » » — » »
» 26. *Flabellum majus* E. H. — » »
» 27. » » » Sagoma di un altro esemplare — » »
» 28. » » » Columella settale — × 4
» 29. » *siciliense* E. H. — grand. nat.
» 30. » » » Sagoma di un altro esemplare — » »
» 31. *Desmophyllum ambiguum* Michtti — × 2
» 32. » *simplex* Michtti — × 1,5
» 33. » *elatum* n. sp. — × 3
» 34. » » » — × 3
» 35. » » » — × 3

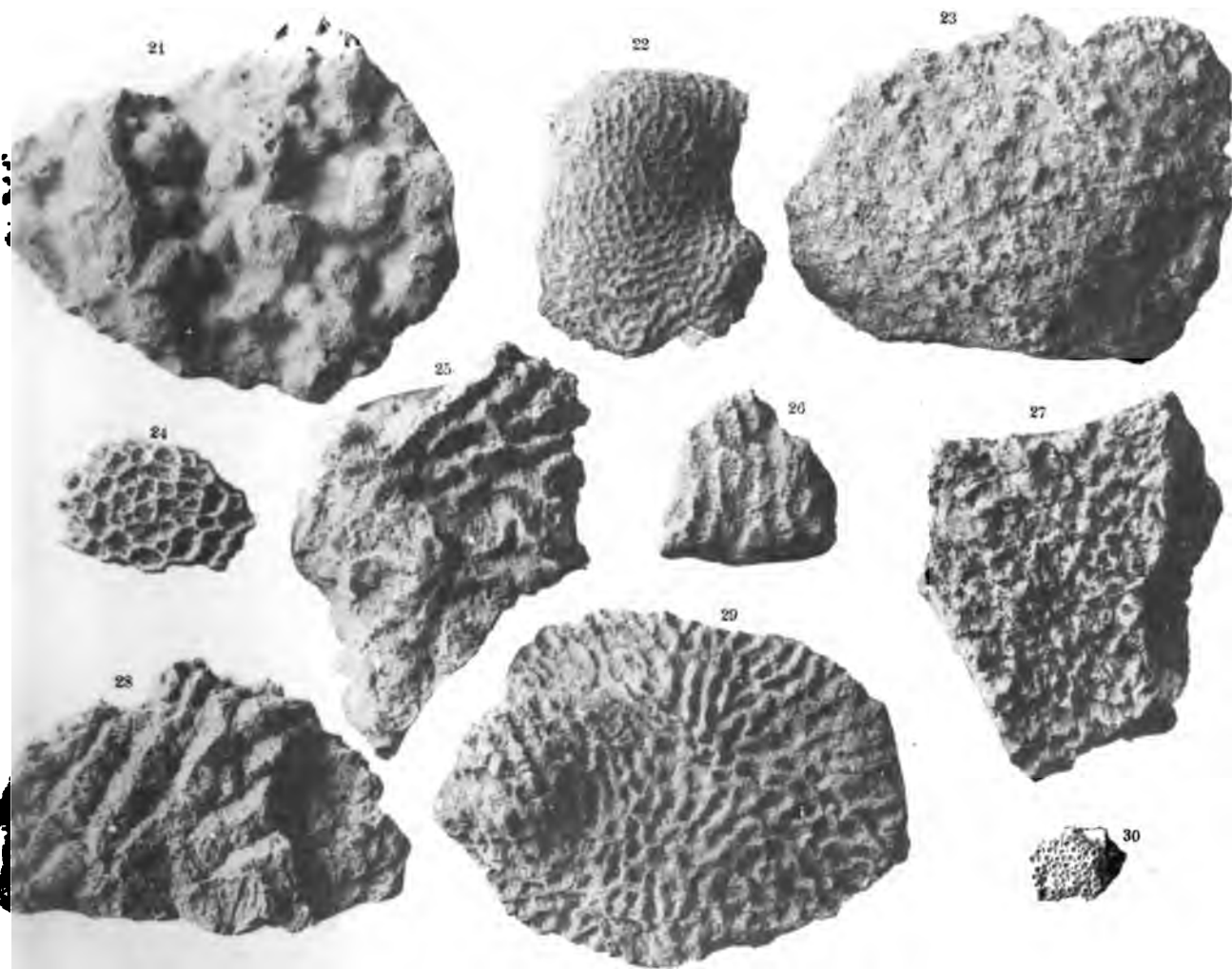
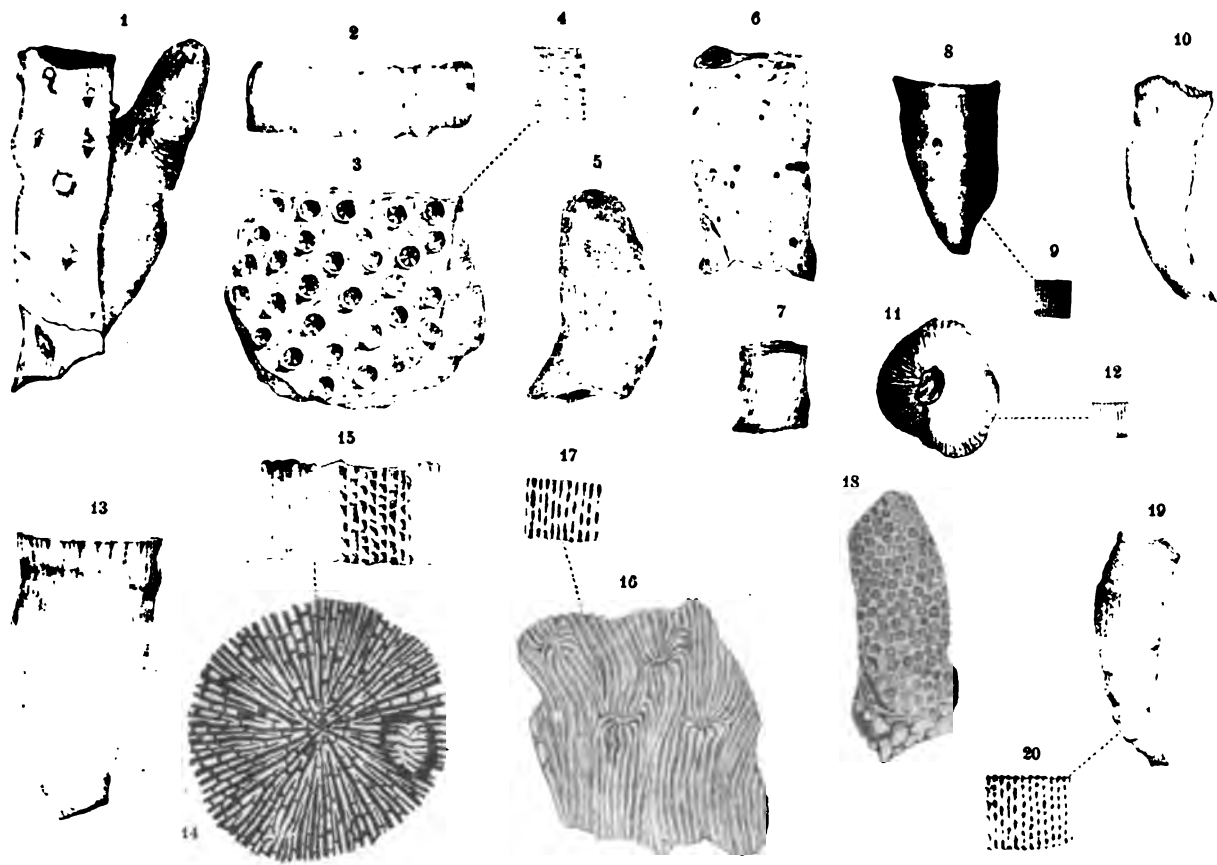
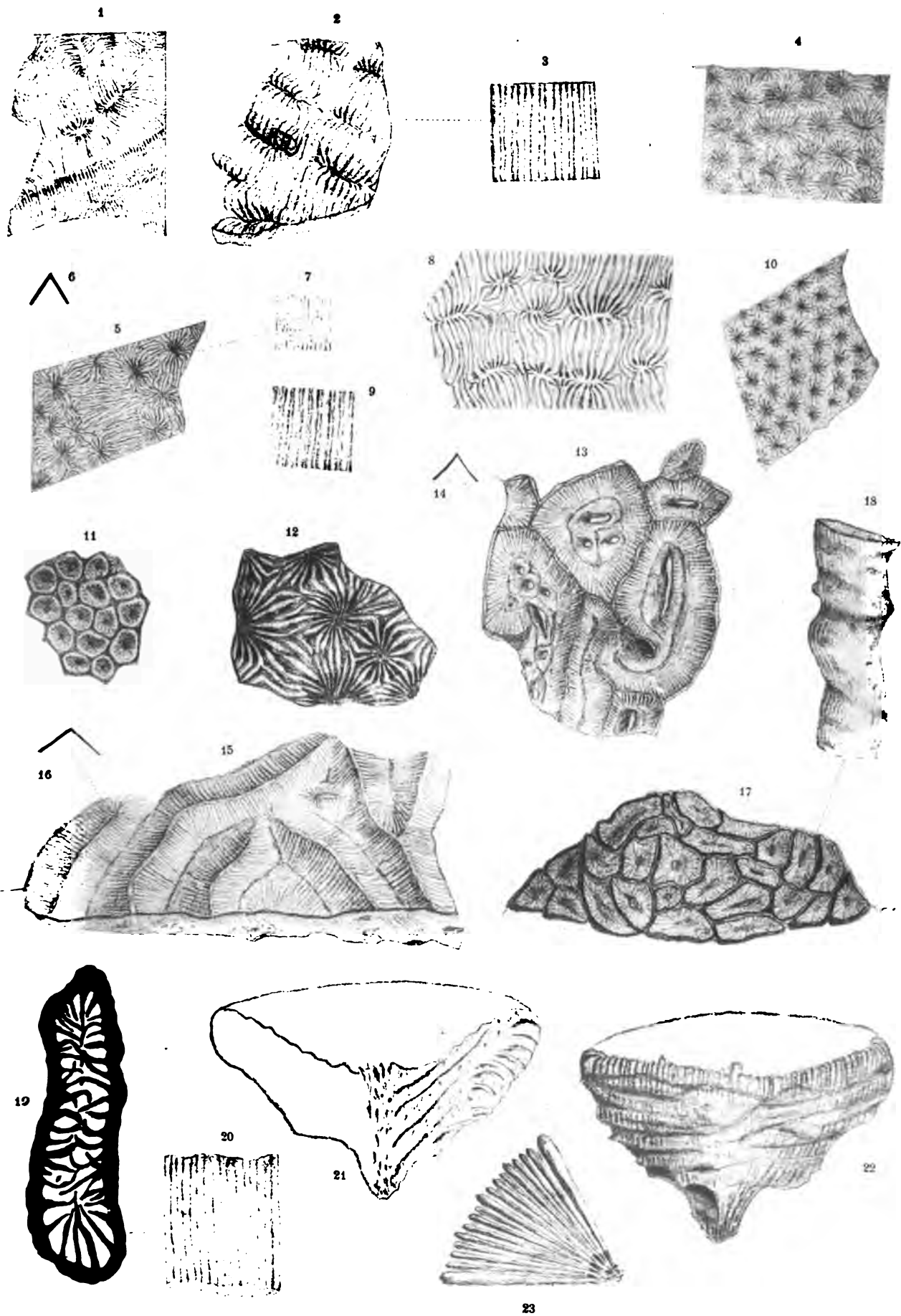
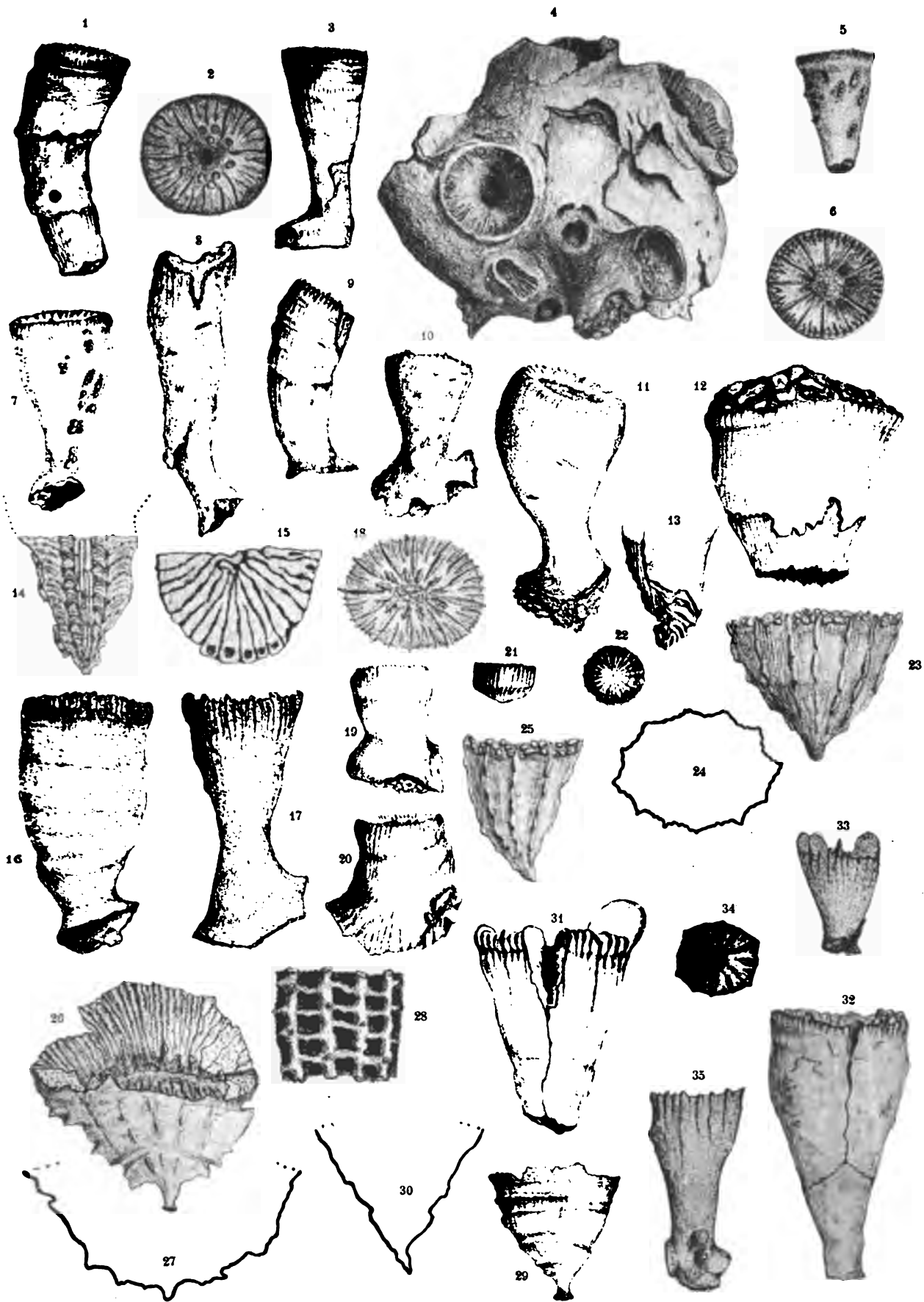
De Angelis disegnò p. p.

Roma Fototipia Danesi

. De Angelis disegnò

Roma Fototipia Danesi

G. De Angelis disegnò

Roma Fototipia Danesi

RELAZIONE

letta dal Socio FRANCESCO TODARO, a nome anche del Socio CAMILLO GOLGI relatore, nella seduta del 12 novembre 1893, sopra la Memoria presentata dal dott. R. COLELLA, intitolata: *Sulle fine alterazioni della corteccia cerebrale in alcune malattie mentali.*

« Incaricati di riferire intorno all'ammissibilità alla stampa, negli Atti dell'Accademia, della Memoria del sig. dott. R. Colella, avente per titolo: *Sulle fine alterazioni della corteccia cerebrale in alcune malattie mentali*, i Commissarii hanno preso in attento esame il lavoro ad essi trasmesso, e colla presente si pregiano di esporre riassuntivamente il loro giudizio:

« Il concetto direttivo generale del lavoro, viene dallo stesso autore espresso nelle prime righe del suo manoscritto: « ricercare nelle alterazioni degli organi l'intima natura dei fatti morbosi, quali si estrinsecano nelle parvenze cliniche ». — Se questo concetto ha omai valore di assioma per la grandissima maggioranza delle malattie, non altrettanto potrebbe dirsi riguardo alle così dette malattie mentali. — Rispetto a queste, siccome molti fra i tentativi fatti per dimostrare che ad esse pur corrisponde un substrato di alterazioni materiali, han dato risultato negativo, così in questi ultimi decennii ha potuto andar rafforzandosi l'opinione — favorita da taluni concetti filosofici — che esse rappresentino delle manifestazioni d'ordine puramente dinamico, se non del tutto spirituali, svolgentisi affatto indipendentemente dalle alterazioni della materia. Ed è noto come, in ordine con queste idee, alcuni autorevoli studiosi delle malattie mentali abbiano affermato: « che l'indirizzo anatomico in Psichiatria non ha apportato che disinganni ».

« Ora, se in realtà molti fra i tentativi sin qui fatti per rintracciare delle minute alterazioni corrispondenti agli squilibri psichici clinicamente caratterizzanti le malattie mentali, ebbero risultato negativo, è però da discutersi se ciò dipenda dalla *non esistenza* di minute alterazioni, e non piuttosto dalla imperfezione dei mezzi d'indagine sin qui adoperati per scoprirle.

« Come non ammettere che nella seconda fra queste due supposizioni siavi parte di vero, dal momento che i procedimenti sempre più delicati, che vanno applicandosi allo studio della normale organizzazione, fanno ogni giorno scoprire delle particolarità nuove? — Non è logico ammettere che altrettanto debba succedere per l'organizzazione patologica, se ad essa pur vorremo applicare i perfezionati metodi d'indagine?

« Queste sono le idee che hanno guidato il dott. Colella nelle ricerche sul sistema

nervoso centrale di alcuni alienati, da lui intraprese nel Laboratorio di Patologia gen. ed Istologia dell'Università di Pavia.

« Il metodo del quale egli più particolarmente si è giovato per scoprire delle minute alterazioni per avventura sin qui sfuggite all'attenzione dei ricercatori, è quello della colorazione nera degli elementi del tessuto nervoso. Le difficoltà che l'autore doveva superare non erano lievi, nè scarse. Ora non è certo a supporsi che, date queste difficoltà, i risultati siano tali senz'altro da poter riempire le deplorate lacune; — trattasi ad ogni modo di una serie di minute particolarità morfologiche, che il dott. Colella illustra coll'indispensabile corredo di figure, le quali particolarità in quanto rappresentano deviazioni dallo stato normale, assumono significato di alterazioni patologiche.

« Queste alterazioni includono un importante contributo allo studio dell'istologia patologica del sistema nervoso centrale, in alcune forme cliniche che figurano nel quadro delle malattie mentali, e però la Commissione non esita a proporre che la Memoria del dott. Colella venga stampata in esteso negli Atti dell'Accademia ».

Sulle fine alterazioni della corteccia cerebrale in alcune malattie mentali [1].

Memoria del dott. ROSOLINO COLELLA.

(Con quattro tavole).

I.

INTRODUZIONE

Mentre è tra le principali aspirazioni della Patologia, ricercare nelle alterazioni degli organi la intima natura dei fatti morbosi; mentre la storia delle differenti forme di afasia e i più svariati esperimenti operati dalla malattia sul cervello umano, ci hanno appreso la dipendenza di particolari funzioni psichiche da lesioni corticali a focolaio; mentre i reperti anatomici degli stessi ammalati di mente rivelano, in molti casi, alterazioni cerebrali organiche, mal si comprende la frase audace, « che, cioè, l'indirizzo anatomico in Psichiatria, non ha finora apportato che disinganni ».

È vero che siamo ancora lungi dal possedere un chiaro e profondo concetto genetico delle alterazioni mentali, e che per ciò il cómpito attuale della psichiatria è necessariamente limitato nel campo psico-fisico. Questo non giustifica pertanto che noi non si debba indefessamente adoperarci di approfondirlo ancora nel campo dell'anatomia patologica, che, secondo ogni apparenza, sarà nelle future ricerche tra i più vasti e più fecondi. Poichè se esiste, come è dimostrato, un rapporto tra azione nervosa e funzione psichica, lo ammettere la esistenza di una qualche affezione cerebrale, ove l' attività psichica si presentò abnorme, è indiscutibile. — Però la intimità di tale rapporto, al punto da risalire dalle alterazioni costanti di struttura ad una conoscenza completa degli stati patologici delle più alte funzioni psichiche, è certamente molto più oscura, e sarà opera dell'avvenire. La valutazione adeguata di questi fenomeni avrà simultaneo fondamento sulle future conoscenze così anatomiche che fisiologiche, al cui fianco la psicologia sperimentale darà la norma, così per la loro giusta interpetrazione, come per la loro applicazione alla Clinica.

Che se i risultati degli studii anatomo-patologici, fino ad ora fragmentarii, non permettono una classificazione delle malattie mentali in base al reperto anatomico, ciò è massimamente dovuto alle difficoltà di ricerca intrinseche alla complicata organizzazione cerebrale; è dovuto alla inadeguata perfezione dei metodi di indagine, e alla grande difficoltà del controllo sperimentale sugli animali.

[1] Lavoro presentato da J.-M. Charcot a *l'Académie des sciences de l'Institut de France* (seduta del 20 febbraio 1893); comunicato e dimostrato dall'autore alla Società Medico-chirurgica di Pavia (11 giugno '92), e al Congresso medico internazionale di Roma (2 aprile '94).

Nello stato attuale delle conoscenze pertanto, fino a che la indagine scientifica non abbia fornite le prove incontestabili per negarne la esistenza, è necessario ammettere che vi ha malattie psichiche dipendenti essenzialmente da alterazioni funzionali. — Però il progressivo diminuire di queste forme morbose puramente funzionali, di cui la Neuropatologia fornisce l'esempio più palpitante, e le meravigliose scoperte di nuovi metodi d'indagine fatte dalla chimica microscopica, aprono nuovi orizzonti.

Convinto pertanto che nella perfezione dei nuovi metodi di ricerca sia ancora racchiusa la chiave per la soluzione di molti fra i quesiti che altamente interessano la fisio-patologia delle malattie mentali, per muovere i primi passi su questo campo di studii, mi provai a tentare nuove vie e applicare nuovi metodi di indagine, corrispondenti alla complicata struttura degli organi centrali del sistema nervoso, e al loro elevato e complessivo lavoro, che si assume nelle funzioni psichiche.

E poichè risalire, dai sintomi psichici, alle loro basi anatomo-patologiche e alle cause dell'intero processo morboso, deve essere la mèta alla quale, con alacrità sempre maggiore, devono indirizzare i loro sforzi i cultori della Psichiatria, credo non privo d'interesse il contributo nuovo di osservazioni messe in rilievo in alcune forme di malattie mentali, mediante metodi di indagine che già segnarono un'êra nuova nello studio della fina anatomia del sistema nervoso: dico i metodi al nitrato d'argento scoperti da Golgi.

Queste reazioni mi presentarono la struttura degli organi nervosi centrali, sotto un punto di vista affatto nuovo. Per la finezza e precisione di molti dei risultati, essi lasciano da sè a grande distanza tutti gli altri metodi che vennero dai ricercatori adoperati in questo campo di studii. — Se non che tale sorprendente novità di immagini anatomiche e di conoscenze, che esige una tecnica istologica e una maniera di studio dei preparati tutto affatto speciale, non è meraviglia, dirò anzi che è logico e vantaggioso alla scienza, che desti ancora nel quasi vergine campo dell'anatomia patologica, una certa riservatezza [1]-[2], e ancora denegazioni o diffidenze, al pari di quelle che per più di tre lustri accompagnarono la grande opera rinnovatrice di Golgi e dei suoi scolari.

(1) Zum Schlusse dieses Abschnittes habe ich der Vollständigkeit halber noch kurz auf die Golgi'sche Methode hinzuweisen. So werthvoll diese Methode für die Erforschung der Axencylinder und protoplasmatischen Fortsätze (« Dendriten ») geworden ist, so wenig sind bis jetzt durch sie praktische Ergebnisse bezüglich des Untergangs der zelligen Elemente bei der Paralyse erzielt worden. Ich verweise in dieser Beziehung auf die Untersuchungen von Greppin (*Beitrag zur Golgi'schen Färbungsmethode der nervösen Central-organe.* - Archiv f. Psychiatrie. Bd. XX). Meine eigenen Erfahrungen können nur zur Bestätigung seiner negativen Ergebnisse dienen, doch muss darauf hingewiesen werden, dass vor Kurzem durch Colella (*Sur les altérations histologiques de l'écorce cérébrale dans quelques maladies mentales.* - Comptes rendus, 1893, N. 8), welcher unter Charcot gearbeitet hat, Untersuchungen an pathologischen Gehirnen veröffentlicht worden sind, welche mittelst der Golgi'schen Methode sehr auffallende Ergebnisse gebracht haben. Da dieselben, falls sie weiterhin bestätigt werden, eine weittragende Förderung unserer Erkenntniss bedingen, so will ich sie hier noch anreihen ..... (O. Binswanger. — *Die pathologische Histologie der Grosshirnrinden- Erkrankung bei der allgemeinen progressiven Paralyse* etc. — Jena, 1893).

(2) Greppin. — Archiv f. Psychiatrie u. Nervenkrankheiten, Bd. XX, 1889. — Id., Archiv f. Anat. u. Physiol. Anat. Abth. 1889.

Basta però considerare da una parte che per la chiara dimostrazione così degli intimi dettagli riguardanti la forma, rapporti e misura di distribuzione delle cellule nevrogliche, come delle più minute particolarità relative agli elementi gangliari, e al contegno delle più fine e periferiche ramificazioni dei prolungamenti, sia protoplasmatici che nervosi, è necessario ricorrere alla colorazione al cromato d'argento. Basta considerare l'alacrità febbrile con cui procedettero gli studii istologici sui centri nervosi, istituiti da Golgi, e la ricca messe di fatti nuovi posti in evidenza, i quali sono di un interesse straordinario per ciò che riguarda l'anatomia e la fisiologia di questi organi. E, d'altra parte, basta riflettere che, rispetto all'applicazione della reazione nera all'anatomia patologica degli organi nervosi centrali, salvo i primi tentativi di Golgi (1), di Giacomini (2) e di Kronthal (3), la letteratura scientifica è misteriosamente muta, per avere pieno convincimento degli importanti risultati che l'applicazione di questi metodi d'indagine è destinata ad apportare ancora nella storia patologica delle conoscenze sul sistema nervoso.

II.

Materiale di studio.

Oggetto dei nostri studii furono diversi infermi affetti da demenza paralitica, psicosi alcoolica, frenosi senile, demenza consecutiva, pazzia epilettica, idiozia, cretinesimo, delirio acuto. — Le osservazioni riferite in questa prima Comunicazione riguardano la demenza paralitica e la psicosi alcoolica.

L' esame istologico fu praticato sopra le seguenti parti del mantello cerebrale:

1° Lobo frontale
  Circonvoluzione frontale superiore
  » frontale media
  » frontale inferiore

2° Lobo temporo-sfenoidale
  Circonvoluzione temporale superiore
  » temporale media

3° Insula di Reil

4° Regione rolandica
  Circonvoluzione frontale ascendente
  » parietale ascendente

5° Lobo parietale
  Circonvoluzione parietale superiore
  » parietale inferiore

6° Lobo occipitale
  Circonvoluzione occipitale superiore
  » occipitale media.

(1) Rivista Clinica di Bologna. Anno IV, 1874.
(2) Arch. di Psichiatria e Scienze Penali. Vol. VI, 1885.
(3) Neurologisches Centralblatt. N. 14, 1887.

Inoltre, in rapporto ai fatti desunti dalla osservazione clinica, avemmo speciale riguardo nello studio di quelle zone corticali che sono ritenute quali centri di maggiore intensità funzionale sensitivo-motrice. E speciale riguardo avemmo del pari nell'esame di quelle aree della corteccia cerebrale, le quali, in rapporto alla progressiva differenziazione dei fattori elementari del linguaggio, rappresentano un'analoga progressiva differenziazione di zone corticali, nei confini di quelle stesse che si considerano come centri corticali della funzione generale, di cui l'elementare fattore del linguaggio, sensorio o motorio, è non altro che una specializzazione.

Metodo di ricerca.

I metodi di indagine più particolarmente adoperati nelle mie ricerche, furono quelli scoperti da Golgi, segnatamente mercè l'azione combinata del bicromato di potassa, o delle miscele osmio-bicromiche, e del nitrato d'argento.

Quantunque, come dissi, questi metodi mi presentassero sotto un punto di vista nuovo la struttura degli organi centrali del sistema nervoso, e quantunque per la finezza e precisione di molti dei risultati, essi lascino da sè a grande distanza tutti gli altri che vennero dai ricercatori adoperati in questo campo di studii, pure non tralasciai di usare i comuni metodi di colorazione (ematossilina e carminio, picrocarminio, ematossilina Weigert, ematossilina eosinica ecc.).

Di questi però io non intendo di occuparmi in modo speciale, sia perchè essi nessun contributo di fatti nuovi apportano al quesito che è argomento dei nostri studii, sia ancora perchè le particolarità esposte in questo lavoro quasi unicamente furono messe in rilievo applicando le nuove reazioni trovate da Golgi.

L'encefalo intero, 24-30 ore dopo la morte, veniva immerso in abbondante liquido di Müller, di frequente sostituito da altrettanto liquido puro alla stessa concentrazione. Il materiale scientifico avuto la più parte dalla Clinica psichiatrica di Napoli e dal Manicomio di Voghera, (di cui rendo grazie ai chiarissimi professori Bianchi e Raggi), non mi consentì attuare fin dal primo tempo, in queste prime ricerche, alcuni importanti dettagli di tecnica, quali il graduale aumento nella concentrazione del liquido fissatore, la iniziale suddivisione in piccoli pezzi, le iniezioni endo-cerebrali di bicromato di potassa al 2 $^1/_2$ $^0/_0$. Non ebbi mai materiale anatomico prima di 24 ore dalla morte.

Suddivisi consecutivamente le diverse parti dell'encefalo in piccoli pezzi di un mezzo a un centimetro cubo, alcuni dal liquido di Müller venivano conservati in soluzione di bicromato, di cui si aumentava gradatamente la concentrazione dal 2 al 3-4-5 $^0/_0$, altri erano trasportati in una miscela di

bicromato potassico al 5 $^0/_0$, parti 3,
acido iperosmico all'1 $^0/_0$, » 1.

Il passaggio dalla soluzione di bicromato in quella osmio-bicromica compivasi in modo successivo e frazionato dal 3° fino al 30° giorno d'immersione, ponendo durante tutto questo periodo, a 2, 3, 4 giorni di distanza, alcuni pezzettini nella miscela osmio-bicromica. Si hanno per tal modo altrettante serie secondarie di pezzetti i quali, frazionatamente trasportati poi nella soluzione di nitrato d'argento, forniscono

con sicurezza dei preparati con tutte le successive gradazioni e combinazioni di reazione, e con una sorprendente finezza di risultati.

E necessario pertanto che la miscela osmio-bicromica sia piuttosto abbondante e limpida e i pezzi pochi, e che si sostituisca con altrettanto liquido puro alla stessa concentrazione, ove le emanazioni osmiche, fiutando la miscela, non siano più sensibili.

Dopo 3 o 4 giorni di dimora nella soluzione osmio-bicromica, fino all'8° o 10° giorno, si compie il secondo passaggio ancora in modo successivo e frazionato (2 o 3 per volta) direttamente in una soluzione di nitrato d'argento all'1 %, la quale devesi cambiare dopo circa mezz'ora, per il precipitato che si forma. In quest'ultima soluzione è necessario che i pezzi stessi restino per 24 o 48 ore almeno, però anche un soggiorno quivi indeterminato dei pezzi, per più giorni, per settimane ed anche per mesi, non è in alcun modo dannoso; che anzi è questo un mezzo conveniente per la conservazione di quel materiale anatomico che deve servire per uno speciale studio da farsi con comodo.

Trascorso il tempo innanzi indicato si può cominciare ad esaminare i pezzi praticandone delle sezioni. Mediante alcune sezioni di saggio, fatte a mano libera ed esaminate al microscopio nello stesso liquido che ha servito per la reazione, verificato nei singoli frammenti che la colorazione nera dei diversi elementi del tessuto nervoso è avvenuta in guisa che il pezzo merita di essere conservato per uno studio successivo, si fissa direttamente con della colla sul sughero, e si praticano al microtomo (previa immersione del pezzo in alcool comune per poche ore) sezioni di diverso spessore. Queste conviene sieno piuttosto spesse, onde poter osservare per lungo tratto il modo di comportarsi e le particolarità segnatamente dei prolungamenti nervosi e protoplasmatici.

Per il trattamento successivo (disidratazione, diafanizzazione e chiusura delle sezioni), mi sono solo in qualche punto allontanato dalle norme suggerite da chi ne propose l'applicazione. Speciale norma pertanto è un accuratissimo lavaggio dei tagli per 4-6 volte in alcool assoluto, che toglie al tessuto ogni traccia di nitrato d'argento, ove si desideri una conservazione nitida del preparato per lungo tempo.

Dall'alcool assoluto si passano direttamente in una miscela a parti eguali di olio essenziale di trementina e di olio di garofani, previamente filtrata, per evitare l'intorbitamento che d'ordinario si manifesta dalla miscela di queste due sostanze. Quivi le sezioni si lasciano fino a che abbiano acquistato una evidente trasparenza, e poi si lavano ripetute volte nell'essenza di trementina, lasciandovele per 15-20 minuti, e ancora per qualche giorno. — Il passaggio nella miscela di trementina e olio di garofani, non solo influisce a che il rischiaramento sia più rapido e completo, ma impedisce ancora il raggrinzamento dei tagli che si avvera costantemente usando la sola essenza di trementina, e che costituisce un vero inconveniente per la montatura dei preparati (senza il coprioggetto che meccanicamente li distenda) e per il loro studio consecutivo. Il finale allestimento dei preparati microscopici (chiusura in resina Dammar e in uno speciale sistema di portoggetti che permette di esaminare le sezioni da ambedue le superficie) fu eseguito secondo le norme suggerite da Golgi.

È bene pertanto che i preparati sieno montati e conservati allo scoperto (senza vetrino coproggetti) entro uno straticello di vernice Dammar, sciolta in trementina, e mista a parti eguali con olio di legno di cedro.

distanza, onde studiare nelle diverse parti del sistema nervoso tutte le fasi della reazione, e avere del contegno istologico dei diversi elementi un concetto adeguato e completo.

La complessità dell'argomento e il campo nuovo della ricerca, mi costringono innanzi tutto a fermarmi su i fatti, limitandomi, per ora, segnatamente alla presentazione delle figure ed alla illustrazione delle principali note isto-patologiche esistenti nei diversi elementi del tessuto nervoso, rappresentati nelle tavole con scrupolosa esattezza. Non una delle particolarità esposte nel lavoro esiste, che non sia stata argomento di minuta indagine e del più diligente *studio comparativo, rispetto ad una serie di preparati di circonvoluzioni cerebrali normali*, tagliati nella stessa regione e presso che allo stesso livello, e sottoposti ad uno stesso trattamento; non un dettaglio fu messo in rilievo, che io non sia in grado di dimostrare su preparati microscopici, con quella chiarezza che emana dalla bontà del metodo.

Noi non diremo niente altro circa il metodo di ricerca che abbiamo seguito. Aggiungeremo solo, per coloro che volessero controllare ed estendere la indagine, che questi risultati sono stati ottenuti solo dopo molte prove e dopo un tirocinio lungo così del metodo, come della maniera di studiare i preparati, e che nella descrizione classica della tecnica, data da Golgi (1) in modo assai dettagliato e preciso, si ritrova, forse senz'altro indirizzo, il modo di rispondere al primo nostro desiderio, cioè quello di indicare il mezzo come controllare i fatti esposti nel presente lavoro (2).

(1) *Sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso.* — Rivista di Freniatria ecc. 1882-85.

(2) Parmi interessante segnalare, a questo punto, una nuova particolarità trovata da Golgi e da me applicata in una serie di studii, segnatamente sul mantello cerebellare, fatti negli Istituti di Charcot e di Hitzig; particolarità che completa il metodo da lui scoperto, e che credo non sia stata resa ancora di pubblica conoscenza. — È noto come la durata della immersione necessaria perchè i pezzi acquistino quella speciale qualità d'indurimento, che meglio si presta ad ottenere, con la successiva immersione nella soluzione di nitrato d'argento, una reazione fina e diffusa sui diversi elementi del tessuto nervoso, varia a seconda di circostanze diverse, segnatamente di quella dipendente dalla temperatura dell'ambiente. Tale variabilità pertanto nella durata della immersione ha un limite minimo e un limite massimo (da 15 a 50 giorni nella stagione calda, da 1 a 4 mesi nella stagione fredda); al di là di questi estremi la reazione argentica non ha luogo.

Ad uno studio ancora più immediato dei pezzi anatomici, già Golgi stesso provvide mercè il così detto *metodo rapido* (azione successiva delle miscele osmio-bicromiche e del nitrato d'argento). Rimanevano però ancora materiale inutile i pezzi che fossero rimasti nella soluzione di bicromato oltre 2 mesi nella stagione calda, e oltre 4 mesi nella stagione fredda. La modificazione consiste in un *ringiovanimento* dei pezzi, i quali troppo lungo tempo erano rimasti nella soluzione di bicromato o nella miscela osmio-bicromica, sì da non poterne ottenere alcuna reazione. L'uso di una soluzione mezzo satura di acetato neutro di rame e successivamente quello del bicromato di potassio e del nitrato d'argento, colma adunque questa lacuna; tale soluzione cuprica potrebbe chiamarsi, a così dire, *liquido neutralizzante*. — Da pezzi di tessuto nervoso rimasti per più mesi, e più anni nella soluzione di bicromato o osmio-bicromica, o nel liquido di Müller (dai quali non fu possibile ottenere nessuna traccia di colorazione nera) si mette in evidenza una reazione fina e diffusa dei diversi elementi, laddove si immergano per 3-6 giorni in una soluzione mezzo satura di acetato neutro di rame, si trasportino consecutivamente per altrettanti giorni, e più ancora, nella miscela osmio-bicromica o in una soluzione di bicromato potassico al 3-5 %, e si immergano in fine nella soluzione di nitrato d'argento all'1 %.

Nell'istante in cui i pezzetti vengono passati dal bicromato o dalla miscela osmio-bicromica nella soluzione di acetato neutro di rame, in quest'ultimo accade un precipitato giallo più o meno

III.

Demenza paralitica.

Osservazione 1ª (*Clinica psichiatrica di Napoli*).

Mai..... Ferdinando, cocchiere, da Napoli, ammogliato due volte, ha 52 anni. La malattia esordì nel luglio 1890 con un incalzante e grave delirio di grandezza, sorto quasi istantaneamente. Abuso di Venere. Infezione sifilitica.

Stazione verticale incerta; la incertezza aumenta bendando gli occhi. Cammino quasi impossibile per grave incoordinazione motrice.

Forza muscolare diminuita, così nelle estremità superiori come nelle inferiori; i muscoli assottigliati, atrofici, paretici. Tremore nella lingua, labbra, muscoli della faccia, e specialmente agli arti superiori.

Sensibilità tattile relativamente conservata a sinistra, diminuita a destra. Visibile ritardo a destra nella trasmissione degli stimoli tattili e dolorifici. Quasi perduta la nozione della posizione degli arti.

Riflessi cutanei indeboliti; il riflesso rotuleo, vivace per lo innanzi, ora è quasi spento in entrambi i lati. Abbastanza conservata pertanto la eccitabilità diretta muscolare.

Lieve strabismo interno dell'occhio sinistro, assoluta immobilità dell'iride; anormale strettezza e disuguaglianza pupillare. Sensibilità visiva scarsa. Ipo-cofosi più marcata a destra.

Forte disturbo disartrico della parola. Voce roca.

Ateromasia dell'aorta; decorso serpentino delle arterie temporali.

Progressivo e rapido indebolimento così delle funzioni nervose, come delle attività mentali, in mezzo a cui assai contrasta l'esagerato sentimento di sè. — Allucinazioni interne a colorito ipocondriaco. Idee deliranti persecutorie e talvolta ipocondriache. Estrema povertà della memoria e nel contenuto ideativo.

---

abbondante: i pezzi devono rimanervi fino a che non si ottiene più nessun precipitato (3-6 giorni). È assai probabile che la soluzione cuprica neutralizzi la iperazione della soluzione bicromica.

Oltre a ciò una soluzione di bicromato di potassio, mista a parti eguali con una soluzione mezzo satura di acetato neutro di rame, costituisce una miscela che può servire come *liquido d'immobilizzazione*. I pezzi di tessuto nervoso fresco quivi direttamente immersi rimangono, a così dire, sotto mano sia per uno studio più o meno immediato, sia per uno studio successivo, per un periodo di tempo lunghissimo. La colorazione nera si ottiene trattando i pezzi successivamente o con il bicromato di potassa e il nitrato d'argento, ovvero con una miscela osmio-bicromica e il nitrato d'argento. Questo liquido cupro-bicromico d'immobilizzazione fornisce eccellenti risultati, non solo nello studio degli organi centrali del sistema nervoso, ma ancora per quello dei nervi periferici viscerali (plesso nervoso dell'intestino e del rene, reticolo della milza, nervi della tiroide e del testicolo ecc.).

Aggiungerei, per ultimo, la nozione di un artifizio che mi permise, nei preparati alla reazione argentica segnatamente del mantello cerebellare, di mettere in evidenza così gli elementi del corpo cellulare, come le più fine particolarità di struttura sia del corpo protoplasmatico che del nucleo e nucleolo delle cellule gangliari, qualora i risultati, non ancora costanti, non mi consigliassero a ulteriore studio.

Negli ultimi tempi di degenza nel Manicomio è ancora più depresso e debole in tutti i movimenti. Incalzante delirio di grandezza. Lieve decubito sui trocanteri. Nutrizione scaduta.

Sopravvenienza di attacchi epilettiformi generalizzati; abolizione completa della coscienza e coma. — Temperatura rettale 39°, 4. — Morte.

Autopsia. (Prof. Armanni). — 13 novembre 1891; 28 ore dopo la morte. — Regolare sviluppo scheletrico, notevole dimagramento, lieve decubito sui trocanteri.

Iperostosi cranica. Leggiero inspessimento della dura-madre, specialmente verso la volta. Intorbidamento della pia-meninge nelle regioni rolandiche, dove si osserva, lungo il corso dei vasi, una mediocre quantità di essudato gelatinoso. Il cervello, nel complesso, non appare diminuito di volume; le arterie della base alquanto indurite. Le meningi si distaccano abbastanza facilmente; appena in qualche punto aderiscono alla corteccia. Nulla di notevole ai molti tagli fatti d'avanti in dietro sui due emisferi, meno una viva congestione, per cui la sostanza grigia come la bianca mostransi disseminate di numerosi punti rossi, ellissoidali, dei quali alcuni restano beanti e dànno un po' di sangue. La congestione è quasi uniforme dalla estremità del lobo frontale all'inizio del lobo occipitale, in corrispondenza del quale il vivo colorito carneo della sostanza bianca della regione parietale diventa assai più pallido. Non vi ha differenza di rilievo fra i due emisferi; a sinistra pertanto la congestione appare più notevole.

Degno di nota in fine è, nello stesso emisfero sinistro, una lieve diminuzione di consistenza della parte anteriore delle circonvoluzioni dell'*insula*, la quale diffondesi per breve tratto sulla estremità del lobo temporale. Il resto del cervello non appare alterato nella sua consistenza esterna.

I ventricoli laterali molto dilatati e ripieni di liquido leggermente tinto di sangue; l'ependima alquanto inspessito. Nel cervelletto la pia-madre è inspessita nella sua faccia inferiore. Il ponte appare alquanto più piccolo a sinistra che a destra. La midolla allungata molto assottigliata; alla superficie di taglio non si riconosce l'ordinario disegno.

Le meningi spinali e la midolla anemiche; nella midolla non si ravvisa, ad occhio nudo, alterazione di rilievo.

Nel cavo pericardico vi è una raccolta di liquido giallo-cedrino, in quantità di circa 50 grammi. Il cuore è leggermente aumentato di volume, segnatamente da parte del ventricolo sinistro; al taglio si mostra affetto da ipertrofia semplice. Le semi-lunari aortiche sono in buona parte calcificate, ma non molto retratte; la superficie interna dell'aorta è scabra e sparsa di granuli ateromatosi.

Il pulmone destro appare anemico e alquanto avvizzito nei due lobi superiori. Il lobo inferiore è in parte edematoso, e per la più parte occupato da un infarto sanguigno. Identiche condizioni nel lobo inferiore del pulmone sinistro; vi predomina però il trasudamento sieroso. Del pari edematoso mostrasi il lobo superiore sinistro.

Il fegato è fortemente iniettato per iperemia da stasi.

Il rene sinistro presenta, alla parte superiore esterna, una cisti della grandezza

di una grossa noce, la quale occupa tutta la spessezza della sostanza corticale. Nulla di notevole nel resto dei reni.

Normale la vescica urinaria, che contiene scarsa quantità di urina.

Esame istologico.

Il risultato dell' esame istologico fu rilevato specialmente sulle circonvoluzioni fronto-parietali e sull'*insula di Reil*, nelle quali le alterazioni si presentavano più evidenti.

Il fatto che a tutta prima sorprende è la parziale mancanza o il manifestarsi incompleto e irregolare della reazione nera, variamente esteso sulla superficie di taglio di alcune circonvoluzioni, mentre in altre circonvoluzioni, sia dello stesso soggetto sia di soggetti sani, indurite e colorate nello stesso tempo e per la stessa durata, la reazione si svolgeva nelle normali condizioni.

Le alterazioni involgono le cellule e le fibre nervose, la nevroglia e i vasi. Tutti gli strati della corteccia partecipano al processo isto-patologico che varia, sia comparando le diverse circonvoluzioni fra loro, sia nella stessa circonvoluzione comparando il processo morboso negli strati diversi.

1. Cellule nervose. — Così le grandi come le medie e le piccole cellule piramidali appaiono nel modo più diverso alterate. Lungi dal presentare la ordinaria loro forma piramidale, dai contorni nettamente disegnati sul fondo chiaro e trasparente dei preparati, sono in generale di aspetto assai grossolano, ove irregolarmente rigonfiate, ove ridotte nelle loro dimensioni; disseminate di sporgenze e di anfrattuosità, mostrano le apparenze più strane nel loro aspetto.

I corpi cellulari in molti elementi distinguonsi per la loro forma perfettamente rotondeggiante o ovalare. A tutta prima hanno l'aspetto di grosse gocciole di grasso, le quali fossero state colorate in nero; se non che dal corpo cellulare di ciascuna di esse emanano scarsi e brevi prolungamenti, e tutta la cellula assume una configurazione vescicolare, che ci apprende come essa abbia subìto un reale rigonfiamento, e che ne ricorda assai da vicino il rigonfiamento idropico delle cellule ganglionari della corteccia, segnalato da Meynert (¹) nella demenza paralitica (Fig. 1).

Talvolta notasi un profondo strozzamento nel mezzo del corpo cellulare, che tende quasi a bipartirlo. Lo strozzamento o è unilaterale o è circolarmente concentrico; i due segmenti rimangono per tal guisa longitudinalmente riuniti da un piccolo ponte, e la cellula assume una configurazione a bisaccia, analogamente a ciò che nella paralisi progressiva ha descritto Selvili (²) (Fig. 2). Da entrambi i segmenti cellulari si dipartono prolungamenti assottigliati e lunghi.

A una modificazione di questo tipo può ascriversi l'altra forma che di frequente si riscontra, ove il corpo della cellula, circolarmente strozzato in prossimità della sua base, pare tenda a trasportarsi verso l' apice delle forme piramidali, per modo che l'elemento assume una configurazione irregolarmente fusata (Fig. 3).

(¹) Viertel jahreschrift für Psychiatrie, Heft III, 1868.

(²) *Zur path. Anatomie der Dementia paralytica*, In.-Diss. Zürich, 1876.

A parte queste profonde insenature, il contorno della cellula, in ciascuno dei tipi innanzi descritti, è d'ordinario regolare e nettamente disegnato.

Altri elementi, meno frequenti del resto, si distinguono per un anormale assottigliamento e configurazione del corpo cellulare, oppure per un rimpiccolimento in tutti i loro diametri, sì da ricordare le forme atrofiche delle cellule ganglionari della corteccia. E l'atrofia del corpo cellulare talvolta è così avanzata, e così pronunziate e molteplici sono le sporgenze e le anfrattuosità dei contorni, da rappresentare figure bizzarre e avanzi informi di elementi ganglionari (Fig. 4).

A questo totale impiccolimento del corpo cellulare, qua e là non si accompagnano le multiformi irregolorità dei contorni (Fig. 5). Se non che in tali cellule, mentre i prolungamenti protoplasmatici emananti dall' apice e dalla loro superficie laterale si spingono talvolta, quasi fino nello strato sottomeningeo, mancano del tutto quegli altri prolungamenti, che in preparati di circonvoluzioni normali si dipartono in gran numero dagli angoli e dal lato basale. Per tale particolarità queste cellule assumono l'aspetto di angusti corpi ovalari, uniformi, leggermente ondulati nel contorno, che con sottili rami si prolungano verso lo strato sottomeningeo (Fig. 6). — Le forme cellulari innanzi descritte pare prevalgano nelle circonvoluzioni dell'*insula;* esse si riscontrano pertanto anche in località in assai minor grado alterate (circonvoluzioni occipitali, temporo-sfenoidali).

In mezzo a queste aree, ove esistono le note delle più avanzate alterazioni del corpo cellulare, si rinvengono numerosi elementi ganglionari aventi la normale configurazione istologica. E quasi ad immediato contatto, o qua e là disseminate fra queste ultime, si trovano altre cellule nervose le quali, malgrado profonde alterazioni, alquanto più delle precedenti si avvicinano al tipo normale.

In queste ultime, in effetti, mentre il corpo cellulare conserva quasi costantemente la caratteristica sua configurazione piramidale, i contorni di esso sono irregolari, contorti, variamente erosi, e disseminati di sporgenze e di insenature in grado più o meno pronunziato.

Talvolta è solo il corpo della cellula che, deviante a uno dei lati, presenta, o sulle parti laterali o sul lato basale, una o più gibbosità di varia grandezza, senza che alterazione di rilievo sia visibile nella porzione assottigliata del vertice delle forme piramidali (Fig. 7). Tale altra volta è questa che, lungi dal rimanere regolarmente conica, fin dal punto in cui si diparte dalla porzione basale del corpo della cellula, presenta una serie di rigonfiamenti disposti lungo tutto il suo decorso. Tali rigonfiamenti, sferici o fusati, o involgono tutta la regione del vertice delle piramidi, per cui questa assume l'aspetto di altrettanti rosarii (Fig. 8), oppure in modo irregolare disseminati lungo uno solo dei lati del suo asse, seguonsi a varia distanza le diverse forme angolari, sferiche, fusate, sacciformi (Fig. 9). I prolungamenti dell'apice delle cellule piramidali, che ascendono verso lo strato sottomeningeo, sono assai rari, sottili, quasi costantemente cilindrici e regolari, e si dipartono di frequente da uno di questi rigonfiamenti.

Vi ha delle cellule, negli strati superficiale e medio della corteccia, che per nulla si differenziano dalle normali, se non per una costante irregolarità dei contorni (Fig. 10), o per una notevole scarsezza e brevità dei prolungamenti protoplasmatici,

emananti dagli angoli del lato basale e spesso anche dalla loro superficie laterale (Fig. 11).

Quivi pertanto tale irregolarità dei contorni, svolgendosi massimamente sul lato e sugli angoli basali del corpo cellulare, fa sì che questo perda talvolta la sua caratteristica configurazione a piramide, per assumere quella irregolarmente ovoidale, dai contorni bizzarramente dentellati e contorti. La porzione assottigliata del vertice delle forme piramidali non va esente da alterazione, e assume un aspetto irregolarmente moniliforme (Fig. 12).

Tali alterazioni morfologiche delle cellule ganglionari sono prevalenti negli strati medii e profondi della corteccia cerebrale, ove pare siano talvolta disseminate come a focolai. Esse ricordano assai da vicino alcuni dei molteplici reperti isto-patologici nella paralisi progressiva messi in rilievo da Lockart-Clarke, da Magnan, Tigges, Meynert, Lubimoff, da Westphal, Mierzejewski, da Voicin, da Mendel e da un numero rilevante di altri autori, onde credo sia ingiustificato trattenervisi da vantaggio.

E assai probabilmente, come le cellule della corteccia cerebrale di soggetti paralitici, alterate nella uniformità del loro contorno, disseminate di pigmento, disgregate nel loro nucleo, perdono di grado in grado, e infine del tutto, la proprietà di colorarsi al carminio, così forse questi o altri molteplici cangiamenti che tali cellule subiscono nella intima loro composizione chimica, fanno sì che alcune di esse non rimangano, in tali condizioni, penetrate e colorate dai reattivi, e la reazione al cromato d'argento sia incompleta o manchi. — Solo così possiamo renderci in qualche modo ragione della non riuscita o della riuscita incompleta della reazione nera, onde appare una certa diminuzione nel numero delle cellule ganglionari, mentre la colorazione argentica non veniva meno in pezzi di circonvoluzioni normali messe nelle identiche condizioni. E solo per tal modo è possibile forse renderci ragione così della riuscita della reazione meno felice nelle forme piramidali che non negli altri elementi cellulari della corteccia, come della notevole ineguaglianza nella distribuzione delle lesioni, per cui, nello stesso taglio, tra le cellule nelle quali le alterazioni sono al più alto grado e quelle rispettate dal processo isto-patologico, si riscontrano tutti gli stadii intermediarii.

In preparati pertanto, che subirono la sola azione del bicromato e del nitrato di argento, esaminati dopo 4-5 mesi, molti elementi gangliari, i quali non manifestarono la reazione àrgentica primitiva, subiscono una colorazione secondaria dal giallo-cedrino al mògano, la quale mette in evidenza degli elementi gangliari le più minute particolarità di tessitura.

Per tal modo mi fu possibile segnalare fasi di metamorfosi progressiva degli elementi nervosi e confermare il fatto constatato da Tigges [1], il primo, rispetto alla proliferazione dei nuclei in alcune cellule ganglionari nei paralitici.

L'altro fatto che, per tale secondaria colorazione, ebbi opportunità di constatare, si è che le cellule gangliari, in vicinanza dei vasi addimostranti migrazione sotto-adventiziale, sono circondate e come invase dagli elementi stravasati. Il nucleo si mostra

[1] *Pathologisch-anat. und physiol. Untersuchungen zur Dementia paralyt. progress.* — Algemeine Zeitschr. für Psych. Bd. 20, Heft. 4, p. 325.

come disgregato, e tutta la cellula appare ripiena di un pigmento bruno-giallastro; assai di rado riesce rinvenire cellule prive di nucleo.

Analoghe alterazioni regressive del protoplasma subiscono in secondo tempo i prolungamenti cellulari. E nello stesso modo come nei preparati al carminio è possibile talvolta osservare che i prolungamenti protoplasmatici sono i primi ad alterarsi, subendo una metamorfosi granulare, la stessa successione di fatti morbosi è messa in rilievo mercè la reazione nera, con una evidenza e precisione che non hanno riscontro con quanto potè sin qui essere ottenuto con altri metodi di preparazione, per quanto accuratamente applicati. Ed è messo in rilievo ad un tempo che il prolungamento nervoso si mostra in generale più resistente, e non è che solo in pochi elementi e solo più tardi distrutto.

I prolungamenti protoplasmatici sono diffusamente e in alto grado alterati, massime in corrispondenza degli strati medii e profondi della circonvoluzione frontale media e dell' *insula*. In numero di 3-5-8-10 e più emanati dagli angoli del lato basale, e spesso anche dalla superficie laterale delle cellule gangliari, nelle sezioni di pezzi di cervello normale trattati col processo della colorazione nera, si presentano cilindrici e regolari; già in prossimità della loro origine si ramificano dicotomicamente, e man mano che la suddivisione procede, subiscono un progressivo assottigliamento. Tale metodo ci permette di seguire i prolungamenti protoplasmatici fino a grandissima distanza dalla loro origine, e di vederli ramificati dicotomicamente fino a considerevole finezza.

Nella demenza paralitica per contrario questi prolungamenti, di rado di apparenza fisiologica, si mostrano o anormalmente scarsi o stranamente rigonfiati, tortuosi, assottigliati. Sono d'ordinario i prolungamenti che si dipartono dagli angoli del lato basale, quelli che si mostrano prevalentemente alterati; minori per frequenza e per grado appaiono in generale le alterazioni dei prolungamenti che emanano dalla superficie laterale e dall'apice delle forme piramidali (Fig. 13-14).

Talvolta fin dal punto stesso in cui si dipartono dal corpo cellulare, presentano una serie di rigonfiamenti disposti lungo il loro decorso (Fig. 15-16). Questi rigonfiamenti sono così accentuati, da apparire nel campo del microscopio anche a piccolo ingrandimento, e imprimono alle diramazioni protoplasmatiche l'aspetto di altrettanti rosarii (Fig. 17). Altra volta invece, emanati nella loro normale configurazione (Fig. 3-7-18), a diversa distanza dal corpo cellulare in vario grado si rigonfiano, o in modo eguale e fusato (Fig. 3-18), o in forme bernoccolute, cilindriche, sferiche ecc. (Fig. 8-9-13-14), dell'apparenza e della grandezza la più diversa.

Degno di speciale nota in fine è il fatto, da me assai di frequente rilevato, per cui le multiformi lesioni trovansi di molto più avanzate e diffuse nelle ramificazioni periferiche dei prolungamenti protoplasmatici, che non nei grossi tronchi e nel corpo cellulare, come se nel suo svolgimento la lesione si iniziasse nelle ultime ramificazioni protoplasmatiche, e da queste centripetamente procedesse verso i grossi tronchi e verso il corpo cellulare (Fig. 3-18-26-30).

E il prolungamento protoplasmatico principale, e più ancora i numerosi filamenti di 1°, 2° e 3° ordine che da esso emanano ad angolo acuto, e che riuniscono in serie contigue questi nodi fra loro, si presentano di frequente anormalmente tortuosi

e assottigliati, anche fin dalla prima origine dal corpo cellulare (Fig. 7-8). Altra volta pertanto l'apparenza di essi è normale, malgrado i diversi rigonfiamenti lungo il loro decorso (Fig. 3). — Questi rigonfiamenti non sono disposti lungo l'asse della diramazione protoplasmatica, secondo punti equidistanti o regolari. A varia distanza le une dalle altre, senza alcuna regola di forma o di successione, si inseguono fra loro le diverse formazioni sferiche, cilindriche, bernoccolute, fusate, riunite per i loro estremi dal sottile filamento protoplasmatico, il quale di sovente partecipa anch'esso al processo istopatologico.

Le numerose diramazioni di 1°, 2°, 3°, 4° ordine emananti dal prolungamento principale, non di rado si dipartono da uno di questi rigonfiamenti (Fig. 7-8); si originano però con pari frequenza da uno qualunque dei tratti inter-nodali (Fig. 14-15). Essi d'ordinario essenzialmente riproducono, nel loro aspetto e nel loro contegno, i caratteri del filamento di origine.

Quelli tra gli elementi che, per l'estrema esiguità del loro corpo, rappresentano probabilmente forme atrofiche delle cellule ganglionari, si distinguono massimamente per una mancanza completa, o quasi, dei prolungamenti basali, mentre persistono, anormalmente assottigliati, quelli che emanano dall' apice e dalla superficie laterale del corpo cellulare (Fig. 5-6).

Tale assottigliamento delle diramazioni protoplasmatiche fin dalla loro origine iniziale dal corpo della cellula, non si riscontra mai in sezioni di pezzi di cervello normale colorati al cromato d'argento. Nè questo reperto patologico dei prolungamenti ramificati accompagna solamente le forme di atrofia cellulare, o si circoscrive solo a quei rami che si dipartono dall'apice o dalla superficie laterale degli elementi gangliari. La Fig. 2 invece ci rappresenta uno di quei tipi di cellule a bisaccia non solo, ma essa ci apprende come, mentre scarsi sono i rami emanati dalla periferia della cellula, dagli angoli del lato basale del corpo cellulare bipartito, emanano dei rami sottilissimi fin dalla loro origine, i quali con decorso lungo e assai tortuoso si ramificano dicotomicamente in rami di 2° e di 3° ordine, conservando immutato il carattere filiforme del filamento di origine.

È superfluo, per non dire altro, ricordare qui che a tali reperti dei prolungamenti protoplasmatici devesi attribuire un significato decisamente patologico, e che la tumefazione iperplastica, in molti di essi segnalata, nessun riscontro ha con l'aspetto nodoso che le ramificazioni protoplasmatiche delle cellule gangliari possono talvolta presentare per reazione incompleta o per deposizione più o meno ampia di cristalli di cromato d'argento. La forma quasi costantemente cilindrica, sferica o fusata dei rigonfiamenti, e il contorno netto e ben delimitato che essi presentano; il rinvenirsi d'ordinario in elementi che già nel corpo cellulare rivelano le tracce di avanzate alterazioni; il trovarsi questi elementi bene spesso qua e là disseminati, in mezzo a gruppi di cellule gangliari aventi tutti i caratteri delle normali; il non riscontrare simili note nelle sezioni di pezzi di cervello normale indurite e colorate nello stesso tempo e per la stessa durata, ci conducono ad un giudizio, al cui riguardo nessun dubbio potrebbe essere lecitamente affacciato.

Il *prolungamento nervoso* si mostra in generale più resistente che non il corpo cellulare e i prolungamenti protoplasmatici (Fig. 14-16); esso non è che solo in

pochi elementi, e solo più tardi alterato. Sono pertanto assai notevoli, per la significazione fisiologica della parte interessata, le alterazioni che si osservano nel prolunmento funzionale.

Questo prolungamento, in condizioni normali, fin dalla sua origine può essere chiaramente distinto dagli altri, per l'aspetto regolare, la superficie liscia, per il modo di origine di decorrere, di ramificarsi. Spiccatosi esso nelle cellule gangliari di circonvoluzioni cerebrali sane, o direttamente dalla base delle forme piramidali, che costituiscono il tipo prevalente delle cellule medesime, ovvero dalla radice di uno dei grossi prolungamenti protoplasmatici emananti dalla superficie basale della cellula, dal punto di sua origine, fino a 15-20 micromillimetri di distanza, va dolcemente e regolarissimamente assottigliandosi, sotto forma di un lungo, sottile e regolare cono, fino a divenire esile filamento.

Tale modo di origine pertanto è raro nel caso patologico che è argomento del nostro studio. A parte la mancata reazione nera del prolungamento nervoso o la riuscita di essa in modo irregolare e incompleto, in rapporto con l'atrofia dei corrispondenti corpi cellulari, è degno di speciale rilievo l' aspetto filiforme che sovente esso assume fin dal punto di emanazione, aspetto che si conserva invariato per un tratto più o meno lungo, e di frequente per tutto il suo decorso (Fig. 19). Questo assottigliamento fin dal punto di emergenza è rilevabile ancora in qualche raro caso in cui il prolungamento *cilinder axis* emana dalla radice di uno dei grossi prolungamenti protoplasmatici della superficie basale delle forme piramidali. Talvolta pertanto la sottigliezza non è iniziale, ma originatosi ancora più robusto che normalmente, alla distanza di 3-6μ dal corpo cellulare, il prolungamento funzionale rapidamente si assottiglia, e per lungo tratto si continua indiviso, irregolare e con decorso serpentino (Fig. 20). Altra volta infine questa anormale robustezza si continua fino a 35-50μ dal punto di origine. Il contorno del cono è irregolare, l'assottigliamento assai notevole e rapidissimo (Fig. 21).

Ancora più rimarchevoli alterazioni presenta l'ulteriore contegno del prolungamento nervoso.

Lungi dal dirigersi, dal punto di emersione, verso la parte profonda dello strato corticale, o verso la superficie della corteccia, in modo rettilineo, regolare, liscio, è di sovente visibile un decorso spiccatamente serpentino fin quasi dalla origine del prolungamento nervoso, e prima ancora della lieve tortuosità che, alla distanza di 20-30μ dal corpo cellulare, esso ordinariamente presenta (Fig. 22). Tale apparenza è assai diversa dal decorso leggermente tortuoso che i prolungamenti funzionali di circonvoluzioni sane possono assumere, probabilmente per effetto del raggrinzamento del tessuto.

È in generale assai difficile poter seguire fino a considerevole lontananza questi prolungamenti nervosi. Meno rare eccezioni rappresentate nelle Fig. 20 e 23, alla distanza di 50-80μ dal punto di origine, essi si arrestano, malgrado la notevole spessezza delle sezioni, e la direzione del taglio assai favorevoli a seguirli per lungo tratto. Quasi mai, nel minuto esame di molte centinaia di preparati, mi fu dato vedere prolungamenti che attraversassero tutto lo spessore della corteccia cerebrale o s'internassero nello strato delle fibre nervose, come non è raro osservare sopra sezioni di pezzi di cervello normale trattati con la reazione nera.

Degni inoltre di speciale dettaglio, fra le particolarità isto-patologiche che si riferiscono al contegno dei prolungamenti nervosi, sono quelle riguardanti l'aspetto del loro contorno, le variazioni di diametro, il modo di ramificarsi.

Sono caratteri particolari ai prolungamenti nervosi normali la regolarità, la levigatezza, l'aspetto omogeneo, il dar origine, a 20-30μ dal punto di emersione, a numerosi fili laterali, emananti ad angolo retto e somministranti alla loro volta rami laterali di 2°, 3°, 4° ordine. Questi essenzialmente riproducono i caratteri del filamento di origine, e passano da ultimo, in filamenti di incommensurabile finezza, a prender parte alla formazione dell'intreccio estremamente complicato, esteso in tutta la sostanza grigia (rete nervosa diffusa).

Innanzi tutto è a notare la mancata omogeneità e levigatezza del prolungamento *cilinder axis,* il quale invece non di rado è tempestato da fine granulazioni che, varcando appena i contorni del filamento, si inseguono a variabile distanza fra loro, e talvolta fin quasi dal punto di sua origine dal corpo cellulare (Fig. 22). I tratti inter-granulari sono di una estrema sottigliezza, e tutto il filamento assume un'apparenza rugosa, e come di finissimo rosario (Fig. 19-20).

Talvolta le granulazioni sono più grandi, i tratti inter-granulari meno assottigliati, e tutto il prolungamento appare sparso di piccole nodosità (Fig. 13), assai varie per forma, per numero e per grandezza. Molto di rado pertanto esse assumono l'aspetto di veri e diffusi rigonfiamenti, o altri caratteri riguardanti la ipertrofia dei cilindrassili (Fig. 24).

A queste alterazioni morfologiche, per quanto numerose, altrettanto circoscritte, che sono disseminate lungo il prolungamento nervoso, ne vanno aggiunte altre, assai rare del resto, riguardanti le variazioni di diametro che questo filamento può subire, per una estensione talvolta assai considerevole. Sono rigonfiamenti regolarmente fusoidi, dai contorni alquanto ondulati, che per una lunghezza di 50-90μ (Fig. 21) si osservano in punti in cui il prolungamento nervoso, già diventato esile filamento, suole in condizioni normali quasi insensibilmente assottigliarsi, man mano che somministra rami laterali.

In questi prolungamenti vi ha d'ordinario assenza di fili laterali. Una meno ricca ramificazione pertanto dei prolungamenti funzionali è la regola nel caso in esame, e a questo fatto va forse assegnato un valore decisamente patologico. Non già la emanazione di rami laterali i quali a tratti abbastanza regolari e fino a grande distanza si dipartono dal filamento di origine, acquistando una incommensurabile finezza; molto meno ancora è dato riscontrare la abbondante diramazione che, nelle normali condizioni, in modo analogo al filo di origine, i rami laterali somministrano alla lor volta, suddividendosi in fili di 2°, 3°, 4° ordine sempre più fini, ma sempre con i caratteri del filamento di origine.

Rami collaterali di 1° ordine mancano anche in prolungamenti nervosi di considerevole lunghezza (Fig. 20); ciò probabilmente è inerente alla notevole sottigliezza che essi presentano, e all'anormale aspetto del loro decorso e del loro contorno. Mancano del pari in quei pochissimi elementi addimostranti ingrossamenti, sia circoscritti e ripetuti, sia estesi (Fig. 13-21). Ove filamenti laterali esistono, essi sono quasi sempre di 1° ordine, sono brevissimi, non dànno rami secondarii, ripetono quasi

esclusivamente i caratteri patologici del filamento di origine (Fig. 22-24). Assai rari sono i prolungamenti nervosi di aspetto normale nel loro filamento di origine, i cui rami laterali appaiono per contrario disseminati di fine granulazioni (Fig. 23), o di piccole nodosità. È degno di nota però, in tal caso, come da queste ramificazioni di 1° ordine ne emanino altre di 2° e fin di 3° ordine, e come tale contegno del prolungamento *cilinder axis*, sia in certo modo in rapporto con la apparenza relativamente normale dei corpi gangliari e dei prolungamenti protoplasmatici (Fig. 23).

È in fine pur degno di speciale considerazione, fra i dettagli che si riferiscono al contegno dei prolungamenti nervosi, il fatto che, massime nelle circonvoluzioni frontali, da un numero non insignificante di cellule nervose, così degli strati superficiali che profondi della corteccia, il prolungamento nervoso emana sottilissimo dalla base delle forme piramidali; dopo breve tratto si bipartisce, e dirigesi con ambo i rami nella opposta direzione verso la superficie della corteccia cerebrale. Lungo tutto il suo decorso ha una estrema sottigliezza, è disseminato di finissime granulazioni, e decomponendosi in filamenti di 2°, 3°, 4° ordine, perde quasi la propria individualità, e prende parte *in toto* alla formazione della rete nervosa estesa a tutti gli strati della sostanza grigia (Fig. 25).

Presso che analogo contegno assume il prolungamento nervoso in altre cellule gangliari (massime poligonali e fusiformi) nelle quali però esso, mentre dirigesi verso la periferia della corteccia cerebrale, non si diparte da quella superficie del corpo cellulare, che è rivolta verso la sostanza bianca (Fig. 26).

E poichè il criterio della dignità funzionale di una cellula nervosa, come ha luminosamente dimostrato il Golgi, è dato non dalla forma o dalla grandezza di essa, che variano all'infinito, ma dal modo di comportarsi del prolungamento nervoso, rispetto ai fasci che decorrono o escono dalle varie provincie dell'encefalo. Poichè, in seguito alle osservazioni di questo eminente ricercatore, le cellule che, riguardo al contegno del prolungamento nervoso, corrispondono a quelle del primo tipo, si riscontrano nelle corna anteriori del midollo spinale (zona motoria); e le cellule gangliari del secondo tipo trovansi invece in prevalenza nelle corna posteriori e sostanza grigia di Rolando. Poichè le fibre delle radici anteriori corrispondono al contegno del prolungamento nervoso del primo tipo, e le fibre delle radici posteriori (di senso) suddividendosi complicatamente, si comportano come il prolungamento nervoso del secondo tipo, con ben fondata opinione tali elementi in esame, corrispondenti al secondo tipo delle cellule gangliari, si possono considerare come appartenenti alla sfera psico-sensoria della corteccia cerebrale.

Le alterazioni istologiche appaiono in generale in questi elementi notevolmente minori, per grado e per diffusione, che non in quelle del primo tipo (cellule psicomotorie). Esse riproducono però essenzialmente una stessa identità nella natura del processo morboso non solo, ma rivelano talvolta, ad un tempo, lo stesso contegno del prolungamento funzionale, non già nel filamento di origine, ma in uno dei rami laterali di primo ordine che dirigesi nell'opposta direzione, verso la superficie della corteccia cerebrale (Fig. 26).

2. Fibre nervose. — Le alterazioni istologiche si estendono non solo alle cellule gangliari, ma anche alle fibre nervose. Poichè pertanto il modo di svilupparsi

della reazione nera non è simultaneo nei diversi elementi del tessuto nervoso, ma essa interessa ora l'una, ora l'altra categoria di elementi, con gradazione e combinazioni che potrebbero dirsi infinite, così solo col confronto di molti preparati normali e patologici di circonvoluzioni cerebrali omologhe, indurite e colorate presso che alla stessa epoca, ci fu possibile sorprendere alcune particolarità di struttura e di disposizione delle fibrille nervose, e acquistare sulla loro organizzazione d'insieme un concetto in certo modo adeguato, che noi pertanto, solo con la più grande riservatezza, ci azzardiamo ad enunciare.

Una diminuzione delle fibre nervose nella loro massa, specialmente nelle circonvoluzioni dell'*insula* dell'emisfero sinistro, così nella sostanza midollare, come nella zona di passaggio da questa alla grigia, appare un fatto incontestabile (Fig. 27).

La colorazione di tali fibre, in alcune zone, ha poca finezza; in punti immediatamente vicini invece si vedono bene individualizzate le fibre nervee componenti i diversi fascetti, e dai fascetti veggonsi emanare isolate fibrille, delle quali si scorgono le più minute particolarità di decorso e di ramificazione.

Mentre nelle sezioni di pezzi di cervello normale i fasci di fibre nervose provenienti dai raggi midollari, nell'attraversare i diversi strati della corteccia cerebrale, complicatamente ramificandosi formano una intricatissima rete, lo stesso aspetto essi pare non presentino nelle zone corticali dell'*insula*, nel caso patologico in esame. Quivi piccoli pennelli di fibre sono disseminati qua e là, i cui filamenti terminali si perdono d' ordinario prima di raggiungere gli strati più superficiali della corteccia. Lungo i fasci le fibrille nervee decorrono più semplici e a maggior distanza fra loro; meno numerose appaiono le suddivisioni, meno complicato l' intreccio che da esse risulta. Nell'area nuda che intercede fra l'un fascio e l'altro, e talvolta ancora nella compage dello stesso pennello di fibre, un numero assai grande di capillari sanguigni decorre nel modo il più diverso. — La più parte di queste fibrille nervose, nella sua individuale fisonomia, si presenta, in generale, sotto forma di filamenti affatto semplici, di estrema finezza, nei quali il microscopio non riesce a dimostrare alcuna più intima struttura. Sono lisci, decorrono per lunghi tratti in linea retta, si ramificano in modo dicotomico e quasi sempre ad angolo retto, diventando più fini quanto più procede la suddivisione. Questa, massime nella zona di passaggio dalla sostanza midollare alla grigia, si esplica nelle direzioni più diverse, sì da risultarne un intreccio variamente complicato.

Un buon numero di fibrille pertanto essenzialmente riproducono i caratteri istopatologici riscontrati nei prolungamenti nervosi. Si mostrano ove più gracili nell'aspetto, ove seguono un decorso insolitamente serpentino; più sovente poi esse hanno apparenza meno omogenea, meno regolare e levigata; le ramificazioni secondarie sono più povere, e tanto lungo il filamento nervoso di origine, quanto lungo le loro diramazioni, sono disseminati multiformi nodosità e granuli, con i più svariati caratteri isto-morfologici (Fig. 28-29).

Memori dell'importante reperto pubblicato da Tuczek ([1]), circa la considerevole

([1]) *Ueber die Anordnung der markhaltigen Nervenfasern in der Grosshirnrinde und über ihres Verhalten bei der Dementia paralytica.* (Neurologisches Centralblatt, n°. 14-15, 1882).

— *Weitere Mittheilungen über den Schwundmarkhaltigen Nervenfasern in der Grosshirnrinde bei der Dementia paralytica.* (Neurologisches Centralblatt, n° 7, 1883).

distruzione dei fasci nervosi midollati del lobo frontale e dell' *insula* nella demenza paralitica, mentre rimangono intatte le fibre mieliniche delle circonvoluzioni centrali, dei lobuli para-rolandici, non che della 2ª circ. temporale e dei lobi parietali e occipitali, noi non mancammo di provarci a tentare ancora questa indagine nei casi occorsi al nostro studio, sulla base di un diligente esame comparativo, fatto rispetto a una serie di preparati normali di regioni omologhe. — E ciò sia per la importante significazione fisiologica di quelle zone corticali del lobo frontale e dell'*insula*, ove ha sede la facoltà del linguaggio, e dove si assumono e si esplicano, assai probabilmente, le più alte funzioni psichiche, sia ancora per la significazione fisiologica di quelle fibre midollari rinvenute da Exner (1) alla periferia della sostanza grigia corticale, e da questo Autore considerate come appartenenti ad un sistema di associazione fra le diverse stazioni cellulari della corteccia cerebrale.

La nostra indagine pertanto non ci autorizza ad alcuna conclusione assoluta, e rimane questo un quesito che merita nuove ricerche, massimamente usando, oltre la colorazione nera di Golgi, ancora i metodi all' ematossilina di Weigert e all' acido osmico e ammoniaca di Exner, più specialmente destinati alla colorazione delle fibre nervose midollate.

Il fatto da noi rinvenuto, e che credo non vada dimenticato, si appartiene allo studio delle particolarità di struttura e al modo di comportarsi dei prolungamenti funzionali in un numero non insignificante di cellule nelle quali essi, emanati dalla base delle forme piramidali, non si dirigono verso la sostanza midollare, bensì versa la superficie della corteccia, decomponendosi in filamenti di 2°, 3°, 4° ordine (Fig. 25-30).

E notevole è del pari il contegno dei prolungamenti nervosi in altre cellule gangliari, ove essi nè si dipartono da quella superficie del corpo cellulare che è rivolta verso la sostanza bianca, nè dirigonsi verso di questa (Fig. 26).

Questi filamenti nervosi di estrema finezza perpendicolarmente ascendono dalla sostanza grigia sottostante, talvolta fino agli strati più superficiali della corteccia, e si può quivi vederne alcuni a varia altezza ripiegarsi ad arco e farsi quasi paralleli alla superficie cerebrale. D'ordinario anormalmente filiformi fin dal punto di origine, lungo il loro esteso decorso sono disseminati di finissime granulazioni, le quali invadono filamenti di vario ordine, e talvolta numerosi, che da essi emanano.

Questi fatti si ebbe opportunità di osservare, massimamente nelle circonvoluzioni frontali, in un certo numero di cellule nervose le quali, per il contegno del loro prolungamento cilindrassile, avevano carattere di cellule sensitive; non è del resto infrequente riscontrare filamenti laterali delle fibre del primo tipo, i quali ritorcendosi in alto, ascendono del pari verso la estrema superficie cerebrale (Fig. 31). — Ci parve pertanto che, per il loro modo di comportarsi, questi prolungamenti è probabile abbiano una parte assai significante nella composizione di quel complicato intreccio di fibre che si riscontra nella zona sottomeningea della corteccia.

Solo di un numero esiguo di queste fibrille pertanto è consentito seguire il lungo decorso, e indagare così le particolarità di struttura, come la loro provenienza e la

(1) *Zur Kenntniss vom feineren Bau des Gehirnrinde* (Sitzb. der K. Akad. der Wissensch. Bd. LXXXIII, Abth. III, Feb. 1881.

predominante disposizione quasi parallela alla superficie libera della corteccia cerebrale. Di moltissime altre invece, che forse hanno lo stesso contegno, non si può che constatare la esistenza, tanto alla sommità e ai lati delle circonvoluzioni, quanto verso il fondo delle scissure. Nella loro prevalente direzione parallela alla superficie cerebrale, esse hanno il decorso più irregolare, incrociandosi fra loro e ritorcendosi verso gli strati sottostanti della corteccia nel modo più diverso. In questo fitto e complicato intreccio, che per tal guisa si forma, le fibrille nervee presentano un calibro piccolissimo, e riproducono alcuni dei caratteri isto-patologici messi in rilievo nei prolungamenti nervosi, quali in ispecial modo l' estremo assottigliamento, la mancanza di omogeneità, l'aspetto granuloso, le frequenti nodosità.

3. Tessuto interstiziale. — Dettagli nuovi e interessanti rispetto al contegno e ai rapporti degli elementi nevroglici, così nella sostanza bianca come nella grigia del cervello, vennero messi in evidenza con i metodi dell'azione combinata del bicromato e del nitrato di argento. Nè, convinto degl'importanti risultati che l'applicazione di questi metodi d'indagine è destinata ad apportare ancora nella storia patologica delle conoscenze sul sistema nervoso, mi pare superfluo ricordare a questo punto, che mentre con gli ordinarii processi di ricerca la dimostrazione delle particolarità intorno al tessuto interstiziale degli organi nervosi centrali richiede minuziose e pazienti prove, con i metodi della colorazione nera non solo è dato ottenere, con difficoltà assai minori, preparazioni di sorprendente chiarezza, ed avere un concetto sicuro riguardo alla forma, disposizione e misura di distribuzione delle cellule nevrogliche, ma possono ancora essere con la massima evidenza dimostrate minute particolarità intorno ai rapporti di connessione tra gli elementi nevroglici e le pareti dei vasi.

Nei preparati così ottenuti pertanto, allorchè essi vengono paragonati con sezioni di pezzi di cervello normale, tolti dalla stessa regione e sottoposti a condizioni identiche di fissamento e di colorazione, si può quasi a colpo d'occhio rilevare che le alterazioni sono assai svariate. Esse hanno un carattere diffuso, così nei diversi strati della corteccia del cervello, come nella sostanza midollare. Raramente circoscritte ad elementi isolati e sparsi, queste alterazioni sono quivi disseminate quasi a focolai, in quei punti nei quali i vasi mostrano le più differenti e spiccate lesioni.

Un aumento numerico considerevole degli elementi del tessuto interstiziale, nel caso in esame, appare un fatto incontestabile (Fig. 32), ed io non entro nella quistione, ancor viva nella scienza, se cioè i nuovi elementi aracniformi, osservati nella corteccia di soggetti paralitici, siano il prodotto della proliferazione delle cellule aracniformi preformate e preesistenti, ovvero essi siano delle unità istologiche, da queste ultime assai differenti per origine.

Circa i rapporti quantitativi tra l' abbondante stroma nevroglico interposto alle cellule e fibre nervose della corteccia delle circonvoluzioni fronto-parietali, in confronto di quello che separa i fasci bianchi della sostanza midollare, si presentano modificazioni degne di qualche rilievo. Analogamente agli elementi nevroglici della sostanza bianca, ancora la corteccia consta essenzialmente di cellule fornite di una innumerevole quantità di prolungamenti assai lunghi e sottili, tra essi incrociantisi nel modo più complicato; circa il loro rapporto quantitativo pertanto lo stroma intersti-

ziale pare si trovi nella corteccia, rispetto ai fasci bianchi, in quantità maggiore che non nelle normali condizioni (Fig. 32).

Le diverse parti in cui la sostanza grigia delle circonvoluzioni viene dagli anatomici distinta (connettivo sottomeningeo, strato superficiale, medio, profondo) non presentano, relativamente al loro anormale rapporto quantitativo, differenze meritevoli di speciale considerazione.

Individualmente considerati gli elementi nevroglici, sia della corteccia, sia della sostanza midollare, presentano una insolita robustezza così del corpo cellulare, come dei suoi prolungamenti. Essi in alcuni punti della sostanza grigia appaiono così strettamente addossati, e quasi ad immediato contatto delle cellule gangliari, per modo che fra queste e il circostante tessuto non è affatto visibile alcuno spazio preformato. Tali elementi presentano le forme più irregolari e svariate: sono triangolari, allungate, fusiformi, stellate ecc. Talora distinguonsi per un'anormale robustezza del corpo cellulare e dei prolungamenti che ne emanano, i quali sono così nettamente designati, da far rilevare il preciso modo di connessione tra essi e il corpo della cellula (Fig. 33).

Talora invece i prolungamenti sono assai numerosi e lunghi, e hanno una ramificazione straordinariamente ricca (Fig. 34). I loro tortuosi filamenti si irradiano in tutte le direzioni, si insinuano tra le fibre e tra le cellule nervose, sembrando quasi destinati a fornir loro un involucro di difesa; si accompagnano o s'incrociano nel modo più diverso con quelli di altre cellule vicine, senza dar luogo ad anastomosi.

In tutto questo così vario contegno le cellule nevrogliche si mantengono d'ordinario abbastanza bene individualizzate e distinte. Non sono rari pertanto i casi in cui le numerose e robuste espansioni dei prolungamenti, lontanamente ramificandosi, contraggono rapporti e formano intrecci estremamente complicati. La figura 35, ad esempio, rappresenta un punto circoscritto di un esteso rapporto che anormalmente si stabilisce fra alcune cellule nevrogliche dello strato superficiale della corteccia, e gli elementi che formano lo strato sottomeningeo alla periferia delle circonvoluzioni. Ancora nelle facce laterali di corrispondenza fra due circonvoluzioni, dove questo strato è sottile e talora consta di un semplice ordine di cellule, il rapporto persiste; e al complicato intreccio formato dai prolungamenti orizzontali delle cellule nevrogliche, il quale limita le circonvoluzioni medesime, un altro strato limitante si aggiunge, costituito dalle arborizzazioni degli elementi nevroglici dello strato superficiale della sostanza grigia, e dai prolungamenti delle cellule nevrogliche dello strato sottomeningeo che, in direzione verticale, radialmente penetrano nel tessuto della corteccia,

Entro questa fitta rete connettivale, limitante la superficie delle circonvoluzioni, vengono a disperdersi le ultime divisioni dei prolungamenti protoplasmatici che dalle forme piramidali emanano in senso ascendente, e che sovente già nella loro configurazione rivelano le tracce di spiccate alterazioni. In così svariato contegno degli elementi nevroglici pertanto, a noi non fu dato confermare nello scheletro nevroglico che la costante esistenza di quell' intreccio più o meno complesso sostenuto da Golgi, e ultimamente da Kölliker, Ramón y Cajal ecc., apparenza assai lontana tanto dalla rete descritta da Schultze, Frey ecc., quanto dallo scheletro nevroglico continuo, fatto da cellule con prolungamenti e rapporti prossimali e distali, ultimamente segnalato da Paladino (*Contribution à la connaissance plus exacte des éléments qui composent*

les centres nerveux, grâce au procédé de l'iodure de palladium. — Arch. Ital. de Biologie, tom. XVII, fas. 1, 1892) (¹).

Altre minute particolarità pertanto, riguardanti la conoscenza della fina struttura patologica delle circonvoluzioni cerebrali nel caso in esame, si riferiscono ai rapporti che le cellule nevrogliche contraggono con le pareti dei vasi, rapporti che con nessun altro metodo d'indagine possono essere più diffusamente e con maggiore evidenza dimostrati.

Tale connessione con le pareti vasali si effettua mediante prolungamenti talvolta poco numerosi e lunghi, ma di straordinaria robustezza, i quali a guisa di larghe propaggini lamellari si dirigono verso i tubuli vasali, e dopo un cammino, talora brevissimo, talora assai lungo, si inseriscono in più punti, ravvicinati o distanti, di uno stesso vase. Di rado si può cogliere la inserzione a tronchi vasali diversi.

Mentre in preparati di cervello normale la inserzione si effettua mediante una espansione, talora conica e ben delimitata, talora tenuissima e senza limite netto, nel caso in esame le larghe propaggini lamellari, che man mano si allontanano dal corpo cellulare subiscono un progressivo assottigliamento, mostrano nella loro porzione terminale, in vicinanza della inspessita parete vasale, un grosso rigonfiamento a clava, che su di quella si termina, o una espansione larga talvolta quasi quanto i capillari sanguigni (Fig. 33).

Così l'uno che l'altra però non presentano una inserzione diretta sulla tunica del vase, e molto meno presentano un rapporto di continuità, a così dire, che i prolungamenti cellulari d'inserzione contraggono con i capillari e con le arterie minori, onde sembri quasi che essi passino a costituire una membranella avventizia perivascolare. Nei preparati invece, nei quali nessun precipitato di cromato d'argento è avvenuto lungo i funicoli vasali, è visibile con sorprendente chiarezza come queste larghe espansioni e questi rigonfiamenti clavati dei prolungamenti cellulari d'inserzione, si terminino del tutto al di fuori dello spazio sotto-avventiziale; e come fra essi e il tubulo vasale, più o meno notevole distanza intercede, secondo che più o meno considerevole è la quantità degli elementi migrati dal lume del vase medesimo (Fig. 33).

Sono ipertrofie che i prolungamenti vasali delle cellule nevrogliche subiscono, segnatamente nella estremità terminale d'inserzione alla parete vasale e talvolta ancora in tutta la loro lunghezza, fino al corpo cellulare, sì da distinguersi nettamente a colpo d'occhio da tutti gli altri prolungamenti nevroglici (Fig. 42^bis^).

4. Vasi sanguigni. — L'esame dei vasi fu praticato tanto sulle sezioni di pezzi di cervello colorati al cromato d'argento, come sulle diramazioni vascolari, estratte con una pinzetta dal parenchima cerebrale conservato nella soluzione tenue di bicromato, e finamente dilacerate. I vasi sanguigni rappresentano la sede delle alterazioni più avanzate e diffuse nei diversi strati della corteccia e nella sostanza midollare. Al pari però di quelle del tessuto interstiziale e degli elementi nervosi, le

(¹) In un mio recente lavoro pertanto (*Sulla istogenesi della nevroglia nel midollo spinale.* — Pavia, 1892), studiando la nevroglia spinale di diverse specie animali (uomo, vitello, porco), a diverso periodo della loro vita embrionale, ebbi opportunità di mettere in rilievo dei fatti, che trovano ancora un certo riscontro in queste osservazioni segnalate da Paladino.

lesioni non si mostrano in modo uniforme diffuse in tutta la estensione del vase, ma vi ha invece per alcune zone corticali una specie di selezione del processo morboso.

La esistenza di stravasi di sangue nelle guaine linfatiche perivascolari è un fatto costante. Essi sono talvolta così abbondanti, che tutto il vase appare circondato da un largo manicotto di globuli di sangue rossi e bianchi e di granuli di pigmento, impigliati in mezzo a un tessuto gelatiniforme, attraverso il quale la struttura del vase è quasi invisibile. Finamente dilacerando pertanto, si osserva non di rado che le tuniche vasali non mostrano mutamento chiaramente rilevabile a traverso il microscopio (Fig. 36). — Più sovente invece si riscontrano vasi dalle pareti inspessite, i quali hanno un decorso spiccatamente serpentino nell' ampia guaina linfatica; rigidamente ricurvati su loro stessi, non è possibile imprimere ai tubulini una posizione diversa. Il sangue stravasato che li circonda mostra fasi varie di metamorfosi regressiva, i cui prodotti di regressione, più o meno abbondanti, si depositano negli spazii sotto-adventiziali. Essi esercitano sulle pareti dei vasi una irritazione progressiva e lenta, che costituisce in questi la causa della loro disorganizzazione consecutiva (Fig. 37-42bis).

In questi stravasi sotto-adventiziali, poco innanzi ricordati, e in questo processo infiammatorio cronico delle tuniche dei vasi, deve con molta probabilità essere ricercata la causa delle modificazioni così del contorno, come del diametro dei tubuli vasali, che si riscontrano non di rado nella sostanza cerebrale, nel caso patologico in esame (Fig. 37). Possono per tal modo rinvenirsi dei veri aneurismi miliari, analogamente a quelli già da tempo segnalati da Charcot e Bouchard (1), per la prima volta, nella emorragia cerebrale.

Di queste ultime alterazioni nei paralitici noi non daremo una descrizione dettagliata, poichè nulla avremmo ad aggiungere alla descrizione classica che di questa affezione delle pareti dei vasi ci tramandarono Charcot e Bouchard. Solo ci stringe obbligo di mettere in rilievo il fatto per cui, se queste fasi differenti dell'alterazione vasale nella demenza paralitica devono essere ben distinte l'una dall'altra, in quanto che esse rappresentano di sovente periodi differenti della malattia, pure e i fatti poco innanzi ricordati, e la loro coesistenza nello stesso soggetto, ci costringono a ritenere che con tutta probabilità essi devono essere riferiti a una patogenesi comune. Onde così gli stravasi nelle guaine perivascolari e la metamorfosi regressiva che gli elementi migrati subiscono, come le consecutive alterazioni delle pareti vasali, fino alla formazione di veri aneurismi miliari, non rappresentano che gradi diversi di uno stesso processo infiammatorio, connessi sovente l'uno all'altro per una causa primordiale comune.

Gli aneurismi miliari da noi osservati furono rari; d'ordinario essi costituiscono dilatazioni fusiformi occupanti tutta la circonferenza del vase (Fig. 38); di rado sono circoscritti ad una parte sola della parete vasale (Fig. 39). La loro lunghezza, in generale poco notevole, è assai varia; mai rinvenni emorragia e rottura delle tuniche vascolari. Più frequente fu invece il reperto di inspessimenti, più o meno considerevoli, dei capillari e dei vasi di piccolo calibro (Fig. 40); l' aspetto delle loro pareti è omogeneo, però i loro contorni sono d'ordinario tortuosi, bernoccoluti, e come stranamente erosi (Fig. 39).

(1) Nouvelles recherches sur la pathologie de l'hemorrhagie cérébrale (Arch. de phys. norm. et pathol., 1868, pag. 110).

È interessante inoltre a segnalare come immediatamente addossate alle pareti vasali si vedono frequenti formazioni globulari, varie per numero, forma e grandezza, assai omogenee nel contenuto e refrangenti la luce (Fig. 37).

Così la esistenza di queste formazioni globulari (che nei nostri preparati, sia a fresco che con i comuni metodi di colorazione, è assai frequente), come le proprietà ad esse inerenti, non pare abbiano di molto richiamata l'attenzione degli osservatori.

Al di fuori dei vasi, nella guaina linfatica perivascolare sono disseminati questi globuli splendenti, o isolati, o raggruppati in ammassi più o meno considerevoli. Il loro contorno è d'ordinario circolare e in questi, forse in rapporto con l'esiguo volume, la trasparenza è maggiore; vi ha del resto in tali globuli un grande polimorfismo, e le gradazioni più diverse di refrangenza e di volume. Assai rara è l'apparenza in essi di un doppio contorno (Fig. 36). — La loro natura non mi fu posibile determinare; poichè pare che essi non rispondono in modo deciso a nessuna delle reazioni microchimiche delle sostanze attualmente segnalate dalla istologia patologica. In effetti la ricerca fatta su preparati rimasti solo qualche giorno nel liquido di Müller, dimostra che questi globuli non sono gocciole di grasso, poichè non si sciolgono coll'aggiunta di etere o di cloroformio, non si colorano in nero con una soluzione all' 1 % di acido osmico. Non si rivelano in essi le comune reazioni nè della sostanza colloide (colorazione coll'ematossilina o coll'ematossilina eosinica), nè della sostanza mucosa o amiloide (reazione dell'jodo, del metilvioletto, metodo al bruno di Bismack di Birch-Hirschfeld). Lo stato omogeneo, lo aspetto quasi vitreo di queste formazioni, tenderebbero a farle riferire alla sostanza jalina, le proprietà micro-chimiche però vi sono per la più parte contraddittorie.

Esaminando le diramazioni vascolari, estratte con una pinzetta dal parenchima cerebrale di soggetti paralitici, oltre il loro decorso spiccatamente serpentino, con singolare frequenza accade di osservare, che al contorno dell'avventizia vasale stanno attaccati numerosi fili o fiocchi di sostanza fibrillare, onde i capillari così isolati assumono, in alcuni punti, un aspetto come villoso (Fig. 41).

Tali appendici filiformi talvolta si presentano isolate e assai sottili; tale altra hanno l' aspetto di un fascetto di esili fibrille ramificate, riunite fra loro come da una sostanza granulosa. Questi fili di sostanza fibrillare, i quali altro non rappresentano che lacerati prolungamenti di cellule nevrogliche inserentisi sull'avventizia, si rinvengono sulle pareti dei vasi ancora in cervelli normali. Se non che quivi questo fatto è assai meno frequente che nei soggetti morti di paralisi generale, i filamenti non presentano una così larga espansione nel loro punto d'inserzione al capillare, essi non sono mai così numerosi da imprimere al vase quella speciale apparenza villosa.

È ancora degno di nota in fine, come un minuto esame comparativo di molti preparati normali e patologici colorati al cromato d'argento, assai chiaramente ci permette constatare un aumento della rete vascolare, specie negli strati profondi della sostanza grigia (Fig. 42). Di questo fatto, già affermato da autorevoli osservatori, e da altri contrastato, il metodo rapido della reazione argentica, per cui la rete vascolare, a un certo punto della reazione, viene quasi in totalità colorata in bruno, ci fornisce una dimostrazione quasi incontestabile. Se però questa neoformazione dei capillari, nella paralisi progressiva, abbia origine da accumuli di cellule che a guisa di gemme fanno

sporgenza alla parete dei vasi, e che allungandosi costituiscono i capillari di nuova formazione (Marchi ecc.), ovvero se questi ultimi si generino dalle cellule nevrogliche, i cui prolungamenti, congiunti con le pareti dei vasi, si trasformerebbero in vere reti vascolari (Ranvier), è argomento che solo toccheremo nell' ulteriore svolgimento del lavoro.

IV.

Demenza paralitica.

Osservazione 2ª (*Clinica psichiatrica di Napoli*).

Iac ..... *Lorenzo*, contadino di anni 46, ammogliato, da Forio d'Ischia. Ricevuto nella Clinica il luglio 1890, riammesso il maggio 1891. Frenastenico originario; bevone per eccellenza. Traumatismo sul capo 20 anni fa. Cefalalgia ostinata. — Andatura in modo goffo e oscillante. Lieve grado di atassia nei movimenti.

Forza muscolare appena diminuita. Forte tremore non solo sì negli arti superiori che inferiori, ma notevolissimo altresì nella faccia e nella lingua.

Ipo-estesia tattile da per tutto, più spiccata nelle estremità inferiori. Esagerata la sensibilità dolorifica. Lieve grado di termo-anestesia, in ispecie agli arti inferiori. Difficile la esecuzione dei movimenti; impossibile quella dei più specializzati. — Riflessi della cute e delle mucose diminuiti; il riflesso patellare spento.

Pupille alquanto rigide, disuguali, irregolari nel contorno. Lieve ptosi. La forza visiva pare conservata. Discromatopsia per il verde e il violetto in entrambi i lati.

Parola trascinata, tremula, balbettante. Linguaggio assai povero, proporzionato alla ideazione.

Lieve grado di ateromasia dell'aorta.

Fisonomia stupida, sguardo vago e senza espressione.

Notevoli disordini del processo percettivo. Debolezza affettiva. Memoria notevolmente scaduta. Raro il delirio; rarissime idee fastose. Cenestesi poco esagerata. Bensì progressivo affievolimento di tutte le attività psichiche.

Nessun accesso epilettoide o apoplettiforme.

Decubito e indebolimento incalzante delle forze e del cuore. Muore con segni di lento collasso la mattina del 17 dicembre.

Autopsia (Prof. Armanni). - 18 dicembre 1891; 28 ore dopo la morte.

Robusto sviluppo scheletrico e muscolare.

Forte rigidità cadaverica. Decubito.

Pericranio inspessito; le ossa della volta mediocremente spesse; la diploe abbondante; la sagittale sinostotica. La dura-madre è ben distesa sul cervello; la pia-madre poco iniettata, leggermente edematosa, alquanto inspessita lungo la grande scissura.

La massa encefalica, piuttosto anemica, non presenta alterazioni a focolai. Alla base i nervi e i tratti ottici, col chiasma, mostrano un notevole assottigliamento e colorito grigio.

La midolla spinale molto assottigliata; la pia-madre, posteriormente, ispessita, gelatiniforme. Alla sezione i cordoni posteriori mostrano l'aspetto della degenerazione grigia.

Cuore leggermente ipertrofico nel ventricolo sinistro; gli apparecchi valvolari sufficienti; l'aorta con lieve grado di arteriosclerosi.

Pulmone sinistro libero; totalmente aderente il destro; entrambi mostrano infiltramento edematoso con ipostasi.

Milza piccola, atrofica.

Fegato di volume normale, con leggiero ispessimento della capsula nell'ala sinistra; presenta alla superficie diverse chiazze di degenerazione adiposa, e due piccoli angiomi cavernosi.

Nei reni nessuna speciale lesione.

La vescica ipertrofica, a colonne; la mucosa, fortemente iperemica, mostra in qualche punto superficiali escare necrotiche; contiene pochissima urina e molto purulenta. La prostata, fortemente ingrossata, presenta diversi piccoli ascessi.

Esame istologico.

Nel caso patologico in esame le alterazioni istologiche notevolmente differiscono per sede, per grado e per estensione da quelle messe in rilievo nella precedente Osservazione.

I lobi pre-frontali, il segmento superiore delle circonvoluzioni rolandiche ed il lobulo parietale superiore sono la sede di lesioni avanzate; in minor grado alterate si presentano le parti inferiori delle circonvoluzioni centrali, il lobo temporo-sfenoidale, le circonvoluzioni dell'*insula*; intatte, o quasi, appaiono le circonvoluzioni occipitali.

1. Cellule nervose. — Poichè la serie di forme cellulari (cellule piramidali, fusate, globose, poligonali, piriformi, atipiche) è tanto ricca da sottrarsi a qualunque esatta descrizione; e poichè la forma delle cellule nervose, come ha messo in rilievo il Golgi, è un fatto puramente accidentale, dovuto alle condizioni dell'ambiente in cui queste si sviluppano, e sul quale non devesi perciò basare criterio di sorta, io solo rapidamente toccherò le alterazioni riscontrate negli elementi gangliari, in rapporto con il loro speciale contegno morfologico.

La impressione generale che si ha dall'aspetto d'insieme di preparati di circonvoluzioni cerebrali diverse, è che le lesioni della corteccia, nel caso in esame, sono di assai minore grado che nella Osservazione precedente.

Esse non si presentano già a focolai, sono invece elementi cellulari isolati e sparsi che mostransi in vario modo alterati, onde la necessità di un esame diligente e ripetuto, per mettere in evidenza alterazioni meno appariscenti, e per riscontrarne ancora in quelle regioni nelle quali una prima indagine aveva dato risultato negativo.

È degno pertanto di speciale rilievo il fatto che, le alterazioni così del corpo cellulare, come dei prolungamenti protoplasmatici sono quivi assai meno gravi e meno estese che non quelle dei prolungamenti nervosi.

E notevole è ad un tempo che tali alterazioni sono più frequenti in tutta la porzione esterna della sostanza grigia, che non nello strato profondo di essa, ove si riscontrano in numero cospicuo le cellule gangliari nella loro integrità più completa.

Una decisa irregolarità nella riuscita della reazione non appare costante; mancano pertanto aree nude di elementi nervosi, e tutto il tessuto è sensibile alla reazione argentica.

A parte quelle varietà meno significanti nella configurazione dei corpi cellulari, le quali, lungi dal rappresentare delle anomalie, possono essere considerate invece come semplici atipíe (fig. 43-44) che, per la loro grande frequenza, vanno comprese tra le variazioni normali delle cellule gangliari, assai scarsi si rinvengono in generale quelle sporgenze e quelle anfrattuosità, quei rigonfiamenti e quegli assottigliamenti in così alto grado pronunziati, del corpo di molte cellule, i quali furono riscontrati nella Osservazione I.

Gli elementi gangliari colorati in nero e disposti in eleganti serie, insieme alla bizzarra ramificazione dei prolungamenti protoplasmatici, presentano, qua e là disseminati senza alcuna legge, dei corpi cellulari raggrinzati, bernoccoluti e rigonfiati, in modo da risultarne svariate deformazioni.

Le forme decisamente vescicolari e quelle atrofiche non si rinvengono che in assai scarso numero. Meno rare sono invece, negli strati superiore e medio, le configurazioni cellulari anormalmente fusate, nelle quali il corpo della cellula pare tenda a trasportarsi verso l'apice delle forme piramidali (fig. 45), senza che il contorno regolare e netto di essa appaia alterato. E parimenti meno rare sono quelle, ove il corpo cellulare sembra quasi bipartito da uno strozzamento circolarmente concentrico, più o meno esteso e profondo, per cui la cellula assume la configurazione come di un manubrio (fig. 46). Eccezionali in fine non appaiono quegli elementi nei quali, mentre il corpo gangliare conserva la sua caratteristica forma a piramide, i contorni di esso sono irregolari, contorti e disseminati di sporgenze e di insenature, in grado più o meno pronunziato (fig. 47).

Le forme anormali più frequenti del corpo cellulare, pertanto, sono rappresentate nella fig. 48. — Nondimeno esse sono pure assai scarsamente disseminate in mezzo a gruppi di cellule gangliari aventi tutti i caratteri delle normali; e quantunque le gibbosità e le rientranze e le svariate deformazioni del corpo cellulare ricordino solo in pochi elementi le note di non rudimentali alterazioni, pure estremamente raro è vedere interessata allo stesso grado la intera cellula con i suoi prolungamenti, e poter rilevare un certo rapporto di solidarietà fra gli elementi diversi che la compongono.

I prolungamenti protoplasmatici, in effetti, mostransi sani o in assai lieve grado alterati, ancora in quegli elementi che presentano le note di più avanzate lesioni. Dall'insieme del loro esame ne risulta la impressione che essi siano in generale alterati meno di frequente, e in grado minore, che non il corpo delle cellule e i prolungamenti nervosi. Non si riscontrano lungo il loro decorso quegli strani rigonfiamenti sferici, cilindrici, sacciformi, fusati, nè quelle anormali tortuosità rinvenute così diffusamente nella 1ª Osservazione.

È invece rilevabile, con una certa frequenza, nè anormale assottigliamento delle diramazioni protoplasmatiche, talvolta fin dalla loro prima origine dal corpo della

cellula (fig. 48), talvolta dopo un rigonfiamento più o meno esteso che esse hanno subìto nel punto di loro emergenza (fig. 47).

Una assai povera ramificazione dicotomica inoltre, così dei prolungamenti che originano dagli angoli del lato basale, come di quelli emananti dalla superficie laterale dei corpi gangliari, pare un fatto incontestabile, il quale, in condizioni normali, assai poco si concilierebbe con la teoria sostenuta da Obersteiner (¹), che cioè omologhe cellule nervose abbiano tanto maggior numero di prolungamenti, e questi si diramino tanto maggiormente, quanto più in alto è situato l'animale nella scala zoologica.

Il loro numero per contrario in altre cellule gangliari è singolarmente grande (fig. 48). Sono filamenti assai sottili, brevi, e quasi sempre indivisi, che si dipartono da quasi tutta la periferia delle forme piramidali, i quali danno alla cellula un aspetto echinato.

Questo contegno dei prolungamenti protoplasmatici pertanto fu rinvenuto sempre in relazione con alterazioni più o meno gravi dei corpi gangliari, e sovente ancora dei prolungamenti nervosi.

Contrariamente alla Osservazione precedente, sede delle più cospicue e svariate alterazioni, nel caso in esame, sono i *prolungamenti nervosi*, con prevalenza, nei diversi punti, ora dell'una alterazione, ora dell'altra. La reazione nera del prolungamento *cilinder axis* riuscì molto più raramente che nei cervelli normali, e già rimarchevoli differenze essa mette in rilievo fin dal punto di sua origine.

Del sottile e regolare cono con cui il prolungamento nervoso si distacca dal corpo cellulare, sovente non esiste alcuna traccia, e un aspetto filiforme esso assume fin dal punto di emanazione (fig. 49). Talvolta invece il cono di origine è assai lungo e robusto (fig. 43), e un anormale rigonfiamento si nota nella sua porzione iniziale o terminale di esso (fig. 50-51). Altra volta, infine, dalla base delle forme piramidali, o dalla radice di uno dei grossi prolungamenti protoplasmatici, emana il prolungamento nervoso anormalmente robusto, e con aspetto decisamente cilindrico; con lo stesso diametro esso si continua per lungo tratto in tutto il decorso, mostrando qua e là lievi ondulazioni e irregolarità nel suo contorno (fig. 48-52).

Estremamente raro è il caso che tali alterazioni si circoscrivano alla porzione iniziale del prolungamento centrale; in modo vario, per grado e per estensione, esse ordinariamente si diffondono lungo il suo decorso.

Una particolarità del prolungamento funzionale, che in certo modo sorprende per la sua grande frequenza, per la configurazione e la sede presso che costanti, e più che ogni altra cosa, per il rinvenirsi quasi nelle identiche condizioni in un'altra forma di malattia mentale che con il caso in esame ebbe comune la etiologia (intossicazione alcoolica), è quella che lungo il prolungamento si rinviene, sotto forma di un rigonfiamento fusoide circoscritto, regolare quasi sempre unico (fig. 53-54). Esso ha sede, assai sovente, alla distanza di 35-50 μ dal corpo cellulare, poco dopo il punto in cui il prolungamento, già divenuto esile filamento, presenta d'ordinario una lieve tortuosità, e prima che esso emani rami laterali. Di rado, a breve distanza da questo, segue un secondo rigonfiamento che ne ripete i caratteri morfologici.

(¹) Biologisches Centralblatt, N. 5, pag. 145-155.

Ingrossamenti del resto ove circoscritti, ripetuti e più o meno regolari nel contorno (fig. 55), ove estesi per considerevole tratto lungo il prolungamento nervoso, sì che questo subisca variazioni di diametro più o meno notevoli (fig. 43), sono frequenti nel caso che è argomento del nostro studio, e costituiscono un ragguardevole contributo alle alterazioni così svariate e così diffuse dei prolungamenti nervosi.

Sono *ipertrofie varicose* che i cilindrassili subiscono, in seguito a processo infiammatorio, le quali trovano un certo riscontro nei reperti anatomici rinvenuti nei corpi striati e nel cervelletto da Golgi (1) in un caso di Corea gesticolatoria associata ad alienazione mentale.

E tale opinione io enuncio, in base alla grande analogia che esiste tra i fatti innanzi segnalati, e le lesioni rinvenute da Hayem (2) in due casi di mielite acuta centrale e diffusa, come ancora in mieliti prodotte sperimentalmente sugli animali.

Ancora un nuovo contributo, in fine, alla interpretazione adeguata di tali rigonfiamenti, che i prolungamenti nervosi subiscono, parmi sia apportato da alcuni reperti istologici rinvenuti recentemente da Golgi e da me, in un caso di paralisi spinale ascendente acuta, ove tanto i prolungamenti centrali delle cellule di Purkinye, quanto i cilindrassili dei nervi periferici e delle radici spinali posteriori erano disseminati di enormi rigonfiamenti fusoidi che imprimevano alle fibrille nervose un aspetto moniliforme.

Non sono pertanto tali ipertrofie varicose le sole alterazioni che rivelano i prolungamenti funzionali nel soggetto in esame, e altre non meno importanti ve ne ha che riguardano l'aspetto del loro contorno, le variazioni di diametro, il modo di ramificarsi.

Una considerevole sottigliezza dei prolungamenti nervosi, spesso fin dal punto di origine, è assai frequente, e ad essa altre anomalie nel decorso, nei contorni, nei rami secondarî si uniscono, per cui il loro carattere patologico diventa un fatto incontestabile. Ora sono finissime granulazioni disseminate lungo il loro decorso (fig. 49), ora le granulazioni sono più grandi, fino ad assumere l'aspetto di piccoli nodi, e il decorso è irregolare e spiccatamente serpentino (fig. 53). Talvolta pertanto l'assottigliamento non è iniziale, ma segue immediato a un anormale rigonfiamento che il cono di origine ha subìto; sottilissimo filo, continua per un tratto più o meno lungo, e solo nella porzione terminale si rigonfia a cono, sì da ricordare, nella configurazione, la sua origine (fig. 51).

Tale variazione di diametro che il prolungamento nervoso presenta nella sua porzione terminale, può essere diffusa per una estensione assai considerevole, e talvolta a tutta la sua lunghezza, onde esso assume l'aspetto di un nastro, dai bordi ora nettamente regolari, ora variamente ondulati (fig. 52), ora slargati varicosamente lungo il suo decorso (fig. 48). Reperto il quale ricorda in qualche modo i corpi ovalari descritti da Mierzejewski (3) nella paralisi progressiva, e gli slargamenti varicosi dei grossi filamenti che da questi corpi emanano.

(1) Rivista clinica di Bologna, anno IV, 1874.

(2) Archives de Physiologie normale et pathologique, 1874, N. 4-5, p. 603.

(3) Arch. de physiol. norm. et pathol. 1875, p. 195.

Dettagli nuovi e degni di essere descritti presentano il modo di ramificarsi dei prolungamenti nervosi e l'ulteriore contegno dei rami laterali.

Questi, con regola quasi costante, emanano ad angolo retto. Nel punto di emergenza di frequente si nota una tenue espansione triangolare che il prolungamento nervoso subisce, dal cui apice origina un filo laterale indiviso (fig. 50-54-56).

La espansione è assai regolare, variabile per grandezza, è unica o molteplice, si riscontra in filamenti che già mostrano le più diverse alterazioni. Non tutti i rami laterali pertanto si originano con questa espansione (fig. 56), nè tutti mostrano anomalie nel loro ulteriore contegno (fig. 54); la espansione stessa è talvolta sostituita da un rigonfiamento olivare da cui emanano fili di variabile lunghezza (fig. 44). È notevole in generale una meno ricca ramificazione collaterale; talvolta questa manca quasi del tutto (fig. 55). I filamenti laterali sono brevi, assai di rado suddividonsi in rami di 2° ordine (fig. 49-52-55); sono d'ordinario di estrema sottigliezza e disseminati di finissime granulazioni (fig. 53-54-56).

È raro che i rami collaterali ripetano essenzialmente i caratteri isto-patologici del prolungamento di origine; sono però varietà di forma, di grado, di estensione nell'alterazione, e una certa solidarietà nel loro contegno, un rapporto di causalità fra loro è innegabile.

Questa quasi costante solidarietà, per contrario, dei prolungamenti funzionali, per cui essi o non rivelano alterazione degna di rilievo, o variamente la mostrano in tutto il loro decorso e nelle loro più fine e periferiche diramazioni, meno evidente appare fra i corpi gangliari e i rispettivi prolungamenti nervosi; assai più di rado tale solidarietà si riscontra tra questi ultimi e i prolungamenti protoplasmatici.

E poichè per l'intimo rapporto che esiste tra funzione ed organo, a differenze isto-morfologiche e patologiche devono corrispondere differenze funzionali, non sembrerà audace, in questo così diverso contegno che i prolungamenti nervosi e i protoplasmatici assumono dinanzi ad uno stesso processo morboso, ricercare un certo contributo alla loro differente significazione fisiologica.

E pur riserbandomi a tornare più oltre su questo assai interessante argomento, allorchè altri reperti patologici dovranno essere considerati, che alla dignità funzionale dei prolungamenti protoplasmatici forniscono fatti più numerosi, assolutamente obbiettivi, assai meno discutibili, dirò qui solo che dinanzi ad una serie di fatti così armonicamente concordi, mal si comprende la indecisione di pure eminenti cultori di biologia (Kölliker, Waldeyer), o la ostinazione pretenziosa di altri (Ramón y Cayal, Van Gehuchten), nell'attribuire una natura nervosa ai prolungamenti protoplasmatici, e nel ritenere che l'elemento gangliare *in toto* intervenga attivamente nella trasmissione nervosa.

2. Fibre nervose. — Così nella sostanza midollare, come nella zona di passaggio da questa alla grigia e negli strati più superficiali della corteccia, si riscontra un gran numero di fibrille di incommensurabile finezza, di aspetto non omogeneo, disseminate di fine granulazioni e di piccole nodosità, le quali con molta analogia riproducono alcuni dei caratteri riscontrati nei prolungamenti nervosi. Tra queste fibrille pertanto, disseminate e confuse, se ne rinvengono molte altre affatto semplici,

assai sottili, nelle quali non è dimostrabile alcuna più intima struttura. Se non che la derivazione di questi molteplici filamenti da caratteristiche fibre nervose, oppure dai prolungamenti assili delle cellule gangliari, il loro modo di decorrere e di ramificarsi, la particolare fisonomia di un certo numero di essi, in quanto che rivelano qua e là alcune delle note isto-patologiche rinvenute nei prolungamenti funzionali, dimostrano la natura nervosa di queste fibrille.

Nei diversi strati della corteccia cerebrale e nella sostanza sub-corticale esse formano un intreccio variamente complicato, il quale diventa sempre più folto per la ulteriore ramificazione dicotomica, prevalentemente ad angolo retto, che da queste fibre procede nelle direzioni più svariate.

E a questo punto dirò che non è affatto vero che col metodo della reazione nera non si metta in evidenza il decorso delle fibre nervose, dirò anzi che, in base a un diligente esame di confronto, rispetto a sezioni di parti omologhe di cervelli normali, è ancora possibile acquistare sulla loro organizzazione d'insieme un concetto abbastanza adeguato.

Che tale reazione, in effetti, ci dimostri con tutto il rigore scientifico il decorso del *cilinder axis* e delle sue più fine ramificazioni, mi fu agevole convincermi non di rado, nel caso in esame, in cui, per assai lungo tratto attraverso gli strati della corteccia potetti accompagnare, fino alle zone più superficiali delle circonvoluzioni, rami laterali di fibre così del 1° che del 2° tipo, i quali nel loro filamento di origine, e talvolta lungo il loro ulteriore decorso, mostravano le note di spiccate alterazioni (fig. 44). Che anzi aggiungerò, che rispetto al modo di pervenire più sicuramente a conoscenze precise sull'inestricabile intreccio delle fibre negli organi centrali nervosi, la colorazione al cromato d'argento lascia da sè a grande distanza ancora tutti quei metodi i quali, mostrando un grande insieme di fibre, non permettono distinguere il decorso di ciascuna di esse. Questa reazione diventa per tal modo tanto preziosa per lo studio dell'origine centrale dei nervi, quanto lo è quella del cloruro d'oro per lo studio dei diversi modi di terminazione delle fibre nervose nei singoli organi.

3. Tessuto interstiziale. — Per ciò che riguarda le cellule nevrogliche sia della corteccia, sia della sostanza midollare, le alterazioni hanno un carattere diffuso; quasi in nessuno strato esse dimostrano costanti particolarità relative alla forma, ai rapporti, alla misura di distribuzione, tali da potere essere ritenute come caratteristiche.

Mercè il metodo della colorazione nera viene posto nella maggiore possibile evidenza uno sviluppo considerevole delle singole cellule aracniformi, prevalente forse nelle parti più profonde della sostanza grigia, insieme ad altre particolarità così del protoplasma cellulare, come dei prolungamenti. Non vi ha pertanto una certa regolarità nella disposizione degli elementi nevroglici, nè nella sostanza grigia della corteccia, nè nella zona di confine tra questa e la sostanza midollare.

Talvolta i corpi delle cellule vedonsi addossati, strettamente oltre il solito, agli elementi gangliari, e paiono come ad immediato contatto di essi. Tra questi e il circostante tessuto non è visibile alcuno spazio; nessuna traccia vi ha delle zonule

linfatiche pericellulari segnalate da Obersteiner e da Schrön, e la cellula nervosa sembra così esattamente incastrata nello stroma nevroglico, che questo le forma quasi una capsula.

Talvolta invece le larghe espansioni dei prolungamenti nevroglici invadono presso che tutta la superficie delle cellule nervose, e riunendosi e intrecciandosi con quelle di altri elementi aracnoidi, pare che formino tutti insieme come un reticolo addossato sulle cellule gangliari. Apparenza che mi ricorda in certo modo alcuni preparati microscopici mostratimi da Paladino, addimostranti nuovi rapporti tra il nevroglio e le cellule nervose, da lui messi in evidenza con il suo importante processo al joduro di palladio [1].

In tutto questo così svariato contegno, le cellule aracniformi della sostanza grigia delle circonvoluzioni presentano una insolita robustezza del corpo cellulare, che assume le forme più diverse. Anormalmente robusti del pari, più numerosi, più riccamente ramificati e sparsi di leggieri rigonfiamenti appaiono qua e là i prolungamenti che si dipartono dalla superficie periferica delle stesse cellule nevrogliche (fig. 57). Accompagnandosi essi o incrociandosi con quelli di altre cellule vicine, senza dar luogo ad anastomosi, ne risulta un reticolo più o meno complicato, in mezzo al quale i singoli elementi aracnoidi si mantengono d'ordinario bene individualizzati e distinti, sì da potere, anche nelle sezioni, riconoscere la forma che è ad essi caratteristica.

Nella sostanza midollare invece, probabilmente in relazione coll'andamento dei fasci di fibre nervose e con la migliore resistenza dei fasci bianchi al processo morboso, le cellule nevrogliche tendono quasi a formare delle regolari serie radiali dal basso in alto. I corpi cellulari, più robusti che normalmente, hanno prevalentemente una configurazione appiattita, quasi lamellare. I prolungamenti, filiformi, assai numerosi e lunghi, in ogni direzione si dipartono da queste cellule; disseminati qua e là di piccoli rigonfiamenti, s'intromettono nel modo più vario tra i fasci di fibre della *corona radiata*, le incrociano o dispongonsi parallele ad esse, perdendosi in fine lungo il loro decorso (fig. 58).

La impressione pertanto che in generale si ha dall'esame di molti preparati, è che nel caso patologico che descriviamo è diverso il contegno dello stroma interstiziale del tessuto nervoso, e minori per grado e per estensione sono le alterazioni, che non nella Osservazione precedente. E un eguale concetto da siffatte preparazioni emana con la maggiore chiarezza, allorchè specialmente si esaminano i rapporti e la estesa connessione delle cellule nevrogliche con le pareti dei vasi.

In speciale grado nella corteccia del cervello, i corpi cellulari vedonsi talvolta strettamente addossati alle pareti dei vasi, le quali per tratti più o meno estesi del loro decorso sono circondate da un folto cespuglio di cellule raggiate, realizzandosi per tal modo una connessione immediata. Talora invece la connessione avviene per mezzo di prolungamenti più o meno robusti, i quali partendosi sovente da quelle stesse serie continuate di cellule aracnoidi peri-vasali, vanno ad inserirsi alle pareti di altri vasi.

[1] *Di un nuovo processo per le indagini microscopiche del sistema nervoso centrale.* — Rend. della R. Accad. delle Scienze di Napoli, fasc. I, gennaio 1891.

La inserzione qua e là non si effettua mediante un grosso rigonfiamento a clava, che si termina nella parete vasale fortemente inspessita, come nella prima Osservazione; di rado essa si compie mediante la espansione più o meno conica e ben delimitata che si osserva nelle normali condizioni. Sono invece delle placche nummulari, larghe e brevi, le quali talvolta sulla parete vasale s'inseriscono direttamente, in modo da far parte quasi del suo rivestimento. In quei vasi pertanto, assai rari, dal cui lume pochi elementi sono fuoriusciti nello spazio peri-vascolare, la inserzione non è immediata, ma una sottile striscia, chiara, disseminata degli elementi migrati, intercede tra la parete del vase e i prolungamenti d'inserzione (fig. 58).

A parte queste particolarità, non frequenti del resto, i prolungamenti cellulari d'inserzione non presentano note degne di speciale dettaglio.

4. Vasi sanguigni. — In questa, a differenza della precedente Osservazione, nè alterazioni delle pareti o del lume dei vasi si rinvengono, nè i larghi inspessimenti delle guaine linfatiche perivascolari, o gli abbondanti stravasi sotto-adventiziali; nessuna neoformazione di capillari chiaramente rilevabile. Solo per brevissima zona, intorno alle pareti di pochi vasi sanguigni, sono disseminati scarsi globuli di sangue, rossi e bianchi, senza che quelle rivelino cambiamento visibile a traverso il microscopio. Reperto che avemmo a riscontrare, ancora in modo più avanzato e diffuso, nei vasi della corteccia cerebrale, in un caso di malinconia semplice.

V.

Psicosi alcoolica.

OSSERVAZIONE 3ª (*Clinica Psichiatrica di Pavia*).

Rig..... *Domenico*, cocchiere, da Pavia, ha 40 anni. Ammesso nel Manicomio il 20 gennaio 1892. Abuso di vino e di bevande alcooliche. Presenta evidenti le note della frenosi alcoolica. Muore il dì seguente, in un attacco di *delirium tremens*.

Esame istologico.

1. Cellule gangliari. — La indagine microscopica fu praticata su circonvoluzioni cerebrali normali all'aspetto.

Assegnare pertanto una sede di maggiore predilezione alle alterazioni che al microscopio si riscontrano negli elementi gangliari che popolano i diversi strati della corteccia cerebrale, nella Osservazione che è argomento del nostro studio, non riesce possibile; poichè trattasi non già di focolai, nè di lesioni che con più o meno predilezione invadono tutta una zona superficiale o profonda della corteccia. Sono invece alterazioni di elementi isolati, e qua e là disseminati senza alcuna legge, le quali solo sono messe in rilievo con osservazioni diligentissime e ripetute. Che anzi, le già molto avanzate lesioni che queste sovente mettono in evidenza, sono argomento di sorpresa come mai una prima indagine non avesse fornito che risultati negativi.

La riuscita della reazione, in generale, è meno irregolare e capricciosa che nelle precedenti Osservazioni. Che anzi ci fu dato ottenere preparati, nei quali la reazione

è di considerevole finezza, e perfettamente opportuna a mettere in evidenza le più minute e interessanti particolarità, così dei corpi gangliari, come delle più fine suddivisioni dei loro prolungamenti, sia protoplasmatici che nervosi.

Riguardo alla forma, grandezza e disposizione delle cellule nervose, è in generale difficile trovare significanti differenze, in confronto dei corrispondenti strati di circonvoluzioni normali.

Sicuramente in nessun punto appaiono colpite dall'alterazione più cellule gangliari riunite. In nessun punto, come nella Osservazione 1ª, si rinvengono dei corpi affatto informi, riconoscibili come avanzi di cellule gangliari, solo per qualche ricordo della forma piramidale o fusata propria degli elementi nervosi della corteccia, e per qualche breve e rigido prolungamento che emana dalla sua superficie. E neppure si rinvengono quegli elementi, che anche morfologicamente ritraenti il normale tipo delle cellule gangliari, si presentano però raggrinzati, con prolungamenti protoplasmatici rigonfiati, tortuosi o assottigliati.

Assai lievi invece, per grado e per estensione, appaiono le alterazioni dei corpi gangliari, rilevate con l'aiuto della reazione argentica; qualcuno dei rari esempî è rappresentato nella fig. 59. E poichè, come altra volta abbiamo ricordato, la forma e la grandezza delle cellule sono variabili all'infinito, e non che contribuire alla conoscenza delle attribuzioni fisiologiche che incombono agli elementi nervosi, non costituiscono che un fatto puramente accidentale, è solo con la più grande incertezza che noi si potrebbe ascrivere tra le forme patologiche alcune atipíe, rinvenute soltanto nella parte più profonda della sostanza grigia (fig. 60-61), ove in esse, così nell'aspetto del corpo cellulare, come nel contegno dei prolungamenti non venisse meno un chiaro riscontro, rispetto a sezioni di circonvoluzioni normali omologhe.

Che anzi riguardo al modo di comportarsi dei prolungamenti cellulari, due fatti di ordine generale sono degni di speciale considerazione nel caso patologico in esame, i quali parmi assumano una certa importanza, rispetto alla diversa significazione fisiologica dei prolungamenti protoplasmatici e di quelli nervosi, come ancora rispetto alla diversa attribuzione funzionale degli elementi gangliari:

a) Il fuggevole grado di alterazione, vo' dire, delle ramificazioni protoplasmatiche, il quale fa contrasto evidente con il contegno spiccatamente patologico dei prolungamenti funzionali. — *b*) La lesione prevalente, per grado e per estensione, nei prolungamenti nervosi del primo tipo, più che in quelli della seconda categoria.

Tali note isto-patologiche riguardano così la maniera di origine, come l'ulteriore modo di comportarsi e di ramificarsi dei prolungamenti funzionali.

Taccio pertanto i particolari dettagli riguardanti il modo diverso di emergenza dei prolungamenti nervosi (sottigliezza o rigonfiamento considerevole, irregolarità dei contorni, assottigliamento progressivo più rapido che normalmente ecc.). Non solo assai poco essi essenzialmente differiscono dalle particolarità messe in rilievo nella Osservazione 2ª, ma sono ancora così largamente rappresentati nelle figure, da essere giustificato ogni silenzio a loro riguardo.

Facendo invece argomento di minuto esame l'ulteriore contegno di questi prolungamenti, si rilevano particolarità diverse che meritano considerazione.

A poca distanza dal punto di origine (20-45 μ.), di frequente essi presentano uno

o più rigonfiamenti, dai limiti d'ordinario netti e regolarmente disegnati, in modo analogo a quanto fu riscontrato nel prolungamento funzionale di alcune cellule ganglionari della corteccia cerebrale, nella Osservazione 2ª.

Sonvi però di questo reperto molte varietà, di alcune delle quali è pur necessario si prenda nota. Ad esempio: talora esso ha l'aspetto di un eguale rigonfiamento olivare di tutto un tratto del filamento nervoso (fig. 62), mentre altra volta o sembra che un segmento solo della sua circonferenza abbia subìto una forte estroflessione (fig. 63), o manca quella spiccata regolarità dei contorni; la rimanente porzione del prolungamento nervoso mostra apparenza normale in tutta la sua lunghezza. Talora, quasi allo stesso punto sul filo nervoso, il rigonfiamento assume forma sferoidale (fig. 64), o anulare (fig. 65), o fusata, e presso che in tutto il suo decorso il prolungamento funzionale presentasi o anormalmente rigonfiato e irregolare (fig. 65), o disseminato di estese formazioni fusoidi (fig. 64). Sovente ancora l'ingrossamento assume configurazione bizzarra e grandezza assai notevole (fig. 66-67). — Questo rigonfiamento del filo nervoso di rado è unico: a pochi micromillimetri da esso, talvolta ne segue un secondo più piccolo, e con gli stessi caratteri morfologici (fig. 62-63); sovente poi 3-5 rigonfiamenti, di forma e grandezza le più varie, si succedono fra loro a breve distanza, per cui il prolungamento nervoso può, per un certo tratto, presentare un aspetto più o meno spiccatamente varicoso (fig. 68-69) o moniliforme (fig. 70), fino al punto in cui esso si sottrae all'esame.

Meno interessanti, per la loro scarsezza, e non molto differenti dalla Osservazione che precede, sono le alterazioni riguardanti le varietà di contorno e di diametro, e il modo di ramificarsi del prolungamento *cilinder-axis*.

Talvolta esso apparve non così omogeneo, regolare, e levigato come nelle normali condizioni, ma bensì più o meno assottigliato e sparso di fine granulazioni (fig. 67), o fortemente rugoso e come fragmentato lungo il suo decorso (fig. 59-60), o variamente rigonfiato, per modo da subire, per tratti più o meno lunghi, considerevoli variazioni di diametro (fig. 61-65-71). Tale altra volta è la porzione iniziale del prolungamento nervoso che presenta speciali particolarità, o sotto forma di un irregolare rigonfiamento che esso subisce, e che segue immediato a un anormale assottigliamento nel suo punto di origine dal corpo cellulare (fig. 67); ovvero sotto forma di una nuova apparenza che il filamento assume, per cui sembra che i contorni di esso abbiano, rispetto alla reazione argentica, più alto potere elettivo, che non la sua porzione mediana (fig. 72).

Pare, in generale, che vi sia una certa selezione, a così dire, del processo morboso per le cellule del primo tipo, rispetto a quelle della seconda categoria, e che le alterazioni istologiche dei prolungamenti funzionali siano più specialmente circoscritte alla porzione iniziale di essi. Si incontra del resto una difficoltà assai grande a poterli accompagnare fino a considerevole distanza, come a poterne seguire le ramificazioni che da essi si dipartono. Questi rami laterali sono rari, brevi, e solo eccezionalmente riproducono i caratteri patologici del filamento di origine (fig. 69). Rami laterali di apparenza normale o quasi, emanano da prolungamenti funzionali che mostrano le più spiccate alterazioni (fig. 61-62-71). Non mi sembra superfluo infine, trattando dell'ulteriore contegno dei rami laterali, ricordare un raro caso di connessione diretta, che in questa medesima osservazione mi parve riscontrare tra il prolunga-

mento nervoso e quello protoplasmatico di due cellule della circonvoluzione frontale ascendente (fig. 73).

Non è mio intendimento toccare la questione delle anastomosi fra le cellule nervose, argomento così premurosamente studiato e discusso, alla cui soluzione la scoperta della colorazione nera già apportò il contributo di una dimostrazione incontestabile; e molto meno è mio intendimento di ricordare a tale riguardo la concorde opinione dei più diligenti e acuti osservatori (Deiters, M. Schultze, Kölliker, Golgi, Krause ecc.). Solo mi lusingo che il fatto da me riscontrato, lungi dall'esser compreso fra le illusioni di Schroeder van der Kolk, Lenhossék, Mauthner ecc., vada ascritto fra gli autentici casi segnalati da Wagner, Arnold, da Besser e ultimamente da Sala [1], nei nuclei centrali di origine del nervo acustico. Tanto più che questi rari casi di anastomosi fra cellule nervose trovano la ragione della loro esistenza nelle leggi stesse dello sviluppo embrionale, e anzichè provare che dirette connessioni fra le cellule nervose esistono per legge generale, esse non rappresentano che eccezionali esempi di arresto di sviluppo degli elementi gangliari; nei quali cioè il processo di scissione, incominciato nel periodo embrionale, si arresta prima della completa formazione di due distinte individualità cellulari.

Incomparabilmente minori, in fine, per grado e per estensione, sono le alterazioni dei *prolungamenti protoplasmatici*, rispetto a quelle delle ramificazioni nervose. Tranne un'anormale grandezza (fig. 61), o una spiccata irregolarità dei contorni (fig. 60), o una bizzarra tortuosità, con variazioni di diametro quasi invisibili, e affatto in rapporto coll'allontanarsi dal loro punto di origine (fig. 70), essi non rivelano altra particolarità degna di speciale dettaglio.

2. Fibre nervose. — Poichè pare che una certa specie di selezione del processo morboso, nella psicosi alcoolica, si rinvenga nelle cellule gangliari del primo tipo; e poichè le alterazioni istologiche riscontrate nei prolungamenti funzionali invadono quasi costantemente nella sua porzione iniziale il filamento di origine, di rado estendendosi ai rami laterali che più o meno numerosi da esso emanano, non parmi debba essere oggetto di sorpresa, nella corteccia cerebrale, l'apparenza presso che fisiologica, che generalmente mostrano le fibre nervee, ivi costituenti quell'intreccio estremamente complicato, esteso in tutta la sostanza grigia (rete nervosa diffusa) [2].

(1) *Su l'origine del nervo acustico.* Monit. Zoolog. italiano, Anno II, N. 2, 1891.

(2) Secondo la scoperta di Golgi (*Sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso.* Milano, 1885, pag. 48. Ed. Hoepli), in tutti gli strati di sostanza grigia degli organi nervosi centrali esiste una fina e complicata rete nervosa diffusa, alla formazione della quale essenzialmente concorrono:

1.° Le fibre emananti dal prolungamento nervoso delle cellule del primo tipo (cellule motorie o psico-motorie);

2.° I prolungamenti nervosi delle cellule del 2° tipo in totalità, decomponendosi essi prolungamenti in modo estremamente complicato;

3.° Le fibrille emananti da quelle fibre nervose (fibre della 1ª categoria), che vanno a mettersi in rapporto diretto con le cellule gangliari del primo tipo;

4.° Molte fibre nervose in totalità, quelle cioè, che identicamente al prolungamento nervoso delle cellule del 2° tipo, decomponendosi in tenuissimi filamenti e così perdendo la propria individualità, vanno gradatamente a confondersi nella rete in questione.

In preparati pertanto di pezzi delle circonvoluzioni fronto-parietali, nei quali la colorazione delle fibre nervose è di considerevole finezza, ed è assai estesa in tutti gli strati della corteccia cerebrale, è possibile studiare il contegno di queste fibre a traverso le varie zone della sostanza grigia, e acquistare sulla loro organizzazione d'insieme un concetto adeguato.

Lo strato midollare superficiale, scoperto da Remak e illustrato da Exner, si rinviene nelle parti più periferiche della corteccia, e appare composto di fibre di mediocre calibro, lunghe, talvolta arciformi, alle quali serve come di protezione uno straticello di cellule di nevroglia situato all'estremo limite sottomeningeo della corteccia cerebrale. Queste fibre presentano piccole varicosità lungo il loro decorso ed hanno direzione la più diversa, alcune decorrendo perpendicolarmente alla superficie delle circonvoluzioni, altre obliquamente o orizzontalmente.

Negli strati superficiale e medio della corteccia le fibre nervee appaiono più scarse ed alquanto più sottili di quelle degli altri strati, e sono qua e là riunite in piccoli fascetti. Vedonsi pertanto bene individualizzate le fibre nervose componenti i fascetti, e da questi veggonsi emanare isolate fibrille, delle quali chiaramente si scorgono le più minute particolarità di decorso o di ramificazione.

Le fibre nervee aumentano rapidamente in numero negli strati più profondi della corteccia, portandosi verso la sostanza midollare. Lasciano pochissimo spazio fra di loro; decorrono in tutte le direzioni possibili; rare e piccole varicosità sono disseminate lungo il loro decorso.

3. Nevroglia. — Rispetto allo stroma di sostegno del tessuto nervoso, così della corteccia come della sostanza midollare, gli elementi nevroglici, esaminati in un numero considerevole di preparati, non pare presentino alterazioni degne di speciale dettaglio, nè nella loro forma e disposizione, nè nella loro misura di distribuzione.

Normali del pari appaiono i rapporti che essi contraggono, sia colle pareti vasali, sia con le ultime suddivisioni dei prolungamenti protoplasmatici delle cellule piramidali, che perdonsi entro lo strato sottomeningeo della corteccia cerebrale.

4. Vasi sanguigni. — I vasi sanguigni, assai ripieni di sangue, mostrano, nelle diverse regioni prese in esame, apparenza normale.

VI.
Considerazioni.

1.° Dinanzi alle reliquie di un processo morboso esordito da lungo tempo, a noi non è permesso di affermare, con contributo nuovo di fatti istologici, se nelle due prime Osservazioni che precedono, e se in generale nei casi di demenza paralitica, si possano sempre dimostrare le tracce incontestabili della loro origine flogistica, onde essi debbansi tutti riferire a una *patogenesi* comune; ovvero se un certo numero di casi di meningo-encefalite cronica, i cui ammalati soccombono pure sotto gli stessi fenomeni, non debbano invece riguardarsi come affezioni, nel cui inizio la parte essenziale è rappresentata da alterazioni degenerative delle meningi e della corteccia cerebrale.

Un esame accurato pertanto, che ne rivela il contegno diverso così dei vasi sanguigni, come del tessuto interstiziale e degli elementi essenzialmente nervosi nelle Osserv. I e II, se non ci fornisce i documenti per ricostruire la natura intima e le prime fasi del processo, apporta però un certo contributo alla soluzione di alcuni quesiti che altamente interessano la fisio-patologia della demenza paralitica.

Nella Osservazione I, sono i vasi sanguigni che rappresentano la sede delle alterazioni più avanzate, e diffuse nei diversi strati della corteccia e nella sostanza midollare, le quali preludono le profonde lesioni della sostanza nervosa. — Ora sono abbondanti stravasi di sangue nelle guaine linfatiche perivascolari, senza che le tuniche dei vasi mostrino visibile mutamento. Ora sono vasi dalle pareti inspessite, i quali hanno un decorso spiccatamente serpentino nell'ampia guaina linfatica, circondati dal sangue stravasato, che trovasi in fasi diverse di metamorfosi regressiva. Ora in fine sono aneurismi miliari occupanti d'ordinario tutta la circonferenza del vase, e ripieni di sangue variamente alterato. — La neoformazione dei capillari pare un fatto incontestabile. — Analogamente conspicue appaiono le alterazioni degli elementi nevroglici, e disseminate talvolta come a focolai, in quei punti nei quali i vasi mostrano le più spiccate lesioni. L'aumento numerico delle cellule aracniformi; l'insolita robustezza così del corpo cellulare come dei prolungamenti; gli anormali rapporti che, lontanamente ramificandosi, esse contraggono, specialmente con lo strato connettivo sottomeningeo della corteccia; le larghe espansioni e i rigonfiamenti a clava che presentano i prolungamenti cellulari nelle loro connessioni con le inspessite pareti vasali, sono reperti con molta chiarezza dimostrati.

Nella Osservazione II, per contrario, nè alterazioni delle pareti o del lume dei vasi si rinvengono, nè i larghi inspessimenti delle guaine perivascolari, o gli abbondanti stravasi sotto-adventiziali; nessuna neoformazione dei capillari chiaramente rilevabile. Solo per brevissima zona, intorno alle pareti di pochi vasi sono disseminati scarsi globuli di sangue, rossi e bianchi, senza che quelle rivelino cambiamento visibile a traverso il microscopio.

Le cellule nevrogliche nel loro aspetto d'insieme, appaiono alterate in modo ed in grado diversi dalla Osservazione che precede. Non è nettamente rilevabile il loro aumento numerico; sono invece quelle normalmente esistenti che appaiono molto più evidentemente che nello stato ordinario.

I prolungamenti, di anormale robustezza, più numerosi, più riccamente ramificati, si addensano e invadono quasi la superficie degli elementi gangliari, o s'intromettono nel modo più vario tra i fasci di fibre della *corona radiata.*

Con le pareti dei vasi, la estesa connessione delle cellule aracnoidi si compie o in modo immediato e normale, o per mezzo di lunghi e numerosi prolungamenti d'inserzione, terminantisi in breve placca nummulare.

L'esame accurato del pari della sostanza nervosa rivela alterazioni assai notevoli, così delle cellule gangliari, come delle fibre nervee.

L'una Osservazione però differisce dall'altra notevolmente, e rispetto alla sede, e per il grado e la estensione della lesione, tanto nei corpi cellulari e nelle ramificazioni protoplasmatiche, quanto nei prolungamenti nervosi e nelle fibre.

Nella Osservazione I, sono le circonvoluzioni fronto-parietali e quelle dell'*insula*, ove le alterazioni si presentano più evidenti.

Il protoplasma cellulare, i prolungamenti protoplasmatici, dalla tumefazione iperplastica all'atrofia più avanzata, mostra un complesso di fatti che devonsi, nel loro insieme, riferire a fasi diverse di disturbi regressivi della nutrizione. I filamenti nervosi invece si mostrano in generale più resistenti, e non sono che solo in pochi elementi, e solo più tardi distrutti; le fibrille nervee riproducono qua e là alcuni dei caratteri messi in rilievo nei prolungamenti funzionali (aspetto granuloso, frequenti nodosità ecc.).

Nella Osservazione II invece i lobi prefrontali, il segmento superiore delle circonvoluzioni rolandiche e il lobo parietale superiore sono la sede di lesioni avanzate, le quali appaiono qua e là disseminate non a focolai, ma quasi in singoli elementi.

Non quei multiformi rigonfiamenti, nè quelle anormali tortuosità dei prolungamenti protoplasmatici, riscontrate nella Osservazione precedente. Sono rare le svariate deformazioni, in grado più o meno pronunziato, dei corpi cellulari. — I prolungamenti nervosi decisamente anormali, ora nel modo di origine, di decorrere, di ramificarsi, ora nell'aspetto del loro contorno e nelle variazioni di diametro (ipertrofia varicosa). Nessun rapporto di solidarietà tra il contegno dei prolungamenti nervosi e quello delle arborizzazioni protoplasmatiche. Le fibrille nervee, assai numerose, tempestate di fine granulazioni, di varicosità e di rigonfiamenti.

Mentre osiamo affermare che le alterazioni di maggior grado degli elementi gangliari, riscontrati nella I Osservazione negli strati medî e profondi della corteccia, con assai probabilità sono in diretta relazione con la maggiore ricchezza vascolare di queste zone corticali, e con il loro più spiccato contegno patologico; noi non sapremmo ridire se un rapporto diretto di causalità esista, nella Osservazione II, tra il più ricco sviluppo degli elementi nevroglici nelle parti più profonde della sostanza grigia, ove predominano le cellule gangliari fusiformi, e le lesioni delle cellule piramidali, più avanzate in generale nella metà esterna della corteccia. — Sicuramente però, nell'uno e nell'altro caso, così la *patogenesi* come le successioni morbose anatomiche sono fra loro assai differenti. E forse in questo diverso modo d'insorgere e di progredire della malattia, nelle condizioni etiologiche diverse, nell'essere prevalentemente interessata non solo questa o quella zona corticale, ma questa o quella serie di elementi, o di parti di elementi, devesi probabilmente ricercare la ragione del come mai alterazioni, talvolta identiche per natura, dieno luogo a forme cliniche tanto differenti nelle demenza paralitica.

Sono le alterazioni dei vasi sanguigni quelle che di gran lunga prevalgono nella I Osservazione. L'essere la nevroglia e gli elementi nervosi solo in minor grado alterati; i rapporti così immediati esistenti tra questi elementi, sia nevroglici che nervosi, e i vasi sanguigni; il rinvenire più spiccata la lesione in quelle parti di elementi che con i vasi contraggono rapporti più intimamente diretti; la coesistenza di alterazioni maggiormente avanzate in quelle zone corticali nelle quali maggiore è la ricchezza dei vasi e più marcato il loro contegno patologico, sono fatti che assai chiaramente rivelano quale importanza, nel caso in esame, le alterazioni del sistema vascolare ebbero nella genesi così del considerevole sviluppo e delle modificazioni

nutritive dello stroma interstiziale, come dei processi regressivi degli elementi nervosi.

Quanta sia la importanza delle lesioni vasali nella patogenesi di alcuni casi di paralisi progressiva, ebbi opportunità di constatarlo in altre mie osservazioni sugli organi nervosi centrali e sui nervi periferici di soggetti paralitici (1). Ricordo, ad esempio, come in uno di questi soggetti erano assai considerevoli le alterazioni delle piccole arterie e dei capillari decorrenti tra i fasci nervosi, tuttochè le fibre nervee presentassero solo le fasi più iniziali di alterazione, e i grossi tronchi dei vasi sansanguigni fossero immuni, o quasi, da processo arterio-sclerotico.

Non è mio intendimento indagare a questo punto se le alterazioni dei vasi sanguigni, e i processi infiammatorî in genere, costituiscano una condizione inevitabile nella patogenesi della paralisi progressiva, e se essa debba per ciò essere qualificata come una aracnite cronica (Bayle), o come una periencefalite cronica (Calmeil); come un rammollimento cerebrale (Perchappe), ovvero quale una meningite cronica (Duchek); come una meningo-encefalite interstiziale diffusa (Magnan), o quale una encefalite interstiziale diffusa corticale (Mendel).

Nè del pari ricercherò se un qualche rapporto esiste tra la neoformazione dei capillari e l'aumento numerico delle cellule aracniformi, rilevati nella I Osservazione. Se cioè la neoformazione dei capillari, segnalata da Lubimoff (2) e constatata ancora da noi, abbia origine da accumuli di cellule che a guisa di gemme fanno sporgenza alla parete dei vasi, e che allungandosi costituiscono i capillari di nuova formazione (Marchi) (3) ecc.; ovvero se questi si generino dalle cellule nevrogliche, i cui prolungamenti, congiunti con le pareti dei vasi, si trasformerebbero in vere reti vascolari (cellule vaso-formatrici di Ranvier) (4). — Certamente il fatto asserito da Mierzeyewski (5) e da altri, che cioè nella paralisi progressiva, assai di frequente ai vasi della sostanza corticale, isolati, restano attaccati numerosi prolungamenti filiformi, e talvolta cellule connettivali ramificate, è giustissimo. Essi ricordano i bottoni capillari segnalati da Golubieff (6) nella coda dei girini in via di sviluppo, e noi potemmo osservarne di persona, esaminando le diramazioni vascolari estratte con una pinzetta dal parenchima cerebrale. Quivi spesso accade di osservare che al contorno dell'avventizia vasale stanno attaccati numerosi fili o fiocchi di sostanza fibrillare, i quali altro non rappresentano che lacerati prolungamenti di cellule nevrogliche, inserentisi sull'avventizia con larghe espansioni, e in così gran numero, da imprimere ai capillari un aspetto villoso.

Se tale reperto pertanto sia caratteristico della paralisi progressiva, ovvero esso si riscontri anche in altri stati patologici, noi non sapremmo ridire con certezza.

Sicuramente dei fili di sostanza fibrillare si rinvengono sulle pareti dei vasi anche

(1) *Le alterazioni dei nervi periferici nella Paralisi generale progressiva, in rapporto con i loro nuclei centrali di origine.* — Ann. di Nevrol. Anno IX, f. 3-4-5, 1891.

(2) Arch. de physiol. normale et pathol., 1874.

(3) Riv. sperim. di Freniatria e Med. leg., Anno IX, p. 220.

(4) Arch. de physiol. norm. et pathol., 1874, N. 4-5, p. 429.

(5) Arch. de physiol. norm. et pathol. 1876.

(6) Archiv für mikroskopische Anatomie, pag 49.

in condizioni normali; se non che questo fatto è di gran lunga meno frequente che nei soggetti morti di paralisi generale; i filamenti non sono così fortemente rigonfiati nel loro punto d'inserzione al capillare; essi non sono mai così numerosi, da imprimere al vase quella speciale apparenza villosa (1).

(1) Segnalammo, in questa I Osservazione, come immediatamente addossate alle pareti vasali vedevansi frequenti formazioni globulari, varie per numero, forma e grandezza, assai omogenee nel contenuto e refrangenti la luce.

Così la esistenza delle formazioni globulari da noi constatate, come le proprietà micro-chimiche ad esse inerenti, non pare abbiano di molto richiamata l'attenzione degli osservatori.

Adler (1) Obersteiner (2) e Dagonet (3) hanno osservato questi globuli refrangenti nella paralisi generale progressiva, e Meynert e Wedl (4) li hanno segnalati in cervelli in via di atrofia. Io stesso ne ho osservati intorno ai vasi sanguigni del midollo spinale e del cervello, in un caso molto interessante di tabe dorsale, studiato nella Clinica del prof. Hitzig; e li ho riscontrati del pari a la Salpetrière, in un caso di demenza senile della Clinica del prof. Magnan. I globuli erano visibili anche in sezioni trasverse della sostanza nervosa, e si coloravano al picrocarminio di una lievissima tinta giallastra. Ricordo che lo stesso Charcot non potè darmi alcun giudizio sicuro a tale riguardo.

Quale interpetrazione pertanto può assegnarsi a questi globuli?

È bene innanzi tutto ricordare che tali formazioni non hanno nulla di comune con le masse splendenti intra-vasali segnalate da Meynert, Rezzonico (5), ecc., vere trombosi che talvolta obliterano il lume dei vasi. Nè del pari mi sembra che queste formazioni globulari vadano confuse con le diverse altre da me rinvenute negli organi nervosi centrali e periferici nella paralisi generale progressiva; nel midollo spinale, in un caso tipico di lepra tubercolare anestetica; nel midollo spinale e nei nervi periferici di un soggetto con paralisi spinale ascendente acuta; come pure in un caso assai speciale di tabe dorsale da infezione sifilitica, nel quale ultimo, formazioni globulari erano disseminate a focolai segnatamente nelle radici spinali, in zone più o meno estese, nelle quali non vi era più traccia di fibre nervose. Ricordo inoltre di averne osservati, di tali corpuscoli, nella poliomielite anteriore, in alcuni preparati mostratimi nel '90 dal dott. Mirto.

Evidentemente così la sede come le loro proprietà fisico-chimiche sono in questi casi assai diverse.

Quivi in effetti i globuli seguono nel midollo spinale quasi sempre il decorso dei sepimenti connettivali, ovvero quello delle fibre radicolari afferenti o efferenti, e nei nervi periferici ritrovansi costantemente nell'endonevro. E circa il loro aspetto fisico e le loro reazioni chimiche, dirò solo, per evitare in parte di ripetermi, che questi globuli, nei tagli a fresco, si presentano sempre o quasi isolati, affatto omogenei nel contenuto, alquanto rifrangenti, a contorno sempre circolare e netto, di volume variante entro limiti non molto lontani (da 3 a 9 μ). Essi non si sciolgono coll'aggiunta di cloroformio e di etere, non si colorano in nero con una soluzione all'1 °/o di acido osmico, assumono una tinta leggermente giallastra alla reazione coll'jodo, si colorano in violetto col metilvioletto e in verde col verde di metile, rimangono incolori all'ematossilina Weigert. Reagiscono in modo splendido, in generale, alle colorazioni nucleari (ematossilina alluminata, litiocarminio, carminio al borace, picrocarminio, violetto di genziana); le più belle preparazioni si ottengono con la colorazione doppia coll'ematossilina e coll'eosina.

Nulla di tutto questo nei globuli brillanti perivasali di cui ci occupiamo, e che cosa questi rappresentano noi non conosciamo finora. Non pare siano globuli di sostanza jalina dovuta a processo di coagulazione *post mortem*, come ha ritenuto Obersteiner, nè che possa rinvenirsi la origine nu-

(1) Arch. f. Psychiatrie, vol. V 1875.
(2) Medic. Jahrbücher, 1877.
(3) Verhandl. des Congresses, vol. IV. Berlin, 1891.
(4) Wiener Sitzungsber., vol. XLVIII, 1863.
(5) Arch. ital. per le malattie nervose e alienaz. mentali, 1887, p. 499.

Assai diversa è la *patogenesi* nella II Osservazione, cui devesi per molta parte ricercare nell'alterazione dello stroma interstiziale degli elementi nervosi, così come assai diverso ne è il contegno dei reperti anatomici e delle loro successioni morbose. A Magnan [1] si appartiene il merito di aver provato, per il primo, che la paralisi progressiva può produrre un'alterazione primitiva del tessuto interstiziale nell'encefalo, come nel midollo spinale, e che gli elementi nervosi, allorchè ne sono colpiti, non subiscono che un'azione secondaria. Questo autore considera tale processo morboso come una infiammazione interstiziale diffusa, che si esplica con una proliferazione cospicua dei nuclei delle cellule nevrogliche, donde poi si origina, dopo un tempo più o meno lungo, una metamorfosi regressiva della sostanza nervosa [2]. Meynert [3], Charcot [4], Lubimoff [5], Mierzejewski [6], e un numero rilevante di altri autori, confermarono in parte queste indagini; onde credo non giustificato trattenervisi da vantaggio.

La più parte di questi osservatori considera certamente l'affezione come una flogosi, che in generale corrisponde a quei processi ordinariamente descritti sotto il nome di meningoencefalite cronica. La interpretazione però che in questi casi essi danno alle singole alterazioni, è veramente molto diversa.

I limiti di questo lavoro e il contributo dei fatti patologici da noi messi in evidenza, non ci consentono indagare se le fibrille e le cellule aracnoidi, che spesso così evidentemente si rilevano nella corteccia cerebrale atrofica, debbano essere considerate

---

cleare o cellulare di questi corpuscoli ammessa da altri. — Assai più probabile è la opinione emessa da Dagonet, il quale in base alle proprietà fisiche e chimiche e alla sede di tali globuli, e in base alla natura della malattia, nella quale segnatamente si riscontrano, caratterizzata cioè da un processo di distruzione intensa della sostanza nervosa, è portato a ritenere che si tratti di un prodotto di disfacimento della vita cerebrale, di un prodotto di sdoppiamento della mielina (corpuscoli di cerebrina) [1]. Di tal che quando il numero di questi globuli è considerevole, come riscontrasi nella paralisi generale progressiva, esso indicherebbe un processo intenso di distruzione cerebrale, e le gocciole di cerebrina che circolano nelle guaine linfatiche perivascolari del cervello, sarebbero in rapporto con la disparizione delle fibre mieliniche descritte da Tuczek [2] in questa malattia.

Una opinione consimile io emisi a proposito della origine delle altre categorie di globuli poco innanzi ricordate, aventi sede tra i fasci nervosi midollati centrali e periferici. Tali opinioni pertanto hanno bisogno di ulteriore indagine, che sostituisca alla razionalità di una ipotesi la dimostrazione di un fatto.

(1) Zeitscrift der Gesselsch. der Aerzte zu Wien. N. 5, p. 44, 1860.

(2) Magnan — *Des relations entre les lésions du cerveau et certaines lésions de la môëlle et des nerfs dans la paralysie générale.* Gaz. des hôpitaux. Paris, 1871.

(3) *Studien ueber das pathologisch-anatomische Material der Wiener Irren-Anstalt* Vierteljahrschrift für Psychiatrie. Heft III, 1868.

(4) Arch. de physiol. norm. et patholog. 1873.

(5) *Studien ueber die Veranderungen der geweblichen Gehirnbaues und deren Hergang bei der progressiven Paralyse der Irren.* Virchow's Archiv., Bd. LV.

(6) Loco cit. — Arch. de physiol. 1876.

---

(1) Le sostanze costituenti la mielina sono ancora mal definite. Oltre le albumine e le sostanze estrattive, si descrive che alla sua composizione partecipino la neurocheratina, la colesterina, alcune sostanze fosforate, la cerebrina. (Baumstark *Zeitschr. f. physiolog. Chemie,* 1885).

(2) Neurologisches Centralblatt, N. 14, 15, 1882; e N. 7, 1883.

come coaguli di fibrina che si originano da una massa omogenea e che in parte contengono nuclei, secondo ritengono Voisin (1) e Mierzejewski. Oppure se, concordemente alla opinione di Mendel (2), Selvili (3) e di altri, debba riguardarsi come un fatto di essenziale importanza in questa malattia la moltiplicazione delle cellule aracnoidi nel cervello dei paralitici, ed ammettere un notevole aumento delle stesse. Nè del pari ci è consentito indagare donde mai provengono nel tessuto interstiziale del cervello, nella paralisi generale, questi elementi aracniformi. Se cioè siano il prodotto della proliferazione delle cellule aracnoidi preformate e preesistenti; ovvero se essi siano delle unità istologiche da queste ultime assai differenti per origine, e meglio forse in rapporto con le alterazioni dei vasi sanguigni, onde debbansi per ciò i differenti casi di demenza paralitica riferire tutti a una patogenesi comune.

La Osservazione che è argomento del nostro esame pertanto, mentre nel sistema vascolare della corteccia non mostra alterazione chiaramente rilevabile, considerevoli lesioni essa rivela nello stroma interstiziale, e non già nel senso di un aumento di numero delle cellule aracnoidi, bensì nel senso che quelle normalmente esistenti appaiono, soltanto nelle zone corticali atrofiche, molto più evidentemente che nello stato ordinario. Questi fatti adunque, nella loro coesistenza, ci apprendono:

a) Che l'affezione può, nella paralisi progressiva, intrinsecamente esordire nel tessuto interstiziale, e che le alterazioni dei vasi sanguigni non sempre rappresentano il punto di partenza di questa malattia.

b) Che se la moltiplicazione delle cellule aracniformi, nella demenza paralitica, è un fatto sicuramente giusto, esso lo è solamente in un numero limitato di casi; poichè talvolta soltanto gli elementi nevroglici, normalmente esistenti, possono presentare una insolita robustezza del corpo cellulare, una assai più ricca ramificazione dei loro prolungamenti.

2.° Qual'è pertanto, dal punto di vista della *patologia generale* e dell'*anatomia patologica*, il carattere delle alterazioni nei diversi elementi della sostanza delle circonvoluzioni? quali sono, verosimilmente, le *successioni morbose anatomiche*, nelle differenti Osservazioni che furono argomento del nostro studio?

Già nel corso del lavoro osservammo come diverse affezioni degli elementi ganglionari, nella I Osservazione, trovassero un certo riscontro nelle alterazioni già da tempo segnalate da Meynert, da Westphal e da altri Autori, per quanto diversi siano il metodo di indagine e la evidenza dei resultati.

Nel minuto esame di molte centinaia di preparati, noi potemmo ivi seguire i differenti stadî di metamorfosi così dei corpi gangliari come dei prolungamenti, e constatare un complesso di fatti, i quali devonsi nel loro insieme riferire a fasi diverse di disturbi regressivi della nutrizione.

In quei preparati pertanto, sottoposti alla sola azione del bicromato e del nitrato d'argento, i cui elementi gangliari, sfuggiti alla reazione argentica primitiva, subi-

(1) *Traité de la paralysie gén. des aliénés.* Paris, 1879.
(2) Berliner Klin. Wochenschr., 1882.
(3) *Zur pathol. Anat. d. Dement. paralytica.* In — Diss. Zürich, 1876.

rono dopo alcuni mesi una fine colorazione secondaria, mi fu possibile confermare il fatto constatato da Tigges ([1]), il primo, rispetto alla proliferazione dei nuclei in alcune cellule ganglionari di paralitici.

Nè parmi che questa metamorfosi progressiva degli elementi nervosi, in forma di duplicità dei nuclei, possa con qualche ragione attribuirsi a una illusione ottica, come sostiene Mierzejewski ([2]).

Già Jolly ([3]), Dietl ([4]), Fleischl ([5]) e Popoff ([6]) constatarono la proliferazione dei nuclei delle cellule ganglionari in diverse altre malattie. Già Meynert ([7]), confermando le osservazioni di Tigges, constatò inoltre la moltiplicazione degli elementi gangliari in casi di imbecillità e di sifilide. Già Hoffmann ([8]) e Lubimoff ([9]) osservarono nelle cellule ganglionari della corteccia, nei paralitici, la proliferazione nucleare, perchè ogni contraria affermazione su questo argomento, debba essere assai riguardosamente enunciata.

Alle fasi diverse di metamorfosi regressiva dei corpi cellulari, segnalate nella I Osservazione, partecipano in alto grado i prolungamenti protoplasmatici o *dendriti* (His).

I prolungamenti nervosi appaiono più resistenti, e non sono che solo in pochi elementi e solo più tardi distrutti. Quasi mai essi presentano spiccate varicosità, rigonfiamenti, e altri caratteri riguardanti l'ipertrofia dei cilindrassili. Sono invece gracili, assottigliati, tempestati di finissime granulazioni, rivelando per tale contegno, fasi più o meno avanzate di processi regressivi.

Nelle Osservazioni II e III, per contrario, ad alterazioni poco rilevanti, così del protoplasma cellulare come delle ramificazioni protoplasmatiche, rispondono affezioni notevolmente spiccate dei prolungamenti funzionali. Per una estensione, talvolta assai considerevole lungo il loro percorso, si rigonfiano varicosamente, presentando le forme più svariate della ipertrofia dei cilindrassili. Lesioni che, secondo nel corso del lavoro ricordammo, in modo analogo riscontrò il Golgi ([10]) nei corpi striati e nei prolungamenti nervosi delle cellule di Purkinje, in un caso in cui esisteva, quale dato etiologico, l'abuso di alcoolici.

— Parmi quasi superfluo, a questo punto, far rilevare ancora una volta, nella I Osvazione, quella intima successione morbosa tra gli elementi essenzialmente nervosi, e le cellule nevrogliche e i vasi.

Già enunciammo poco innanzi la importanza, nel caso in esame, delle alterazioni del sistema vascolare delle meningi e della sostanza nervosa, in rapporto alla

([1]) Algemeine Zeitschr. für Psych. Bd, 20. Heft. 4.

([2]) Archiv de Physiol. etc. Paris, 1875, p. 226.

([3]) *Ueber traumatische Encephalitis. Studien aus dem Institut für experimentelle Pathologie,* in Wien, 1869.

([4]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 69.

([5]) Wiener med. Jahrbücher von Stricker. 1872, p. 272.

([6]) Arch. für Path. Anat. et. Bd. 63.

([7]) Vierteljarhschrift für Phsych., 1868, p. 385.

([8]) Vierteljarhschrift für Phsych., 1868, 1 Heft, p. 56.

([9]) Arch. für pathol.-anat. etc. Bd. 57, 1873.

([10]) Loco cit. Rivista clinica di Bologna, 1874.

genesi così del considerevole sviluppo e delle modificazioni nutritive dello stroma interstiziale, come dei processi regressivi degli elementi nervosi. A parte se il considerevole aumento dello stroma nevroglico possa essere ad un tempo causa ed effetto delle alterazioni della sostanza nervosa, gl'intimi rapporti anatomici esistenti tra le cellule aracnoidi e i vasi sanguigni, oltre i molteplici argòmenti a questo riguardo poco innanzi considerati, fanno assai ragionevolmente supporre che quelle abbiano subìto direttamente, e per le prime, le conseguenze degli alterati processi osmotici, che devonsi necessariamente realizzare in un sistema vascolare così profondamente leso.

Le modificazioni nutritive che per tal modo si generano nelle cellule nevrogliche, devono svolgere una anormale influenza sugli elementi nervosi, con i quali contraggono relazioni così immediate. Le alterazioni degli elementi nervosi pertanto, che con i vasi sanguigni possono assumere ad un tempo rapporti diretti, a traverso le arborizzazioni protoplasmatiche, potrebbero svolgersi ancora direttamente e primitivamente, passando per le diverse fasi, dalla tumefazione iperplastica all'atrofia.

Di tal che allora le lesioni dei vasi sanguigni; la leptomeningite cronica della convessità, e la simultanea encefalite interstiziale e parenchimale inegualmente distribuite; la iperplasia del tessuto interstiziale e i processi regressivi degli elementi nervosi parallelamente procedenti, non rappresentano che una filiazione intima di fatti anatomo-patologici.

Nella Osservazione II, per contrario, è assai probabile che l'affezione sia intrinsecamente esordita nel tessuto interstiziale, e che in ragione diretta dell'avanzarsi delle alterazioni regressive degli elementi nervosi, sia progredito lo sviluppo dello stroma nevroglico; onde i reperti isto-patologici da noi rinvenuti debbonsi, forse, riguardare come risultati di una encefalile interstiziale a lento decorso.

Se, pertanto, si voglia considerare da una parte come nel caso in esame venga meno quella intimità di rapporti riscontrata nella I Osservazione, tra gli elementi essenzialmente nervosi e le cellule nevrogliche, fra i quali esistono senza dubbio relazioni sia anatomiche che funzionali. E se si voglia considerare, d'altra parte, che nella Osservazione II, con il notevole sviluppo delle cellule aracniformi nelle zone più profonde della sostanza grigia, coincidono invece alterazioni prevalenti nei prolungamenti funzionali, e nella metà esterna della corteccia, sorge forse non ingiustificato il dubbio se un vero e completo rapporto di corrispondenza e di causalità esista tra queste lesioni; o se non si debba pensare invece, per una certa parte, a una alterazione primordiale delle fibre nervee, realizzata *in situ* da un processo speciale, il quale nello stroma di sostegno inizia ad un tempo così spiccate modificazioni nutritive.

Questa non è che una ipotesi, emessa con la più grande riservatezza; però essa trova un certo appoggio così nei reperti isto-patologici da noi rinvenuti, come nelle condizioni etiologiche (*intossicazione alcoolica*) del II e III Caso occorsi al nostro studio. Ed essa trova ancora un certo appoggio nel concetto di coloro i quali, in rapporto a condizioni etiologiche diverse, al diverso modo di insorgere e di progredire della malattia, in rapporto a condizioni speciali del sistema nervoso nei varî casi, ritengono come substrato anatomo-patologico, nella paralisi generale, un processo degenerativo diffuso nelle parti più diverse, e talvolta in singoli elementi del sistema nervoso (sistemopatia degenerativa).

E forse in questo concetto noi possiamo ritrovare ad un tempo la chiave per una verosimile interpretazione della singolarità di alcuni reperti anatomici, nella Osservazione che ci occupa; qual'è quello massimamente riguardante il modo di distribuzione dell'alterazione nel tessuto nervoso, la quale, lungi dal riscontrarsi confluente e come a focolai nell'area delle circonvoluzioni, si rinviene invece disseminata quasi in singoli elementi. Tale singolare maniera di distribuzione rende assai difficile spiegarne in qualunque altro modo la genesi, poichè è sempre disagevole comprendere come mai possa accadere un deperimento di elementi in quella guisa disseminato.

Riguardo alla III Osservazione, in fine, le cui lesioni si riferiscono essenzialmente ai prolungamenti funzionali, con partecipazione quasi incalcolabile dei corpi gangliari e delle ramificazioni protoplasmatiche, e senza che nel tessuto interstiziale sia visibile anormale modificazione, è necessario riconoscere nella sostanza nervosa del cervello la esistenza di un'alterazione essenzialmente parenchimale.

Una ipertrofia dei cilindrassili, che nella sua configurazione istologica ricorda assai da vicino quella rinvenuta nella Osservazione in esame, riscontrava Hayem in due casi di mielite acuta centrale e diffusa, come pure in mieliti prodotte sperimentalmente negli animali; i filamenti assili ipertrofici poterono essere seguiti nella midolla spinale, fino al loro passaggio nelle radici. Analoga ipertrofia dei cilindrassili, come innanzi ho ricordato, avemmo a riscontrare Golgi ed io nei nervi periferici, radici spinali e corteccia cerebellare, in un caso assai interessante di paralisi di Landry.

3.° Ad un terzo quesito: quali rapporti, dal punto di vista della *fisio-patologia* e dell'*etiologia*, esistono tra queste lesioni e il complesso sintomatico riscontrato nelle differenti Osservazioni occorse al nostro studio, ci limiteremo a rispondere assai brevemente.

Già nel corso del lavoro cercammo di determinare, qua e là, il rapporto che esiste tra alcune lesioni anatomiche, e i corrispondenti disordini funzionali, sia somatici che psichici. Del resto molto facile cosa è rilevare la grande importanza di queste alterazioni della corteccia cerebrale, nella produzione dei disordini più diversi sia della sfera psichica, sia della sfera sensitivo-motrice, perchè sulla fisio-patologia di tali alterazioni io non abbia bisogno di intrattenermi a lungo.

Sono assai lungi dal disconoscere qui ciò che io ampiamente dimostrai in altro mio lavoro (1), quale interessante e complessa significazione, cioè, abbiano le alterazioni primordiali del sistema nervoso periferico, nella produzione di disturbi riguardati per troppo lungo tempo come dipendenti da lesione dei centri nervosi; e assai lungi del pari sono dal non adeguatamente valutare la importanza delle lesioni spinali, bulbari e mesocefaliche, nella produzione di disordini così della sfera motrice e sensitiva, come della motilità riflessa.

Sulla base incontestabile pertanto dei differenti reperti anatomici della corteccia cerebrale, nella I e II Osservazione; sulla base della ubicazione diversa, nei due casi, del processo morboso sulla superficie emisferica del cervello, e del differente complesso sintomatico che parallelamente vi corrisponde, a noi stringe obbligo di mettere in evi-

(1) Annali di nevrologia, 1891.

denza, come in queste lesioni di determinate zone della corteccia cerebrale, devesi sicuramente ricercare una delle maggiori cause delle differenti modalità cliniche che la paralisi generale progressiva presenta nei due soggetti. E ci stringe obbligo di mettere in evidenza ad un tempo, come un rapporto genetico sia innegabile fra i disordini della sfera psichica, e la costante lesione riscontrata nella parte anteriore del cervello, per quanto oscurissimo possa essere il meccanismo con cui essi si svolgono; e per quanto difficile problema sia la interpretazione di fenomeni di ordine psichico.

Fatti patologici osservati nell'uomo (Pitres, Nothnagel, Ogle, Verneil, Colella), e ricerche sperimentali su animali per parentela più affini all'uomo (Bianchi, Ferrier), dai quali emana come le lesioni dei lobi frontali portano una specie di degenerazione mentale, assai più conspicua che non la estirpazione di qualunque altra zona corticale; — Fatti desunti dalla patologia e dall'anatomia patologica delle malattie mentali, per i quali negli idioti, i cui lobi frontali sono imperfettamente sviluppati, le facoltà intellettive e riflessive sono del pari deboli e imperfette; così come nei dementi e nelle molteplici forme mentali degenerative sono caratteristiche le affezioni dei lobi frontali; — Fatti forniti dalla storia naturale evolutiva del sistema nervoso nelle diverse specie animali, i quali ci apprendono come le regioni frontali sono rudimentali negli animali inferiori, la cui intelligenza è del pari proporzionalmente sviluppata; e come lo sviluppo dei lobi frontali raggiunge il suo più alto grado nell'uomo più intelligente..... ci apprendono, nel loro insieme, questi fatti così armonicamente concordi, come i lobi prefrontali del cervello rappresentano la sfera delle più elevate manifestazioni della intelligenza, delle più complesse funzioni psichiche.

Di quale alta importanza inoltre, dal punto di vista della fisio-patologia dei disordini della sfera motrice, riscontrati nei due paralitici, siano le lesioni delle circonvoluzioni rolandiche in entrambi i casi, e massimamente poi quelle dell'*insula* nella I Osservazione, io non dirò oltre, tra il tempo che innanzi ne sospinge rapidamente, e il ricordo di avere già, nel corso di questo lavoro, toccato tale argomento.

Certamente neppure qui va dimenticata quale parte interessante, nella produzione dei disordini del linguaggio e della mimica, possono assumere così le lesioni dell'ipoglosso e del facciale, come quelle dei loro nuclei bulbo-protuberanziali di origine.

Se non che, ancora nei nostri soggetti, è pur sempre considerevole come questi due complessi sintomatici della sfera ipoglosso-facciale, alterati in modo così caratteristico e quasi patognomonico, nel loro graduale andamento ci chiariscono non solo la indole fatalmente progressiva del processo paralizzante, ma, più che ogni altra cosa, mettono in una sorprendente evidenza, come la prima e fondamentale alterazione, sia sempre nella qualità psichica e nella qualità psico-motrice di questi atti combinati, restando ultima nel quadro sintomatico la lesione motrice grossolana (la paralisi).

In un soggetto pertanto (I Osservazione), su cui già la indagine clinica e il tavolo anatomico segnalavano tanta copia di fatti interessanti, non senza ben giustificata ragione, sopra una serie assai numerosa di preparati, noi portammo speciale attenzione sul contegno di quei prolungamenti nervosi, nelle circonvoluzioni dell'*insula*, i quali da cellule di differenti strati della corteccia ascendono verso la zona sottomeningea della sostanza grigia. E per la qualità dei reperti quivi riscontrati, come ampiamente

esposi nel corso del lavoro, è forse possibile azzardarsi ad assegnare una base anatomica a fatti normali e patologici, finora invano spiegati.

Ben a ragione pertanto Tuczek (Neurolog. Centralbl. 1883), studiando nella paralisi progressiva il contegno di quello strato di fibre midollari, rinvenuto da Exner alla periferia delle circonvoluzioni cerebrali, e da questo Autore considerato come appartenente ad un sistema di associazione fra le diverse stazioni cellulari della corteccia, rilevava la considerevole distruzione di questi fasci midollati nel lobo frontale e nell'*insula*, e segnalava la importanza di questo reperto.

Tali conoscenze da una parte, e dall'altra quelle che ci forniscono l'anatomia clinica, e le ricerche così anatomiche che sperimentali, ci permettono forse di comprendere come possa effettuarsi l'intimo legame che esiste tra le funzioni spettanti alle diverse provincie della corteccia cerebrale. L' interesse straordinazio di questi fatti emana appunto dalla cognizione della dignità funzionale dei lobi frontali del cervello, e ad un tempo dalla conoscenza che appunto nei lobi frontali e nell'*insula*, ha sede la facoltà del linguaggio.

Le fibre decorrenti in queste regioni costituiscono le vie per le quali si acquistano le idee, che esprimonsi poi con la parola o con la mimica. E poichè ogni idea di alto grado non è che la risultante di un'insieme di singole idee elementari fra loro collegate, così come le più alte funzioni psichiche risultano, nella loro primitiva essenza, dalla normale associazione dei prodotti funzionali delle singole aree sensoriali, è agevole comprendere la elevata significazione fisiologica di queste fibre, come sistema di associazione.

Alterato il sistema di associazione, è pure alterata la normale connessione delle idee elementari; le idee più complesse non hanno più origine, e la debolezza mentale insorge. Questo fatto trova il suo riscontro, nella fisiologia sperimentale, in quel profondo abbassamento della intelligenza riscontrato da Luciani (1) dopo l'asportazione della porzione posteriore del lobo parietale nei cani, o, più precisamente, di quella zona che Munk chiamò *regione degli occhi*. Evenienza che, secondo quell'eminente osservatore, deve riferirsi alla perdita che l'animale ha subìto di quella importantissima parte della corteccia, in cui si compie la conglobazione dei singoli centri sensoriali, rimossa la quale, viene necessariamente a mancare la normale *associazione delle percezioni e delle immagini psichiche.*

Alla lesione di queste fibre di associazione è dovuta del pari la cecità psichica di Munk; poichè in un centro visivo può formarsi solamente una semplice rappresentazione visiva a due dimensioni; la terza dimensione (altezza), e il rilievo degli oggetti sono idee più complesse, le quali possono solo organizzarsi mediante associazione con i movimenti intenzionali degli occhi e con le innumerevoli rappresentazioni sensitive, con le quali noi apprendemmo a distinguere i corpi.

In base a questa serie di fatti sperimentali e anatomo-clinici così armonicamente concordi, e sulla guida di tutte insieme queste cognizioni fisio-patologiche, di alcune delle quali noi, applicando i metodi di Golgi, contribuimmo a fornire una dimostrazione rigorosamente anatomica, non credo possa apparire inverosimile che la debolezza

(1) Luciani e Seppilli. — *Le localizzazioni funzionali del cervello.* Napoli, 1885.

mentale, l'abolizione intellettuale e l'afasia, nel I dei soggetti occorsi al nostro studio, e forse nella più parte dei casi di demenza paralitica, possano essere una conseguenza così delle lesioni anatomiche prevalenti nei lobi pre-frontali del cervello, come dell'alterazione o della scomparsa, in diverso grado, delle fibre midollari decorrenti sulla corteccia dell'organo del linguaggio.

— E dal punto di vista, infine, delle *condizioni etiologiche*, della I Osservazione io non parlerò, poichè è superfluo, per non dire altro, fermarsi sulla speciale importanza etiologica che ha la *infezione sifilitica*, la quale può non solo diminuire la capacità di resistenza del cervello (malattie dei vasi), ma è capace di produrre direttamente una encefalite interstiziale cronica. Solo per chi avesse vaghezza di conoscere, in base a dati statistici scientificamente raccolti, quale condizione etiologica frequente ed interessante, anatomicamente e clinicamente, sia la infezione sifilitica nella paralisi progressiva, espongo in rapido sunto un recente lavoro di Thomsen (1) sulla demenza paralitica:

« Su 416 paralitici della popolazione di Berlino, in $^1/_5$ dei casi si rinvenne lesione dei cordoni posteriori, in circa $^1/_3$ erano lesi i cordoni laterali.

Di 104 di questi infermi, 51 ebbero sicuramente la sifilide.

Su 24 paralitici, a Bonn, 66 °/₀ presentarono lesioni nei fasci posteriori, 25 °/₀ nei fasci laterali, 9 °/₀ erano immuni da alterazione spinale; 62 °/₀ avevano certamente la sifilide. Di questi ultimi 70 °/₀ mostrarono lesioni nei cordoni posteriori, 20 °/₀ nei cordoni laterali.

I paralitici con sclerosi posteriore ammalarono all'età di 40 anni, 14 anni dopo la infezione sifilitica; quelli con sclerosi laterale all'età di 30 anni, a 7 anni dalla infezione sifilitica.

70 °/₀ di paralitici con sclerosi posteriore, e 50 °/₀ di quelli con sclerosi laterale, o con midolla sana, erano sifilitici certamente ».

Ben differente corre la cosa nelle Osservazioni II e III, la cui condizione etiologica è rappresentata dalla *intossicazione alcoolica.*

È generalmente noto quale funesta azione sul sistema nervoso abbia la intossicazione acoolica, e quale grande influenza le si debba attribuire nella etiologia della demenza paralitica. E noi sappiamo come l'alcoolismo cronico può trasformarsi in una speciale forma di paralisi progressiva (*paralisi alcoolica* o *pseudo-paralisi*), la quale ha una assai grande somiglianza con la *paralisi classica.*

Una diagnosi differenziale fra queste due forme morbose, è cosa assai difficile, e la concomitanza del tremore specifico degli alcoolizzati, il decorso relativamente acuto, la maggiore frequenza degli accessi apoplettiformi ed epilettoidi, la cefalea intensa, la maggior frequenza delle anestesie e delle iperestesie, la relativa rarità delle idee di grandezza, la prognosi meno fosca..... sono caratteri differenziali che solo in pochi casi hanno valore diagnostico.

A parte pertanto se i semplici disturbi circolatorî del cervello, così frequenti nell'alcoolismo cronico, siano sufficienti a riprodurre essenzialmente il quadro sintomatico della paralisi generale, e se per conseguenza, in alcuni casi, le paralisi alcooliche

(1) Allg. Zeitsch. f. Psychiat. XLIV, 5, 1891.

altro non siano che pseudo-paralisi generali curabili, o se si vuole delle *paralisi generali* che si potrebbero chiamare *funzionali*, in opposizione alla paralisi classica, che è di natura essenzialmente organica (Régis ecc.); — A parte se la possibilità di una guarigione della demenza alcoolica dimostri che in essa le lesioni anatomiche non sono a tutta prima irremovibili, come inizialmente e fatalmente lo sono nella paralisi classica; — A parte, infine, se tra quella e la vera paralisi generale, sia pur lontanamente giustificato stabilire la stessa differenza che intercede tra la vera afasia, originantesi da una lesione organica, e quell'abolizione lieve e fuggevole della parola e del movimento, dovuta ad un semplice disturbo circolatorio del cervello (ischemia cerebrale funzionale di Ball), a noi i limiti di questo lavoro non consentono, per ora, che mettere in evidenza solo alcuni dettagli di fina anatomia, che nelle due Osservazioni in esame rivelano fra loro una intima corrispondenza, per quanto non facile problema sia l'adeguata interpetrazione di essa.

Nella Osservazione II, in effetti, alle spiccate alterazioni dei prolungamenti nervosi (ipertrofia varicosa), non sono corrispondenti nè quelle dei corpi gangliari, nè quelle delle ramificazioni protoplasmatiche; così come poco innanzi vi studiammo non corrispondenti le lesioni del tessuto interstiziale al contegno del sistema vascolare. Parimenti nella Osservazione III: lesioni non rilevabili dello stroma di sostegno o della rete vascolare. I prolungamenti funzionali invece si presentano singolarmente mente anormali, ora nel modo di origine, di decorrere e di ramificarsi, ora nell'aspetto del loro contorno e nelle variazioni di diametro. Nessun rapporto di solidarietà fra il contegno dei prolungamenti nervosi e quello del protoplasma cellulare o delle arborizzazioni protoplasmatiche.

Quantunque di molti fatti ancora, nelle condizioni attuali delle conoscenze, più che indagare la ragione, noi non possiamo che constatare la esistenza, pure al cospetto di tale intima corrispondenza, così nella sede come nella natura dell'alterazione, nei due differenti casi, sorse in noi la opinione, credo non ingiustificata, di dover ricercare nelle condizioni etiologiche (la intossicazione alcoolica) un certo contributo alla soluzione del quesito che ne occupa. Non sembrerà audace pertanto pensare (bene inteso con doverosa riservatezza), che allo stesso modo come la rigorosa osservazione clinica può, in alcuni casi, in un certo periodo della malattia, pervenire ad una diagnosi differenziale fra la paralisi classica e la pseudo-paralisi, così forse ancora la fina anatomia patologica può, nel contegno dei prolungamenti funzionali e protoplasmatici, e in tutto insieme il complesso anatomico, fornire in qualche modo la chiave per la soluzione di un quesito, che così altamente interessa l'anatomia clinica, e la fisio-patologia delle malattie mentali.

4.° Toccherò un'ultima questione d'istologia e fisiologia normale, ed ho finito:

Queste alterazioni dei vasi sanguigni del cervello, nella paralisi progressiva, le quali svolgonsi per loro intrinseca autonomia, e le lesioni dei prolungamenti protoplasmatici, che per proprio conto progrediscono parallelamente, costituiscono esse un fatto del tutto fortuito, ovvero fra loro vi ha un diretto rapporto di causalità?

È questo forse un quesito che merita nuove ricerche.

Le nostre conoscenze attuali non ci autorizzano ad alcuna conclusione assoluta;

ma se il fatto da noi riscontrato, per sè solo non possiede valore decisivo, potrà, se non altro, servire di appoggio a ricerche ulteriori su tale argomento.

Poichè, se negli studî biologici è oramai assioma incontestato che la funzione è in intimo rapporto colla organizzazione, e che le differenze di funzione sono sempre legate a differenze di organizzazione, lo ammettere la esistenza di una qualche alterazione funzionale, ove l'organo si presentò abnorme, è indiscutibile. Che anzi, poichè la malattia produce sovente alterazioni che degli organi rivelano le più intime particolarità di tessitura e di attribuzione, meglio di ciò che possa fare il più abile istologo o fisiologo, appunto in queste, a così dire, omologie isto-patologiche tra i vasi sanguigni e i prolungamenti protoplasmatici, e in questo così diverso contegno che i prolungamenti nervosi e i protoplasmatici assumono dinanzi ad uno stesso processo morboso, devesi ricercare un certo contributo alla soluzione di alcuni quesiti, intorno ai quali le nostre conoscenze attuali non ci autorizzano ancora ad alcuna conclusione assoluta.... intendo dire *il finale contegno e la significazione funzionale dei prolungamenti protoplasmatici.*

È questa una quistione tra le più dibattute nella scienza. Elevata quasi a prova d'ingegno e di acutezza indagatrice di molti tra i più eminenti osservatori, si rimane meravigliati dinanzi al poco accordo che esiste fra loro, non ostante che desunto da un numero notevole di ricerche recentissime, condotte con acume di osservazione maraviglioso.

I più diversi argomenti vi si contrastano il campo, e rimane sempre aperto a nuova discussione il quesito, se cioè le ramificazioni protoplasmatiche abbiano una significazione funzionale nervosa (Van Gehuchten (1), Ramón y Cajal, Kölliker dell'87 (2) ecc.), ovvero se il cómpito loro lo si debba invece ricercare dal punto di vista della nutrizione del tessuto nervoso (Golgi, Sala, Martinotti, Toldt (3) ecc.).

I primi, in favore della natura nervosa dei prolungamenti protoplasmatici, espongono i seguenti argomenti: 1.° Il modo di comportarsi di fronte all'analisi chimica, sensibilmente identico tanto per il corpo cellulare che per i prolungamenti protoplasmatici (Kühne). — 2.° Che talvolta dal prolungamento protoplasmatico stesso, a qualche distanza dal corpo gangliare, emana il filamento nervoso (Golgi, Ramón, Kölliker). — 3.° La somiglianza di tutti i prolungamenti fra loro, così perfetta in alcune cellule (strato granuloso del bulbo olfattorio, retina, simpatico dei vertebrati), che il distinguere uno speciale prolungamento funzionale sarebbe impossibile (Ramón y Cajal). — 4.° Che quelle cellule, le quali sono sparse nella rete nervosa del corion della lingua, emanano un prolungamento verso il centro, ed altri, arborizzati, all'epitelio (Fusari e Panasci (4)). — 5.° Il contegno delle *cellule a pennacchio* (*células empenachadas*) del bulbo olfattivo, nel quale la trasmissione nervosa, dalla cellula bipolare della mucosa olfattiva alla grande cellula mitrale, e da questa al cervello, si

(1) *Les découvertes récentes dans l'anatomie et l'histologie du sistème nerveux central.* Bruxelles, 1891.

(2) *Ueber Golgi's Untersuchungen den feineren Bau des centralen Nervensystems betreffend,* 1887.

(3) Lehrbuch der Gewebelehre, 1888.

(4) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXV, p. 836.

compie nel glomerulo olfattivo, per contatto, fra le branche terminali della fibrilla olfattiva, e quelle del prolungamento protoplasmatico della cellula mitrale (S. e P. Ramón y Cajal (1).

Se non che, basta considerare da una parte che già il Golgi (2) aveva visto arrivare ai glomeruli, oltre i prolungamenti protoplasmatici della cellula mitrale, anche i prolungamenti nervosi di altre cellule a pennacchio del bulbo olfattivo, assai più piccole di quelle segnalate da Ramón, e che perciò potrebbe a questi filamenti essere riservata la funzione nervosa, e non ai prolungamenti protoplasmatici delle cellule a pennacchio maggiori. Basta considerare che le arborizzazioni protoplasmatiche degli elementi gangliari del corion della lingua sono state finora troppo poco studiate, perchè del loro contegno si possa avere un concetto adeguato e sicuro. E d'altra parte basta riflettere che i prolungamenti delle cellule gangliari nè nella retina, nè nello strato granuloso del bulbo olfattorio furono visti arborizzarsi, così come fanno i prolungamenti protoplasmatici, onde il ravvicinamento non regge (Waldeyer (3)), e che recentemente il Sala (4) ha assai chiaramente dimostrato il contegno isto-morfologico dei prolungamenti cellulari nei gangli del simpatico dei vertebrati, per avere la prova più eloquente così della incertezza degli argomenti tendenti a dimostrare la natura nervosa dei prolungamenti protoplasmatici, come delle difficoltà intrinseche al problema medesimo, il cui esame analitico fin qui è forse rimasto ancora di molto inferiore alla complessità del fenomeno.

I fatti che seguono, per contrario, parlano contro la funzionalità nervosa dei prolungamenti protoplasmatici, e offrono una base anatomica per giudicare della loro significazione fisiologica:

1.° Il passare assai frequente dei dendriti dalla sostanza grigia alla bianca, attraversandola talora per intiero, fino alla superficie; se essi fossero di natura nervosa, non attraverserebbero tale quantità di elementi nervosi, senza contrarre rapporto con alcuni di essi.

2.° La mancanza di connessioni nelle ramificazioni protoplasmatiche, sia fra loro, sia cogli elementi nervosi (Golgi).

3.° La tendenza dei prolungamenti protoplasmatici a portarsi in località, nelle quali le fibre nervose mancano assolutamente (Golgi, Martinotti).

Così all'estremo limite sotto-meningeo della corteccia cerebrale, dove, contrariamente alle affermazioni di Kölliker, di Waldeyer e di Pertik, Golgi (5) e Martinotti (6) dimostrarono la esistenza costante d'uno straticello di cellule nevrogliche, assolutamente

(1) S. Ramón y Cajal. — *Origen y terminación de las fibras nerviosas olfatorias.* Gaceta sanitaria Municipal de Barcelona, 10 Diciembre 1890.

— Pedro Ramón y Cayal. — *Estructura del bulbo olfatorio de las aves.* Gaceta sanitaria Municipal de Barcelona, 1890, n. 13.

(2) *Sulla fina struttura dei Bulbi olfattorii.* Reggio Emilia, 1875.

(3) *Ueber einige neuere Forschungen im Giebete der Anatomie des Centralnervensystems.* Leipzig, 1891.

(4) Comunicazione e dimostrazione microscopica fatte alla Società Medico-Chirurgica di Pavia, nella tornata del 9 luglio 1892.

(5) *Sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso.* — Reggio-Emilia, 1885, p. 25.

(6) *Contributo allo studio della corteccia cerebrale ed all'origine centrale dei nervi.* — Torino, 1889.

nudo di fibre nervose, nel quale si terminano i prolungamenti dell'apice delle cellule piramidali. Così del pari nella *fascia dentata del grande piede d'Ippocampo*, dove i prolungamenti protoplasmatici, con legge invariabile, attraversano tutto lo strato grigio formante la fascia dentata, per terminare alla superficie di essa, la quale è sprovvista di fibre nervose ed è limitata, oltre che da un vase sanguigno, da uno straticello di cellule nevrogliche.

4.° Le connessioni dei dendriti con le gliacellule e con i vasi (Golgi, Sala); fatto che completa e spiega la proposizione precedente, la quale, da sola, non avrebbe che un valore indiretto, per dimostrare la funzione dei prolungamenti protoplasmatici. Già Golgi nella zona marginale della corteccia delle circonvoluzioni, e nella fascia dentata, forniva prova evidente così dei rapporti esistenti fra le cellule nevrogliche e le ultime propaggini dei filamenti protoplasmatici, come della inserzione diretta di questi alle pareti dei vasi, mediante una tenue espansione.

Inoltre recentemente il Sala (1), nelle cellule nervose dell'*alveus*, metteva nuovamente in rilievo le connessioni anatomiche dei prolungamenti protoplasmatici, già trovate da Golgi, con gli elementi della nevroglia e con i vasi, e riconfermava la loro natura trofica.

A tale punto sono fino ad oggi le conoscenze su questo argomento, e mi lusingo di avere riprodotto, con la maggiore esattezza, il concetto dei singoli autori.

Io sono ben lungi dal presumere di colmare una lacuna nella scienza, però in un campo di studî così vasto e così contrastato, non credo disutile tener conto del modesto contributo di alcune particolarità di anatomica organizzazione ripetutamente messe in evidenza, e di tener conto di conclusioni, le quali sono lontane dalla sfera delle ipotesi.

Il fatto da noi rinvenuto, e che credo non vada dimenticato, si appartiene alla I Osservazione, nella quale, mentre le alterazioni sia delle pareti e del lume dei vasi, come delle guaine linfatiche perivascolari, sono di così alto grado, nelle cellule gangliari rinvengonsi lesioni di molto più diffuse nelle diramazioni protoplasmatiche, che non nel prolungamento nervoso. E, in un numero non insignificante di cellule, è oltre a ciò rilevabile come più avanzate sono le alterazioni nelle ultime ramificazioni dei prolungamenti protoplasmatici, che non nei grossi tronchi e nel corpo cellulare.

Sarebbero probabilmente questi fatti sfuggiti a qualunque considerazione, se le Osservazioni II e III, realizzando condizioni anatomo-patologiche presso che opposte, nel modo di comportarsi così dei vasi come degli elementi gangliari, non vi avessero, con il loro contegno negativo, richiamata l'attenzione.

Nelle osservazioni II e III, in effetti, mentre di lesioni vasali vi ha assenza o quasi, omologamente le ramificazioni protoplasmatiche si mostrano presso che nelle normali condizioni, laddove i prolungamenti funzionali sono la sede di alterazionis piccate.

Questi due fatti pertanto che, neganti fra loro, affermano, ci condussero all'opinione che fra il contegno delle arborizzazioni protoplasmatiche e quello dei prolungamenti funzionali, non esistano quei costanti rapporti di solidarietà, per la quale

(1) *Contributo allo studio della fina anatomia del grande piede d'Ippocampo.* — Archivio per le Scienze mediche, N. 3, 1891, pag. 263.

essi o non rivelano alterazione degna di rilievo, o simultaneamente la mostrano in tutto il loro decorso e nelle loro più sottili ramificazioni. — Un sicuro rapporto di causalità, per contrario, è evidente fra le lesioni del sistema vascolare della corteccia delle circonvoluzioni, e quelle che nei prolungamenti protoplasmatici svolgonsi parallelamente; rapporto di causalità che ancora più evidente appare e negli strati di mezzo della corteccia, e nelle più fine e periferiche ramificazioni protoplasmatiche, rispetto ai grossi tronchi e al corpo cellulare.

Mentre però il primo di tali reperti è in relazione con un fatto di grande interesse fisiologico, messo in evidenza dai recenti studii anatomici sulla circolazione del cervello, per cui gli strati medii e profondi, che sono i più vascolarizzati della corteccia cerebrale, sono anche i più ricchi di cellule nervose (Duret); l'altro pare che riveli il modo d'invasione del processo morboso, e che essenzialmente significhi come l'alterazione, nella sua origine, incominciò nelle ultime ramificazioni protoplasmatiche (le quali con i vasi sanguigni e con gli elementi nevroglici contraggono rapporti così intimamente diretti), donde avanzò poi nelle parti più centrali. — Senza toccare a questo punto le proposte conciliative di Kölliker [1], in verità poco simpatiche, di considerare cioè i prolungamenti protoplasmatici come elementi nervosi in alcuni casi, trofici in altri, sul fondamento di tutto l'insieme dei fatti innanzi ricordati, acquistati alla scienza in modo positivo, a noi pare che negando ai prolungamenti protoplasmatici una funzionalità trofica, non solo molte quistioni di fisiologia verrebbero ad oscurarsi, ma, quel che più monta, molti fatti anatomici e anatomo-patologici rimarrebbero invano spiegati.

Poichè pertanto a differenze isto-morfologiche e patologiche, devono necessariamente corrispondere differenze funzionali, non sembrerà audace desumere, da tutto l'insieme di questi fatti, le annotazioni che seguono:

a) Che vi sono dati caratteristici, così isto-morfologici che patologici, per distinguere fra di loro i prolungamenti protoplasmatici e i nervosi, e che una significazione fisiologica ben diversa è da attribuirsi agli uni e agli altri.

b) Che i prolungamenti protoplasmatici nessuna parte prendono alla formazione delle fibre nervose; e che hanno invece rapporti intimi con le cellule nevrogliche e con i vasi sanguigni.

c) Che, rispetto alla significazione funzionale delle arborizzazioni protoplasmatiche, il cómpito loro lo si deve ricercare dal punto di vista della nutrizione del tessuto nervoso; e che più precisamente esse rappresentano le vie per cui il plasma nutritizio si porta, dai vasi sanguigni e dalle cellule nevrogliche, agli elementi essenzialmente nervosi [2].

(1) *Zur feineren Anatomie des centralen Nervensystems. II. Beitrag: Das Rückenmark.* Zeitschr. f. wissensch. Zoologie, 51 Band, 1890.

— *Vortrag auf der Anatomenversammlung in München.* Verhandlungen der anat. Gesellschaft V, Anatomischer Anzeiger, 1891.

(2) Nel *Lophius piscatorius* Golgi ha potuto constatare che i vasi sanguigni formano come un reticolo intorno alle cellule nervose, e che talvolta i rami capillari attraversano il corpo protoplasmatico stesso della cellula, nel modo già segnalato da Ussow (Arch. de biologie, III, 1882) e da Fritsch (Arch. mikr. Anat., 1886), e confermato ultimamente da Rohde (Arch. mikr. Anat., 1893)

VII.

Riassunto.

Idea direttiva generale del lavoro fu: Studiare il mantello cerebrale, nelle malattie mentali, con nuovi metodi di indagine che fornissero la chiara dimostrazione così degli intimi dettagli riguardanti la forma, rapporti e misura di distribuzione delle cellule nevrogliche, come delle minute particolarità relative agli elementi gangliari, e al contegno delle più fine e periferiche ramificazioni dei prolungamenti sia protoplasmatici che nervosi.

Tali metodi furono segnatamente quelli al nitrato d'argento scoperti da Golgi. — In questa prima Comunicazione sono riferiti i seguenti reperti isto-patologici riguardanti la *Demenza paralitica* e la *Psicosi alcoolica*.

Osservazione I. *Paralisi generale progressiva con infezione sifilitica.* — Nelle circonvoluzioni fronto-parietali e in quelle dell'*insula* le alterazioni si presentano più evidenti. I *vasi sanguigni* sono quivi la sede di lesioni assai avanzate, e diffuse nei diversi strati della corteccia e nella sostanza midollare (stravasi di sangue nelle guaine linfatiche perivascolari, metamorfosi regressiva degli elementi migrati, formazioni globulari di varia forma e grandezza, assai refrangenti la luce, addossate alle pareti vasali; aneurismi miliari, neoformazione dei capillari). — Analogamente conspicue appaiono le alterazioni degli *elementi nevroglici* (insolita robustezza e aumento numerico delle cellule aracniformi, anormali rapporti e rigonfiamenti a clava dei prolungamenti cellulari d'inserzione alle pareti dei vasi). — Rispetto agli *elementi nervosi* il protoplasma cellulare e i prolungamenti protoplasmatici, dalla tumefazione iperplastica all'atrofia avanzata, presentano fasi diverse di metamorfosi regressiva. I prolungamenti nervosi invece si mostrano più resistenti, e non sono che solo in pochi elementi e solo più tardi distrutti. Le fibrille nervee, emananti da tali prolungamenti, riproducono qua e là alcuni dei caratteri riscontrati in questi ultimi (aspetto granuloso, frequenti nodosità, ecc.).

Osservazione II. *Demenza paralitica con intossicazione alcoolica.* — I lobi prefrontali e il segmento superiore delle circonvoluzioni rolandiche sono la sede di lesioni avanzate. Nessuna alterazione apprezzabile delle pareti o del lume dei vasi, nessuna neoformazione dei capillari. Non è nettamente rilevabile un aumento numerico delle cellule nevrogliche; solo quelle normalmente esistenti vi appaiono molto più evidentemente che nello stato ordinario: esse sono ipertrofiche. — Della sostanza nervosa, i prolungamenti cilindrassili sono decisamente anormali, ora nel modo di origine, di decorrere, di ramificarsi, ora nell'aspetto del loro contorno e nelle variazioni di diametro (rigonfiamenti moniliformi ecc.).

---

così nel *Lophius* come in alcuni Molluschi. — Ebbene, in questi elementi gangliari i prolungamenti protoplasmatici mancano del tutto (cellule unipolari), o sono affatto rudimentali.

Mi sono permesso trascrivere questa comunicazione verbale fattami giorni addietro dal prof. Golgi, poichè parmi che tale osservazione apporti nuova luce su questa oramai tanto dibattuta quistione della *significazione funzionale dei prolungamenti protoplasmatici.*

Nessun rapporto di solidarietà esiste tra il contegno dei prolungamenti nervosi e quello delle arborizzazioni protoplasmatiche; queste non presentano che alterazioni rudimentali.

Osservazione III. *Psicosi alcoolica.* — Le lesioni si riferiscono essenzialmente ai prolungamenti cilindrassili, con partecipazione quasi incalcolabile dei corpi cellulari e delle ramificazioni protoplasmatiche, e senza che nel tessuto interstiziale o nella rete vascolare si riscontrino anormali modificazioni veramente apprezzabili. Le alterazioni sono qua e là disseminate non a focolai, ma quasi in singoli elementi. Non pare vi sia speciale predilezione del processo morboso per determinate aree corticali.

Sulla guida dei fatti clinici e dei reperti anatomo-microscopici innanzi riferiti, io proporrò, in rapporto ai casi osservati, le *considerazioni* e le *conclusioni* che seguono:

1°. Nella paralisi generale progressiva l'alterazione può intrinsecamente esordire nel tessuto interstiziale, senza che le lesioni dei vasi sanguigni rappresentino sempre il punto di partenza di questa malattia.

— Se la moltiplicazione delle cellule aracniformi, nella demenza paralitica, è un fatto sicuramente giusto, esso lo è solamente in un numero limitato di casi; poichè talvolta soltanto gli elementi nevroglici, normalmente esistenti, possono presentare una insolita robustezza del corpo cellulare, una assai più ricca ramificazione dei loro prolungamenti.

2°. Dal punto di vista della patologia generale e della anatomia patologica, nei diversi elementi della sostanza delle circonvoluzioni si può constatare un complesso di fatti, i quali devonsi nel loro insieme riferire a fasi diverse di disturbi regressivi della nutrizione.

— Una intima successione morbosa anatomica, inoltre, vi ha tra la rete vascolare, le cellule nevrogliche e gli elementi essenzialmente nervosi nella *Osserv. I.* I reperti isto-patologici rinvenuti nella *Osserv. II*, invece, pare debbansi per la più parte considerare come risultati di una encefalite interstiziale a lento decorso; quelli riscontrati nella *Psicosi alcoolica*, in fine, fanno riconoscere la esistenza di un'alterazione essenzialmente parenchimale.

3°. Dal punto di vista dell'etiologia e della fisio-patologia, un rapporto genetico pare innegabile, nelle due prime Osservazioni, tra i disordini delle funzioni psichiche e la lesione della parte anteriore del cervello, come pure tra i disturbi della sfera motrice e le alterazioni delle circonvoluzioni rolandiche. Così l'abolizione intellettuale pertanto, come l'afasia, nel soggetto della 1ª osservazione, possono essere una conseguenza, e delle lesioni anatomiche prevalenti nei lobi prefrontali del cervello, e ad un tempo dell'alterazione delle circonvoluzioni dell'*insula*.

— A condizioni etiologiche diverse (intossicazione alcoolica, sifilide) devonsi, con grande probabilità, attribuire le differenti modalità cliniche e anatomiche che la demenza paralitica può presentare. In base pertanto alla intima corrispondenza, così nella sede come nella natura dell'alterazione, nella paralisi generale da alcoolismo e nella psicosi alcoolica, rispetto alla paralisi classica, non sembrerà audace pensare che forse ancora la fina anatomia patologica, al pari che la osservazione clinica, può talvolta pervenire ad una diagnosi differenziale fra la *paralisi classica* e la *pseudo-paralisi.*

4°. Circa il finale contegno e la significazione funzionale dei prolungamenti protoplasmatici, ci crediamo autorizzati a desumere:

a) Che tra il contegno delle ramificazioni protoplasmatiche, e quello dei prolungamenti nervosi, non esistono costanti relazioni di solidarietà; mentre un sicuro rapporto di causalità appare evidente tra le lesioni del sistema vascolare della corteccia delle circonvoluzioni, e quelle che nei prolungamenti protoplasmatici svolgonsi parallelamente;

b) Che vi sono dati caratteristici, così isto-morfologici che patologici, per distinguere fra di loro i prolungamenti protoplasmatici e i nervosi, e che una significazione fisiologica ben diversa è da attribuirsi agli uni e agli altri;

c) Che i prolungamenti protoplasmatici nessuna parte prendono alla formazione delle fibre nervose; e che hanno invece rapporti intimi con le cellule nevrogliche e con i vasi sanguigni;

d) Che, rispetto alla significazione funzionale delle arborizzazioni protoplasmatiche, il cómpito loro lo si deve ricercare dal punto di vista della nutrizione del tessuto nervoso; e che, con assai probabilità, essi rappresentano le vie per cui il plasma nutritizio si porta, dai vasi sanguigni e dalle cellule nevrogliche, agli elementi essenzialmente nervosi.

Conclusioni (1).

1° Nella *paralisi generale progressiva con infezione sifilitica*, le alterazioni istologiche si riferiscono essenzialmente ai vasi sanguigni, alle cellule nevrogliche, come del pari al protoplasma cellulare e ai prolungamenti protoplasmatici degli elementi nervosi; i prolungamenti *cilinder-axis* non sono che solo in pochi elementi e solo più tardi distrutti. Le fibrille nervee riproducono qua e là alcuni dei caratteri riscontrati nei prolungamenti nervosi (aspetto granuloso, frequenti nodosità, ecc.). — Tali alterazioni intrinsecamente esordiscono nella rete vascolare.

2° Nella *demenza paralitica con intossicazione alcoolica*, è nettamente rilevabile una ipertrofia delle cellule aracniformi, e fasi diverse di disturbi regressivi della nutrizione nei prolungamenti nervosi. Alterazioni rudimentali nei prolungamenti protoplasmatici. Integri, quasi da per tutto, i vasi sanguigni.

(1) Non per dubbiezze sui risultati delle nostre ricerche, ma per il numero delle osservazioni che consideriamo ancora troppo scarso, noi proponiamo queste conclusioni non in modo affatto generale e assoluto. Siamo lieti pertanto di constatare come Klippel et Azoulay (*Des lésions histologiques de la paralysie générale étudiées d'après la méthode de Golgi.* — Arch. de Neurologie, août1894), Dagonet (Soc. de Biologie, 1893), Colucci (Annali di Nevrologia, fasc. 3-4, 1894) ecc., sono consecutivamente pervenuti, per vie diverse, a confermare molti punti fondamentali di questa nostra prima serie di studii, già dimostrati e pubblicati fin dal 1892 (Atti della Società Medico-Chirurgica di Pavia, 11 giugno '92; Gazzetta Medica di Pavia, 15 settembre '92).

Golgi medesimo (*Berl. Klin. Wochens.*, 1894) inoltre, applicando i metodi da lui scoperti ancora una volta all'anatomia patologica degli organi nervosi centrali, ha recentemente descritto le alterazioni delle cellule della corteccia cerebrale, che ha potuto osservare nella rabbia sperimentale.

In fine i risultati positivi di ulteriori nostri studii sulla frenosi senile, sulla corea cronica progressiva associata a demenza ecc., ci incoraggiarono a perseguitare ancora l'argomento.

3° Nella *psicosi alcoolica,* i reperti isto-patologici fanno riconoscere la esistenza di un'alterazione essenzialmente parenchimale, riferentesi ai prolungamenti nervosi, con partecipazione appena apprezzabile dei corpi gangliari e delle ramificazioni protoplasmatiche. Nevroglia e vasi, in generale, di apparenza normale.

4° La intima successione morbosa anatomica, tra la rete vascolare, le cellule nevrogliche e i prolungamenti protoplasmatici, riscontrata nella I Osservazione; il modo analogo di comportarsi delle arborizzazioni protoplasmatiche e dei vasi sanguigni, constatato nelle Osservazioni II e III; il nessun rapporto di solidarietà tra lo stato dei prolungamenti protoplasmatici e di quelli nervosi, fanno, con ogni probabilità, desumere:

a) che una significazione fisiologica ben differente è da attribuirsi agli uni e agli altri;

b) che i prolungamenti protoplasmatici hanno rapporti intimi con le cellule nevrogliche e con i vasi sanguigni, onde il cómpito loro lo si deve ricercare dal punto di vista della nutrizione del tessuto nervoso.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE [1].

Tavola I.

Cellule gangliari della corteccia cerebrale nella *paralisi generale progressiva con infezione sifilitica.* — Metodo al nitrato d'argento di Golgi [2].

FIG. 1-12, 15, 17, 18. — Cellule nervose il cui protoplasma cellulare e i prolungamenti protoplasmatici, dalla tumefazione iperplastica all'atrofia avanzata, presentano fasi diverse di metamorfosi regressiva.

FIG. 14 e 16. — Cellule gangliari il cui prolungamento nervoso mostrasi più resistente, che non il corpo cellulare e i prolungamenti protoplasmatici.

FIG. 13, 19-26. — Varii tipi di cellule nervose, mostranti segnatamente le più svariate alterazioni del prolungamento nervoso.

Tavola II.

Cellule gangliari, fibre nervose, tessuto interstiziale, vasi sanguigni nella *paralisi generale progressiva con infezione sifilitica.* — Processo di Golgi e comuni metodi di colorazione.

FIG. 27-29. — Alterazioni delle fibre nervee, riproducenti qua e là alcuni dei caratteri riscontrati nei prolungamenti cilindrassili (aspetto granuloso, frequenti nodosità, ecc.).

FIG. 30 e 31. — Particolarità di struttura e modo di comportarsi di alcuni prolungamenti nervosi di cellule, così del 1° che del 2° tipo, in rapporto alla composizione di quel complicato intreccio di fibre che si riscontra nella zona sottomeningea della corteccia cerebrale.

FIG. 32-35, 42bis (tav. III). — Alterazioni degli elementi nevroglici (insolita robustezza e aumento numerico delle cellule aracniformi, anormali rapporti, ipertrofia e rigonfiamenti a clava dei prolungamenti cellulari d'inserzione alle pareti dei vasi).

FIG. 36-42 (tav. III). — Lesioni, in vario grado avanzate, dei vasi sanguigni (stravasi di sangue nelle guaine linfatiche perivascolari, metamorfosi regressiva degli elementi migrati, formazioni globulari addossate alle pareti vasali, aneurismi miliari, neoformazione dei capillari).

Tavola III.

Elementi nervosi ed elementi della nevroglia, nella *demenza paralitica con intossicazione alcoolica.* — Reazione nera al nitrato d'argento, e comuni metodi di colorazione.

FIG. 45-47. — Cellule gangliari con alterazioni rudimentali e assai circoscritte, così del corpo cellulare come delle arborizzazioni protoplasmatiche.

[1] La spiegazione delle figure è intercalata nel lavoro. La numerazione di esse nelle tavole, e la loro rispettiva illustrazione, si succedono con lo stesso ordine.

[2] I disegni originali furono eseguiti a la camera lucida, coll'ingrandimento indicato nelle figure. Per ragioni di spazio pertanto, nella riproduzione litografica queste dovettero essere alquanto ridotte di grandezza.
Ciascuna figura fu fotograficamente impiccolita e litografata.

Fig. 43, 44, 48-56. — Varii tipi di cellule nervose, i cui prolungamenti cilindrassili sono decisamente anormali, ora nel modo di origine, di decorrere, di ramificarsi, ora nell'aspetto del loro contorno e nelle variazioni di diametro (rigonfiamenti moniliformi ecc.).

Fig. 57 e 58 (tav. IV). — Cellule nevrogliche ipertrofiche.

Tavola IV.

Elementi nervosi nella *psicosi alcoolica*. — Reazione nera di Golgi.

Fig. 59-61. — Alterazioni dei corpi gangliari, assai lievi per grado e per estensione.

Fig. 62-72. — Le lesioni si riferiscono essenzialmente ai prolungamenti cilindrassili, con partecipazione quasi incalcolabile dei corpi cellulari e delle ramificazioni protoplasmatiche. — È evidente il contrasto fra queste ultime, e il contegno spiccatamente patologico dei prolungamenti nervosi.

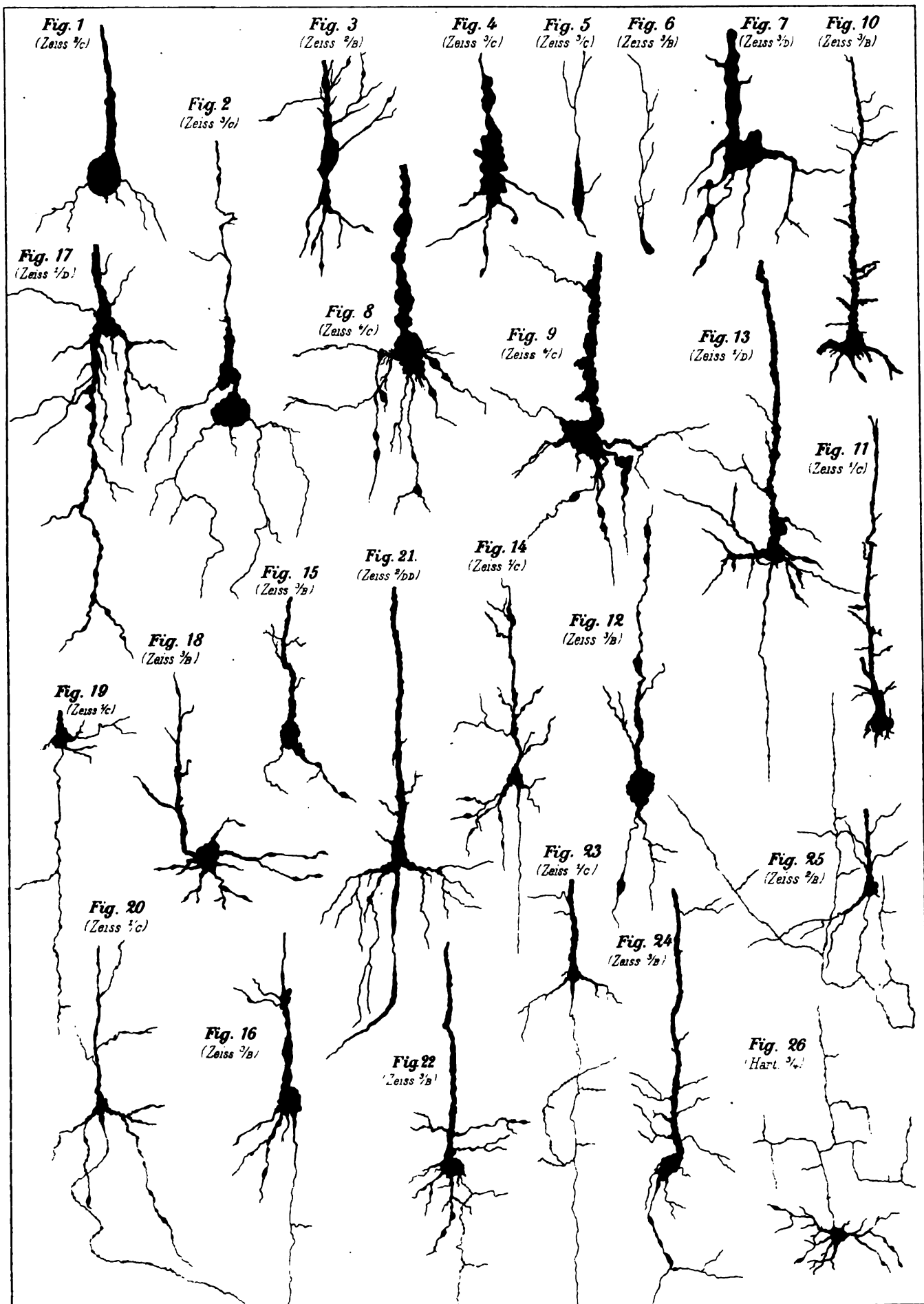
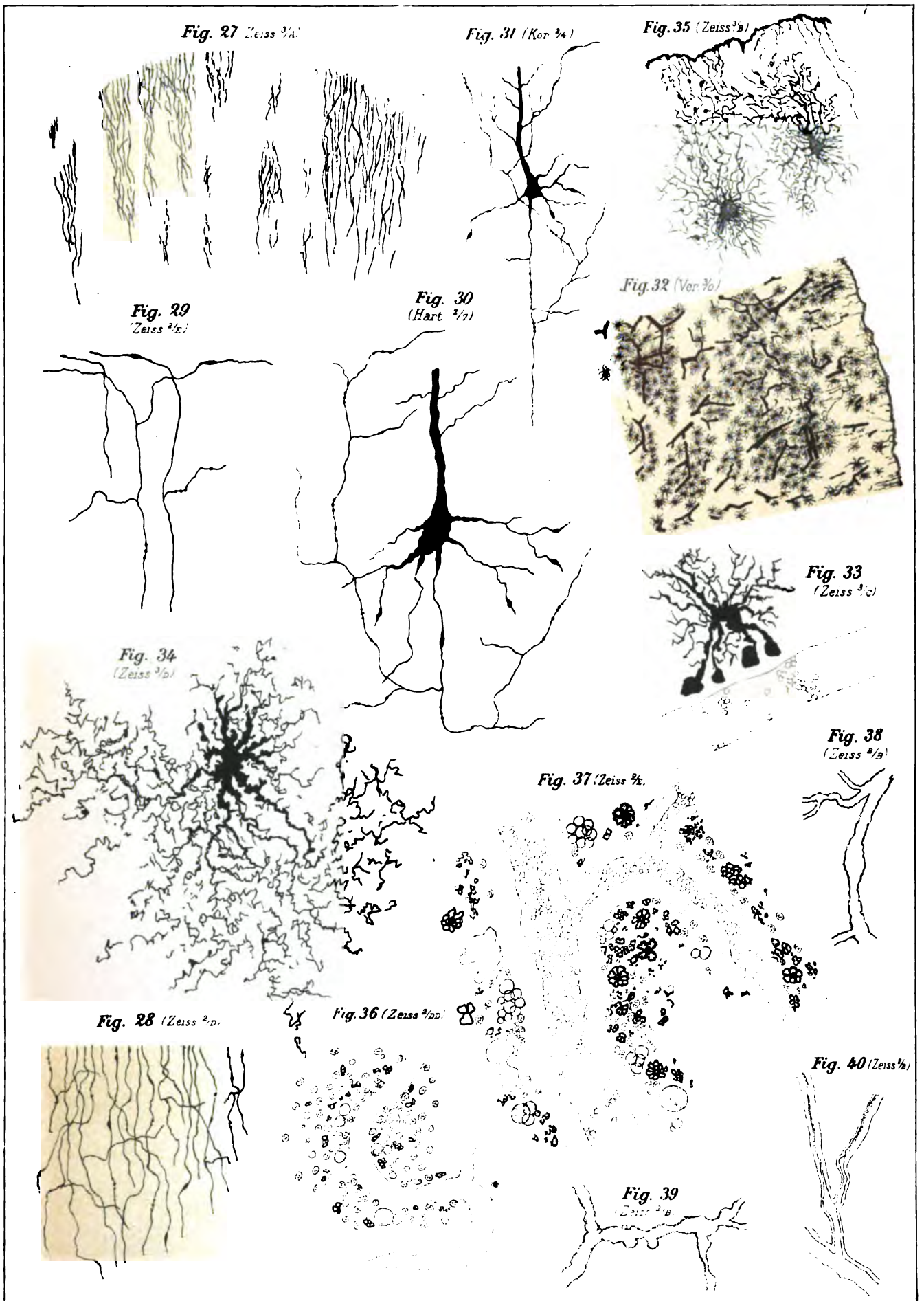
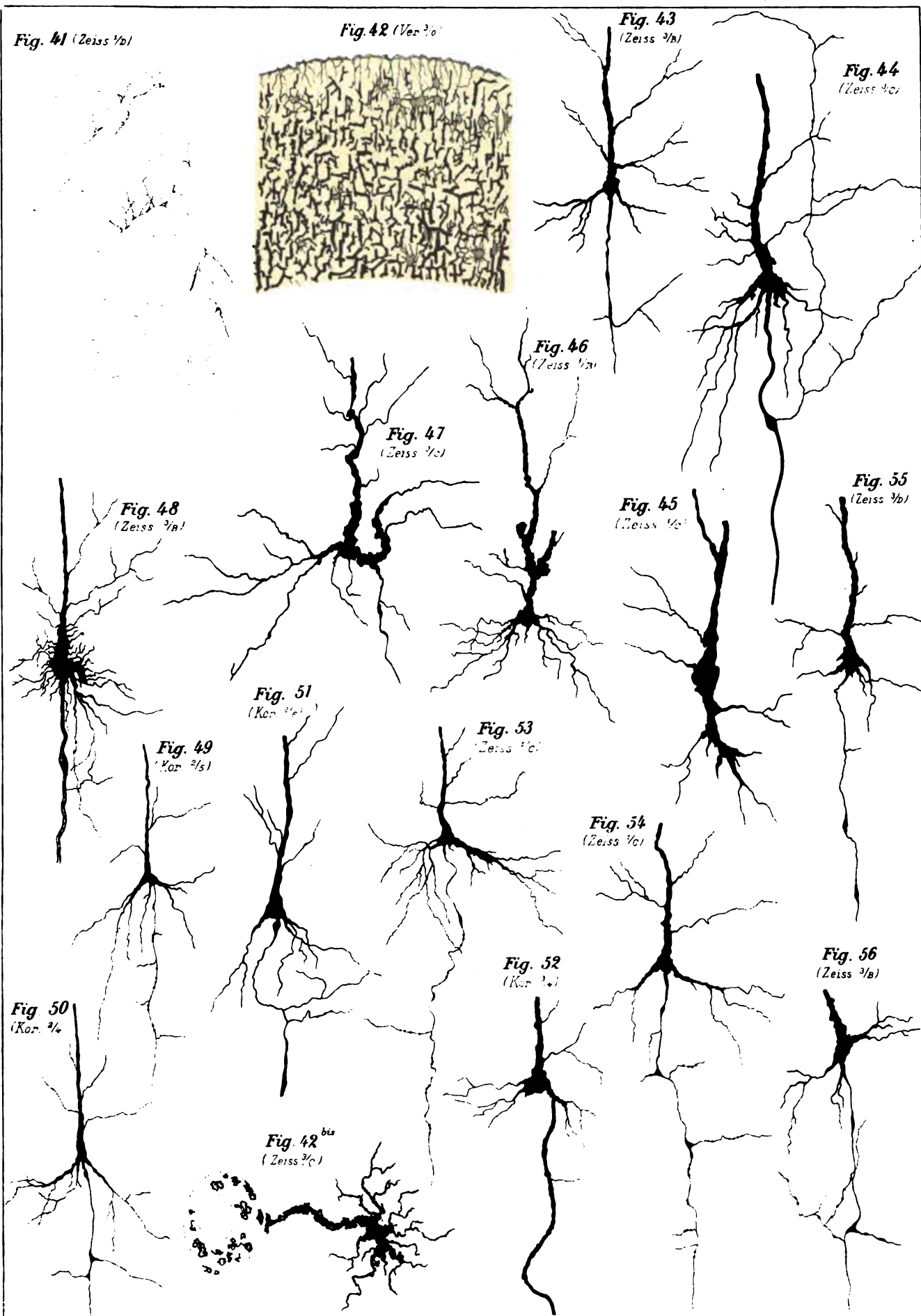
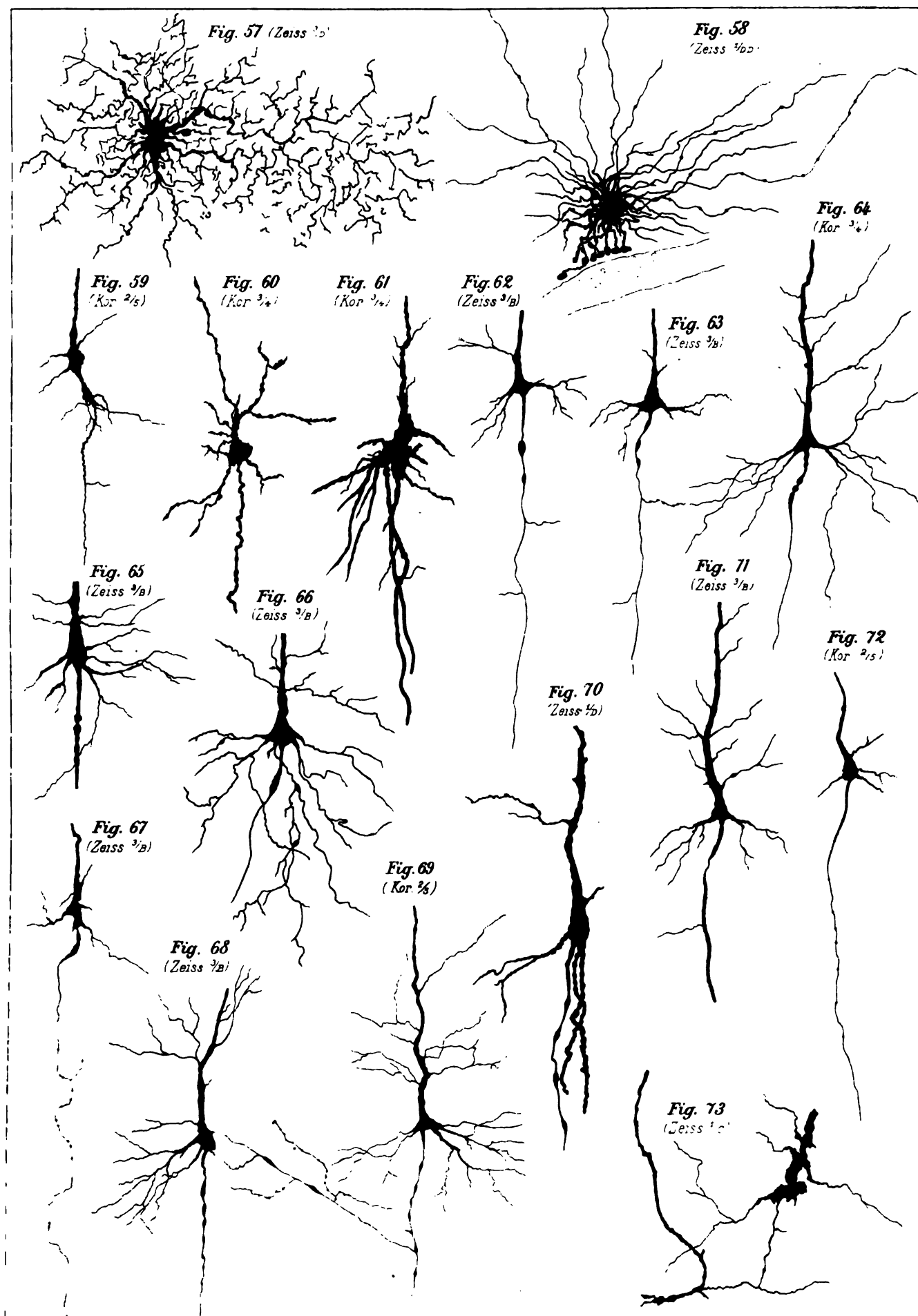
Fig. 73. — Connessione diretta tra i prolungamenti di due cellule nervose.

R. Colella del. Lit. Salussolia - Torino

R. Colella del. Lit. Salussolia Torino

R. Colella del.

Lit. Salussolia Torino

R. Colella del. Lit. Salussolia - Torino

RELAZIONE

letta dal Socio V. CERRUTI relatore, a nome anche del Socio E. BELTRAMI, nella seduta del 3 dicembre 1893, sopra la Memoria presentata dal prof. TOMMASO DEL BECCARO, intitolata: *Sopra il teorema di Wilson generalizzato.*

« La dimostrazione del teorema di Wilson data la prima volta da Lagrange si distingue sovra tutte le altre che vennero proposte di poi, per semplicità ed eleganza. Essa è fondata sul metodo delle funzioni generatrici. Ma il procedimento seguito da Lagrange non serve più alla dimostrazione del teorema di Wilson generalizzato, cioè non è più direttamente applicabile al caso in cui il modulo sia un numero composto. Nè sembra facile prevedere in qual senso il procedimento debba essere ampliato per adattarsi a tutti i casí, sia cioè il modulo un numero primo ovvero un numero composto. La difficoltà venne felicemente superata dal prof. Del Beccaro nel lavoro sottoposto al nostro esame. Non mancano qua e là delle inesattezze, quasi tutte per altro semplici errori di trascrizione: solo nel § 3° della seconda parte è un difetto di maggior rilievo. Sebbene il risultato finale sia esatto, i ragionamenti che l'autore impiega per stabilirlo, sono incompleti. Quando fossero tolte queste poche mende, non esiteremmo a dichiarare il lavoro meritevole di essere inserito negli Atti della nostra Accademia ».

Sopra il teorema di Wilson generalizzato.
Memoria del prof. TOMMASO DEL BECCARO

Mi propongo di trattare in questa Memoria del Teorema Wilsoniano generalizzato cioè come fu enunciato da Gauss nelle sue ricerche aritmetiche, esponendo una dimostrazione del medesimo che consiste nello estendere ai moduli composti quella data da Lagrange nel 1771 per il caso particolare in cui il modulo è numero primo; la quale è poi da dirsi notevolissima in quanto che rimane interamente indipendente dalle congruenze binomie quadratiche.

PARTE PRIMA

Proposizioni ausiliari.

§ 1.

Sulle classi che si possono formare coi numeri minori di un numero dato e primi ad esso.

Teorema. — Dato il numero intero positivo

$$n = l . m ,$$

l ed m designando interi qualunque positivi ma primi relativi l'uno all'altro, i numeri minori di n e primi ad esso, la cui moltitudine è espressa da $\varphi(n)$, potranno essere distribuiti in tante classi, ciascuna rappresentata dalla relazione

$$Z = l . z + b \tag{1}$$

quanti sono i numeri b minori di l ed a questo primi relativi

$$b_1 , b_2 , b_3 , \ldots\ldots , b_{\varphi(l)} \tag{2}$$

cioè $\varphi(l)$ e ciascuna di esse composta di m termini corrispondenti ai valori di z

$$z = 0 , 1 , 2 , \ldots (m-2) , (m-1) ; \tag{3}$$

i quali termini saranno gli uni agli altri congrui secondo il modulo l e daranno secondo il modulo m tanti resti differenti fra di sè e primi ad n quanti sono i numeri

(4) $$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\varphi(m)}$$

minori di m ed allo stesso m primi relativi.

I numeri che si ricavano dalla (1) coll'attribuire successivamente a b i singoli valori (2), e quindi a z i valori (3), rimangono tutti minori di n: il che apparisce evidente osservando che, supposto siano i b disposti nella loro serie in ordine crescente di grandezza, il maggiore di tali numeri che corrisponde a $b = b_{\varphi(l)}$, $z = m - 1$, sarà sempre $l(m-1) + b_{\varphi(l)} = n - (l - b\varphi(l)) < n$.

Però questi numeri la cui moltitudine è data da $m \,.\, \varphi(l)$ non sono sempre primi relativi ad n.

Se poi si considera la congruenza

$$Z = lz + b \equiv b \text{ (mod. } l)$$

si riconosce che gli m numeri appartenenti ad una determinata classe b, cioè quelli ove b conserva lo stesso assegnato valore mentre z percorre i valori (3), producono, se divisi per l, un unico e medesimo resto che è quel particolare b della serie (2) ond'è caratterizzata la classe ivi considerata; sicchè di tutti i numeri Z soltanto $\varphi(l)$, cioè tanti quante le classi b, somministreranno secondo il modulo l resti differenti fra di sè ed inoltre primi relativi ad l.

Se ora i numeri della serie (3) si moltiplicano rispettivamente per il fattore l, i prodotti

$$0 \,.\, l, 1 \,.\, l, 2 \,.\, l, \ldots (m-2) \,.\, l, (m-1) \,.\, l,$$

poichè per ipotesi l è primo ad m, lascieranno secondo il modulo m resti che, indipendentemente dal loro ordine di successione, riprodurranno i numeri (3); e se ad ogni singolo prodotto si aggiunge il numero b le somme

$$0 \,.\, l + b, 1 \,.\, l + b, 2 \,.\, l + b, \ldots, (m-2)\, l + b, (m-1)\, l + b$$

cioè tutti i termini della classe b, conserveranno quei numeri medesimi per resti secondo il modulo m ma altrimenti disposti; inquantochè, supposto, come è sempre lecito,

$$kl + b \equiv 0 \text{ (mod. } m), k < m$$

tali somme hanno allora resti secondo il modulo m ordinatamente uguali a quelli dei prodotti

$$(m-k)\, l, (m-k+1) \,.\, l, \ldots, (m-1) \,.\, l, 0l, 1l, 2l, \ldots (m-k-1) \,.\, l$$

identici, eccetto l'ordine, ai precedenti. Laonde, poichè degli m numeri (3) soltanto $\varphi(m)$ son primi ad m e per conseguanza ad n, resulta manifestamente che gli m termini di ciascuna classe b, qualunque essa sia, daranno, secondo il modulo m, $\varphi(m)$ resti differenti fra di sè e primi ad m e ad n cioè uguali ai numeri della serie (4) mentre tutti i termini rimanenti $m - \varphi(m)$, non saranno primi nè ad m nè ad n.

Pertanto i $\varphi(n)$ numeri minori di n e primi ad n compongono le $\varphi(l)$ classi, ciascuna determinata da un termine della serie (2) e ciascuna formata con $\varphi(m)$ dei numeri medesimi (4): il che appare pur anche evidente per essere $\varphi(n) = \varphi(l) \,.\, \varphi(m)$.

Corollario. — Indicando con ν_1 un numero primo assoluto e con a_1, α_1 due interi positivi di cui il primo a_1 è supposto maggiore dell'altro α_1, se fosse

$$n = \nu_1^{a_1}, \ l = \nu_1^{\alpha_1}, \ m = \nu_1^{a_1 - \alpha_1}$$

il teorema precedente sussisterebbe sempre cambiando però nell'enunciato $\varphi(m)$ in m.

Infatti la relazione (1) che allora si muta nella

$$Z = \nu_1^{\alpha_1} z + b$$

per ciascuna classe caratterizzata da uno dei valori di b preso nella serie (2) produce $m = \nu_1^{a_1-\alpha_1}$ numeri Z minori di n, quanti cioè sono i valori (3) della z, e tali che, se ognuno di essi viene diviso per $m = \nu_1^{a_1-\alpha_1}$, lascieranno resti differenti fra di sè e necessariamente primi al divisore: infatti questi numeri si compongono ciascuno di due altri insieme addizionati, uno de' quali $\nu_1^{\alpha_1} z$ sempre non primo tanto a $\nu_1^{a_1-\alpha_1}$ che ad $\nu_1^{\alpha_1}$, il rimanente b sempre primo a $\nu_1^{\alpha_1}$ e così ad $\nu_1^{a_1-\alpha_1}, \nu_1^{a_1}$. Anche in questo caso adunque tutti i $\varphi(n) = \varphi(\nu_1^{a_1})$ numeri minori di $n = \nu_1^{a_1}$ e primi relativi ad esso stesso si trovano distribuiti in $\varphi(l) = \varphi(\nu_1^{\alpha_1})$ classi, ciascuna caratterizzata da una delle b e composta di $m = \nu_1^{a_1-\alpha_1}$ termini come si rende manifesto dalla identità

$$\varphi(\nu_1^{a_1}) = \varphi(\nu_1^{\alpha_1}) \, . \, \nu_1^{a_1-\alpha_1} \, .$$

§ 2.

Intorno alle somme di potenze simili, intere e positive, di alcune serie di numeri interi.

Lemma I. — Denotando ν_1 un numero primo assoluto e μ un intero positivo l'esponente $\varepsilon_{\mu+1}$ della maggiore potenza di ν_1 contenuta nel prodotto

$$\Gamma(\mu+1) = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots \mu(\mu+1) \tag{1}$$

sarà sempre minore di $\mu+1$; onde si avrà

$$\varepsilon_{\mu+1} < \mu + 1 \, . \tag{2}$$

È dapprima evidente che nel caso in cui si ha $(\mu+1) < \nu_1$ e perciò $\varepsilon_{\mu+1} = 0$ questa disuguaglianza sussiste di per sè stessa. Supposto dipoi $(\mu+1)$ non $< \nu_1$ e denotata con ν_1^{δ} quella potenza intera e positiva di ν_1 prossimamente minore di $\mu+1$ per cui si ha $\nu_1^{\delta} < \mu+1 < \nu_1^{\delta+1}$ in virtù di nota formula [1] avremo

$$\varepsilon_{\mu+1} = \sum_{i=1}^{i=\delta} \mathrm{E}\left(\frac{\mu+1}{\nu_1^{i}}\right) \, . \tag{3}$$

Osservando che in conseguenza del significato attribuito al segno di Legendre $\mathrm{E}\left(\frac{\mu+1}{\nu_1^{i}}\right)$ si ha sempre

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mu+1}{\nu_1^{i}}\right) < \frac{\mu+1}{\nu_1^{i}} \, ;$$

[1] Vedi *Die Elemente der Zahlentheorie dargestellt* von Paul Bachmann. Leipzig 1892, p. 32.

si trova

$$\varepsilon_{\mu+1} < (\mu+1) \sum_{i=1}^{i=\delta} \frac{1}{\nu_1^i} < (\mu+1) \left(\frac{1 - \frac{1}{\nu_1^\delta}}{\nu_1 - 1} \right)$$

ovvero a più forte ragione $\varepsilon_{\mu+1} < (\mu+1)$.

Lemma II. — Ritenuto ciò che precede, se invece di $(\mu+1)$ si prendono due termini successivi, t_k, t_{k+1}, della progressione aritmetica

$$\nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots$$

avente tanto il primo termine quanto la ragione uguale al numero primo ν_1 e designata la minima potenza del medesimo contenuta in t_{k+1} con ν_1^d, si avrà sempre

$$(4) \qquad \varepsilon_{t_{k+1}} - \varepsilon_{t_k} = d.$$

Supposto t_k espresso da $\sum_{i=1}^{i=\delta} \varrho_i \nu_1^i$ ove i coefficienti $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_\delta$ sono interi positivi minori di ν_1, e considerato che per la fatta ipotesi

$$t_{k+1} = \sum_{i=1}^{i=\delta} \varrho_i \nu_1^i + \nu_1$$

non deve contenere potenze di ν_1 inferiori a d, si avranno necessariamente per i primi $(d-1)$ di tali numeri i valori $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \ldots = \varrho_{d-2} = \varrho_{d-1} = \nu_1 - 1$. Quindi, introdotti questi valori nelle precedenti espressioni di t_k, t_{k+1}, si otterranno

$$t_k = (\nu_1 - 1) \sum_{i=1}^{i=d-1} \nu_1^i + \sum_{i=d}^{i=\delta} \varrho_i \nu_1^i$$

$$t_{k+1} = \nu_1^d + \sum_{i=d}^{i=\delta} \varrho_i \nu_1^i .$$

Inoltre mediante l'applicazione della formula (3) al calcolo degli esponenti ε_{t_k}, $\varepsilon_{t_{k+1}}$, rappresentando con e la parte che questi hanno a comune proveniente dal termine $\sum_{i=d}^{i=\delta} \varrho_i \nu_1^i$ si trovano

$$\varepsilon_{t_k} = \frac{\nu_1^d - 1}{\nu_1 - 1} - d + e \ , \ \varepsilon_{t_{k+1}} = \frac{\nu_1^d - 1}{\nu_1 - 1} + e \ ;$$

donde immediatamente si deduce la relazione (4) che era da dimostrare.

Lemma III. — La somma

$$(5) \qquad z_\mu = \beta_1^\mu + \beta_2^\mu + \beta_3^\mu + \ldots + \beta_{\varphi(n)-1}^\mu + \beta_{\varphi(n)}^\mu$$

delle potenze intere e positive μ^{me} della serie dei numeri

$$(6) \qquad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{\varphi(n)-1}, \beta_{\varphi(n)}$$

minori del numero intero positivo n e primi relativi al medesimo, sarà congrua secondo il modulo n a zero nel caso in cui μ è un numero dispari od $\mu = 2m + 1$; se poi μ è un numero pari od $\mu = 2m$ sarà invece congrua al prodotto di 2 per la somma di $\frac{1}{2} \cdot \varphi(n)$ termini di s_μ le cui radici μ^{me} sono minori di $\frac{n}{2}$.

I numeri della serie (6) si possono sempre distribuire in $\frac{1}{2} \cdot \varphi(n)$ coppie ciascuna formata di termini i quali, producendo una somma costante ed uguale ad n, si dicono complementari alla somma medesima ovvero al numero n: è però da eccettuare il caso di $n = 2$. Se adunque β_i designa un termine di detta serie (6) minore di $\frac{n}{2}$ e $\beta_{\varphi(n)-i+1}$ quello maggiore di $\frac{n}{2}$ tale che sia insieme col precedente complementare ad n, avremo $\beta_i + \beta_{\varphi(n)-i+1} = n$. Ora in conseguenza di questa relazione si trovano

$$\beta^{2m+1}_{\varphi(n)-i+1} = (n - \beta_i)^{2m+1}, \quad \beta^{2m}_{\varphi(n)-i+1} = (n - \beta_i)^{2m}$$

mediante cui, denotando con M(n) qualsivoglia multiplo di n, le formule che esprimono s_{2m+1}, s_{2m} si riducono alle seguenti

$$s_{2m+1} = \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)} \left[(n - \beta_i)^{2m+1} + \beta_i^{2m+1} \right] = \mathrm{M}(n)$$

$$s_{2m} = \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)} \left[(n - \beta_i)^{2m} + \beta_i^{2m} \right] = \mathrm{M}(n) + \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)} 2\beta_i^{2m}.$$

Queste poi producono immediatamente le congruenze enunciate nel Lemma

$$(7) \qquad s_{2m+1} \equiv 0, \quad s_{2m} \equiv 2 \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)} \beta_i^{2m} \quad (\text{mod.}\, n).$$

Corollario. — Per il Teorema generalizzato di Fermat da cui si ha $\beta_i^{\varphi(n)} \equiv 1$ (mod. n), la equazione (5), ove si deve porre $\mu = \varphi(n)$, conduce alla congruenza

$$(8) \qquad s_{\varphi(n)} \equiv \varphi(n) \quad (\text{mod.}\, n).$$

Teorema. — La somma delle potenze intere e positive μ^{me}

$$(9) \qquad \mathrm{S}_\mu = 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots + (n-2)^\mu + (n-1)^\mu$$

della serie naturale dei numeri interi

$$1 . 2 . 3 \ldots (n-2) . (n-1),$$

essendo n una potenza intera e positiva a_1 del numero primo ν_1, ed $\nu_1^{\epsilon_{\mu+1}}$ denotando sempre la maggior potenza di questo contenuta in $\Gamma(\mu+1)$, sarà necessariamente multipla di $\nu_1^{a_1-\epsilon_{\mu+1}}$ soltanto quando sia $a_1 > \epsilon_{\mu+1}$; tale somma potrà poi essere o prima relativa a ν_1 o divisibile per questo numero secondo il valore particolare di μ nel caso in cui si abbia $a_1 \overline{\overline{<}}\, \epsilon_{\mu+1}$.

È noto che la somma S_μ è determinata dalla equazione

$$S_\mu = \frac{n}{\Gamma(\mu+1)} \cdot K_\mu \,, \tag{10}$$

ove si ha

$$K_\mu = \begin{vmatrix} \binom{2}{1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & n-1 \\ \binom{3}{2}, & \binom{3}{1}, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & n^2-1 \\ \binom{4}{3}, & \binom{4}{2}, & \binom{4}{1}, & \ldots, & 0, & 0, & n^3-1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \binom{\mu-1}{\mu-2}, & \binom{\mu-1}{\mu-3}, & \binom{\mu-1}{\mu-4}, & \ldots, & \binom{\mu-1}{1}, & 0, & n^{\mu-2}-1 \\ \binom{\mu}{\mu-1}, & \binom{\mu}{\mu-2}, & \binom{\mu}{\mu-3}, & \ldots, & \binom{\mu}{2}, & \binom{\mu}{1}, & n^{\mu-1}-1 \\ \binom{\mu+1}{\mu}, & \binom{\mu+1}{\mu-1}, & \binom{\mu+1}{\mu-2}, & \ldots, & \binom{\mu+1}{3}, & \binom{\mu+1}{2}, & n^{\mu}-1 \end{vmatrix};$$

il quale determinante, allorchè si toglie da ogni sua linea incominciando dalla seconda la linea precedente e si eseguiscono opportune riduzioni, prende la forma

$$K_\mu = (n-1) \cdot \begin{vmatrix} \binom{2}{1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1 \\ \binom{2}{2}, & \binom{3}{1}, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & n \\ \binom{3}{3}, & \binom{3}{2}, & \binom{4}{1}, & \ldots, & 0, & 0, & n^2 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \binom{\mu-2}{\mu-2}, & \binom{\mu-2}{\mu-3}, & \binom{\mu-2}{\mu-4}, & \ldots, & \binom{\mu-1}{1}, & 0, & n^{\mu-3} \\ \binom{\mu-1}{\mu-1}, & \binom{\mu-1}{\mu-2}, & \binom{\mu-1}{\mu-3}, & \ldots, & \binom{\mu-1}{2}, & \binom{\mu}{1}, & n^{\mu-2} \\ \binom{\mu}{\mu}, & \binom{\mu}{\mu-1}, & \binom{\mu}{\mu-2}, & \ldots, & \binom{\mu}{3}, & \binom{\mu}{2}, & n^{\mu-1} \end{vmatrix}$$

ovvero, mediante lo sviluppo del determinante moltiplicatore di $(n-1)$ ordinato per gli elementi dell'ultima colonna, si riduce ad

$$K_\mu = (n-1) . \sum_{i=\mu}^{i=1} (-1)^{\mu-i} H_i n^{i-1} , \quad \text{essendo}$$

$$H_i = \Gamma(i) . \begin{vmatrix} \binom{i+1}{2} , & \binom{i+1}{1} , & 0 & ,\dots, & 0 & , 0 \\ \binom{i+2}{3} , & \binom{i+2}{2} , & \binom{i+3}{3} & ,\dots, & 0 & , 0 \\ \dots\dots , & \dots\dots , & \dots\dots , & \dots , & \dots\dots & , \dots \\ \binom{\mu-1}{\mu-i} , & \binom{\mu-1}{\mu-i-1} , & \binom{\mu-1}{\mu-i-2} & ,\dots, & \binom{\mu-1}{2} , & \binom{\mu}{1} \\ \binom{\mu}{\mu-i+1} , & \binom{\mu}{\mu-i} , & \binom{\mu}{\mu-i-1} & ,\dots, & \binom{\mu}{3} , & \binom{\mu}{2} \end{vmatrix}$$

ed $H_\mu = \Gamma(\mu)$, $H_{\mu-1} = \Gamma(\mu-1) . \binom{\mu}{2}$.

In virtù di quest'ultima relazione la (10), designata con $\nu_1^{\eta_i}$ la maggior potenza di ν_1 che divide H_i, e posto $n = \nu_1^{a_1}$, si trasforma manifestamente nella

$$S_\mu = \frac{(\nu_1^{a_1} - 1) . \sum_{i=\mu}^{i=1} (-1)^{\mu-1} . (H_i : \nu_1^{\eta_i}) . \nu_1^{ia_1 + \eta_i - \epsilon_{\mu+1}}}{(\Gamma(\mu+1) : \nu_1^{\epsilon_{\mu+1}})} .$$

Passiamo ora ai due casi contemplati nel teorema:
I caso in cui è $a_1 > \epsilon_{\mu+1}$. Supposto che H_j sia il primo determinante minore che nella serie dei medesimi

$$H_1 , H_2 , \dots H_{j-1} , H_j , H_{j+1} , \dots , H_{\mu-1} , H_\mu$$

procedendo ordinatamente da H_1 si trova differente da zero, onde il segno sommatorio in S_μ deve essere esteso da $i = \mu$ ad $i = j$, (anche tutti od alcuni degli H intermedî fra H_j ed $H_\mu = \Gamma(\mu)$ potranno pure annullarsi), è chiaro che di tutte le potenze di ν_1 i cui esponenti sono

$$ia_1 + \eta_i - \epsilon_{\mu+1} \, (i = j , \dots , \mu \quad ,$$

ove η_i può essere o zero o positivo intero ed j è $\geqq 1$, $\nu_1^{ja_1 - \eta_j - \epsilon_{\mu+1}}$, la quale è sempre maggiore dell'altra $\nu_1^{a_1 - \epsilon_{\mu+1}}$, sarà la minima. Di qui si trae che a fortiori S_μ deve essere divisibile per questa ultima potenza, sicchè viene

$$S_\mu = M(\nu_1^{a_1 - \epsilon_{\mu+1}}) \text{ con } a_1 > \epsilon_{\mu+1} . \tag{11}$$

II caso in cui è $a_1 \leqq \epsilon_{\mu+1}$. Mantenuta la supposizione sopra H_j, gli esponenti di ν_1

sopra considerati, non potendo mai divenire negativi (1), saranno necessariamente o nulli od interi positivi. Se ora uno o più di essi fossero uguali a zero, S_μ resulterebbe manifestamente primo relativo a ν_1: se poi fossero tutti interi positivi, S_μ diverrebbe divisibile per la potenza di ν_1 avente per esponente il minimo di tali numeri. Si può adunque concludere che in questo caso S_μ può essere o primo relativo a ν_1 o per questo divisibile a seconda del particolare valore che riceve μ.

Corollario I. — Dall'equazione (11) si trae che per $a_1 = 1$ e per $\mu + 1 < \nu_1$, onde $\varepsilon_{\mu+1} = 0$, S_μ resulta multiplo di ν_1 qualunque sia μ purchè $< \nu_1 - 1$.

Corollario II. — Se $n = \nu_1^{a_1}$ la somma z_μ (5) considerata nel Lemma III è manifestamente espressa dalla equazione

$$z_\mu = S_\mu - \nu_1^\mu (1^\mu + 2^\mu + \ldots + (\nu_1^{a_1-1} - 1)^\mu) .$$

Da questa si vede che, denotando con S'_μ la somma che moltiplica il fattore ν_1^μ ed applicando la (10) avremo

$$z_\mu = \frac{\nu_1^{c_1} [K_\mu - K'_\mu \nu_1^{\mu-1}]}{\Gamma(\mu+1)} ;$$

donde segue che il precedente Teorema vale anche per z_μ.

§ 3,

Continuazione dell'argomento precedente.

Teorema. — Essendo n una potenza intera e positiva a_1 del numero primo 2, la somma delle potenze intere positive μ^{me}

(1) $$s_\mu = 1^\mu + 3^\mu + 5^\mu + \ldots + (n-3)^\mu + (n-1)^\mu$$

della serie naturale dei numeri interi dispari

(2) $$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (n-3) \,, (n-1)$$

sarà secondo il modulo n congrua a zero quando μ è numero dispari od $\mu = 2m + 1$; tale somma diverrà poi secondo lo stesso modulo congrua a $\varphi(n)$ quando μ è numero pari od $\mu = 2m$.

I numeri dispari (2) sono tutti quelli minori di 2^{a_1} ed a questo primi per la qual cosa qui vale il Lemma III (§ 2) potendosi identificare i β coi numeri medesimi e z_μ con s_μ. In virtù adunque delle relazioni (7) § 2 si hanno

(3) $$s_{2m+1} \equiv 0 \;(\text{mod. } n = 2^{a_1}) ,$$

(1) Importa osservare che il termine del polinomio sotto Σ corrispondente ad $i = \mu$, $[H_\mu : \nu_1^{\eta_\mu}]$. $\nu_1^{\mu a_1 + \eta_\mu - \varepsilon_{\mu+1}} = [\Gamma(\mu) : \nu_1^{\varepsilon_\mu}]$. $\nu_1^{\mu a_1 + \varepsilon_\mu - \varepsilon_{\mu+1}}$, mai nullo, ha l'esponente di ν_1 positivo, qualunque sia μ. Infatti, siccome non può essere $\varepsilon_\mu = 0$ perchè se tale fosse dovrebbe aversi $\nu_1 > \mu$ e così $\nu_1 \geqq \mu + 1$ e per conseguenza $\varepsilon_{\mu+1} = 1$ od $= 0$ contro la ipotesi per cui si ha $\varepsilon_{\mu+1} > a_1$ ed $a_1 \geqq 1$, così l'esponente $\mu a_1 + \varepsilon_\mu - \varepsilon_{\mu+1}$ per il Lemma I sarà necessariamente maggiore di $\mu(a_1 - 1) + \varepsilon_\mu - 1$ e perciò sempre > 0.

che è la prima congruenza richiesta dal Teorema, ed

$$s_{2m} \equiv 2 \sum_{i=0}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)} \beta_i^{2m} \text{ (mod. } n)$$

ovvero ciò che è lo stesso

$$\sum_{j=1}^{j=\varphi(2^{a_1})} \beta_j^{2m} = \mathrm{M}(2^{a_1}) + 2 \sum_{i=1}^{i=\varphi(2^{a_1-1})} \beta_i^{2m}, \; \beta_i < 2^{a_1-1}.$$

Se ora si considerano altre serie di numeri dispari rispettivamente terminate da $(2^{a_1-\lambda}-1)$ e di cui $\beta_{i_\lambda} < 2^{a_1-\lambda-1}$ è un numero qualunque ove λ deve assumere successivamente i valori $1, 2, 3, \ldots, (a_1-2)$, allora, in forza della precedente equazione che deve sussistere qualunque sia a_1, si ottengono le

$$\sum_{i_{\lambda-1}=1}^{i_{\lambda-1}=\varphi(2^{a_1-\lambda})} \beta_{i_{\lambda-1}}^{2m} = \mathrm{M}(2^{a_1-\lambda}) + 2 \sum_{i_\lambda=1}^{i_\lambda=\varphi(2^{a_1-\lambda-1})} \beta_{i_\lambda}^{2m}, \; (\lambda = 1, 2, 3, \ldots (a_1-2), \; i_0 = i).$$

Queste moltiplicate per 2^λ ed addizionate membro a membro colla prima danno

$$\sum_{j=1}^{j=\varphi(2^{a_1})} \beta_j^{2m} + 2^\lambda \sum_{i_{\lambda-1}=1}^{i_{\lambda-1}=\varphi(2^{a_1-\lambda})} \beta_{i_{\lambda-1}}^{2m} = \mathrm{M}(2^{a_1}) + 2 \sum_{i=1}^{i=(2^{a_1-1})} \beta_i^{2m} + 2^{\lambda+1} \sum_{i_\lambda=1}^{i_\lambda=\varphi(2^{a_1-\lambda-1})} \beta_{i_\lambda}^{2m},$$

essendo $\lambda = 1, 2, \ldots, (a_1-2)$; donde, eseguite facili riduzioni si ricava, perchè $\beta_{i_{a_1-2}} = 1$

$$\sum_{j=1}^{j=\varphi(2^{a_1})} \beta_j^{2m} = \mathrm{M}(2^{a_1}) + 2^{a_1-1};$$

la quale equivale alla congruenza

$$s_{2m} \equiv \varphi(n = 2^{a_1}), \text{ (mod. } 2^{a_1}), \tag{4}$$

che è la seconda enunciata nel Teorema.

§ 4.

Proposizioni diverse.
Funzioni simmetriche multiple della serie naturale dei numeri interi.

Teorema I. — Il coefficiente binomiale

$$\binom{\nu_1^{a_1}}{t} = \frac{\nu_1^{a_1}(\nu_1^{a_1}-1).(\nu_1^{a_1}-2)\ldots(\nu_1^{a_1}-t+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\ldots\; t} \tag{1}$$

essendo sempre $\nu_1^{a_1}$ una potenza intera e positiva di un numero primo ν_1, sarà divisibile per $\nu_1^{a_1}$ se t è primo a ν_1, e sarà divisibile soltanto per $\nu_1^{\alpha_1}$, dove α_1 deve essere $\gtreqless 1$ e $< a_1$, se t non è primo a ν_1.

Supposto γ un fattore qualunque del prodotto $\Gamma(t-1)$, questo e la differenza $(\nu_1^{a_1}-\gamma)$ saranno insieme o primi a ν_1 ovvero divisibili per la massima potenza di ν_1 ch'entra in γ tanto che i due prodotti

$$(\nu_1^{a_1}-1)(\nu_1^{a_1}-2)(\nu_1^{a_1}-3)\ldots(\nu_1^{a_1}-t+1)\,,\,\Gamma(t-1)$$

conterranno un medesimo numero di volte il divisore primo ν_1. Da ciò si deduce che, designando L un intero qualunque positivo primo a ν_1, il coefficiente binomiale (1) diverrà

$$\binom{\nu_1^{a_1}}{t} = \nu_1^{a_1-(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})}\,.\,\mathrm{L}\,. \tag{2}$$

Ora se t è primo a ν_1 tanto in $\Gamma(t)$ che in $\Gamma(t-1)$ l'ultimo fattore multiplo di ν_1 sarà il medesimo sicchè i due esponenti ε_t, ε_{t-1} risulteranno necessariamente uguali e la (2) si ridurrà ad

$$\binom{\nu_1^{a_1}}{t} = \nu_1^{a_1}\,.\,\mathrm{L}\,. \tag{3}$$

Se poi t è un multiplo di ν_1, allora $(t-\nu_1)$ sarà l'ultimo fattore multiplo di ν_1 contenuto in $\Gamma(t-1)$, dimodochè, applicando il Lemma II (4) del § 2, si trova $\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}=d$, ove d significa l'esponente della minima potenza di ν_1 ch'entra in t. Osservando inoltre che $\binom{\nu_1^{a_1}}{t}$ assume valori differenti soltanto per $t=\nu_1$, ν_1^2, ν_1^3, ..., ν_1^{a-1}, si vede che il minimo valore della differenza $\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}$ deve corrispondere a $t=\nu_1^{a_1-1}$, nel qual caso comparisce in $\Gamma(t-1)$ come ultimo fattore divisibile per ν_1 il seguente $\nu_1^{a_1-1}-\nu_1$. Laonde, in virtù dello stesso Lemma, tale valore minimo è dato da $d=a_1-1$, mentre il suo valore massimo che corrisponde a $t=\nu_1$, e a $t-1$ indipendente da ν_1 sarà $d=1$. Introdotti infine questi valori nella (2) si ottengono

$$\binom{\nu_1^{a_1}}{\nu_1^{a_1-1}} = \nu_1\,.\,\mathrm{L}\,,\quad \binom{\nu_1^{a_1}}{\nu_1} = \nu_1^{a_1-1}\,.\,\mathrm{L}\,. \tag{4}$$

Teorema II. — Se n è un numero dispari qualunque, il prodotto di tutti i numeri minori di n e ad esso primi sarà congruo secondo il modulo n al prodotto di tutti i numeri dispari minori di $2n$ e primi a questo numero.

Infatti, essendo $\varphi(n)=\varphi(2n)$, tali due prodotti contengono lo stesso numero di fattori ed il primo di essi differisce dal secondo in ciò che, invece di ogni fattore pari a quello appartenente minore di n e primo ad n, comparisce in questo il fattore dispari $n+\gamma$ maggiore di n ma minore di $2n$ e primo a $2n$. Da ciò e dalla congruenza $\gamma+n\equiv\gamma\ (\mathrm{mod.}\ n)$ si deduce essere i detti prodotti congrui secondo il modulo n l'uno all'altro.

Lemma. — Se si prendono gl'interi positivi

$$s_1\,,\,s_2\,,\,s_3\,,\,\ldots\,,\,s_{\delta-1}\,,\,s_\delta\,,$$

i quali han per somma il numero s, e sono disposti in ordine crescente di grandezza e se si prende il numero primo qualunque n, rappresentando con n^{σ_j} quella potenza di esso n, che è od immediatamente minore di (s_j+1) ovvero a questo uguale, e con $n^{\varepsilon_{s_j+1}}$ la maggiore potenza dello stesso n contenuta nel prodotto $\Gamma(s_j+1)$, ove ad j devono essere attribuiti successivamente i valori $1.2.3...\delta$, allora, poichè σ_δ resulta il maggiore dei σ, sussisterà sempre la relazione

$$(5) \qquad \varepsilon_{s+1}+\sum_{j=1}^{j=\delta-1}\sigma_j \overline{\overline{>}} \sum_{j=1}^{j=\delta}\varepsilon_{\sigma_j+1} \, .$$

È da considerare dapprima il caso in cui si ha $\delta=2$.

Dalla formula (3) riportata nel Lemma I del § 2 si ricavano le espressioni

$$\varepsilon_{s_1+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_1}\left(\frac{s_1+1}{n^i}\right) \quad , \quad \varepsilon_{s_2+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_2}\left(\frac{s_2+1}{n^i}\right) \, ;$$

donde, posto $(s_1+1)=n^i p_i+r_i$, $(s_2+1)=n^i \varpi_i+\varrho_i$ ove p_i, r_i ed ϖ_i, ϱ_i rappresentano rispettivamente i quozienti ed i resti delle divisioni di s_1+1, s_2+1 per lo stesso divisore n^i, seguono

$$\varepsilon_{s_1+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_1}p_i \ , \ \varepsilon_{s_2+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_2}\varpi_i$$

ed anche

$$\varepsilon_{s_1+1}+\varepsilon_{s_2+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_1}(p_i+\varpi_i)+\sum_{i=\sigma_1+1}^{i=\sigma_2}\varpi_i \, .$$

Inoltre, avendo

$$s_1+s_2+1=s'+1=n^i(p_i+\varpi_i)+(r_i+\varrho_i-1)$$

e poichè la potenza di n immediatamente minore di $s'+1$ od a questo uguale deve essere n^{σ_2}, sussiste anche l'equazione

$$\varepsilon_{s_1+s_2+1}=\varepsilon_{s'+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_1}\left[(p_i+\varpi_i)+\mathrm{E}\left(\frac{r_i+\varrho_i-1}{n^i}\right)\right]+\sum_{i=\sigma_1+1}^{i=\sigma_2}\varpi_i \, .$$

Di qui si vede che il più piccolo valore di $\varepsilon_{s'+1}$, il quale poi corrisponde ad $r_i=\varrho_i=0$, qualunque sia j, cioè ad s_1+1, s_2+1 multipli di n, è espresso da

$$\varepsilon_{s'+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_1}(p_i+\varpi_i)+\sum_{i=\sigma_1+1}^{i=\sigma_2}\varpi_i-\sigma_1=\varepsilon_{s_1+1}+\varepsilon_{s_2+1}-\sigma_1 \, ;$$

onde, se s_1+1, s_2+1, sono od ambedue od almeno uno non multipli di n, resulterà necessariamente per la formula penultima

$$\varepsilon_{s'+1}=\sum_{i=1}^{i=\sigma_1}(p_i+\varpi_i)+\sum_{i=\sigma_1+1}^{i=\sigma_2}\varpi_i-\sigma'_1=\varepsilon_{s_1+1}+\varepsilon_{s_2+1}-\sigma'_1\ ,$$

ove nel primo caso sarà $\sigma'_1=0$, nel secondo $\sigma'_1<\sigma_1$. Si può adunque concludere che a fortiori esiste sempre e necessariamente la relazione

$$\varepsilon_{s'+1}+\sigma_1 \overline{\overline{>}} \varepsilon_{s_1+1}+\varepsilon_{s_2+1}\ .$$

Si passa ora immediatamente al caso generale di δ intero positivo qualunque col dedurre dall'ultima formula, la quale sussiste qualunque siano s_1, s_2, le seguenti:

$$\varepsilon_{s_i+(s_{i+1}+s_{i+2}+\ldots+s_\delta)+1}+\sigma_i \overline{\overline{>}} \varepsilon_{s_i+1}+\varepsilon_{s_{i+1}+s_{i+2}+\ldots+s_\delta+1}\ ,\ (i=1\,,2\,,\ldots,(\delta-1))\ .$$

Infatti se desse si addizionano membro a membro e poi si eseguiscono opportune riduzioni, si ottiene la generale relazione (5) enunciata nel Lemma.

Corollario. — È poi evidente che questa relazione seguita a sussistere anche quando le s sono in parte od in totalità uguali fra di sè.

Teorema III. — Ritenuto ciò che precede, supposto però che il numero n sia una potenza intera e positiva a_1 del numero primo ν_1, la funzione simmetrica multipla della serie naturale dei numeri interi $1.2.3\ldots(n-1)$ rappresentata, come di consueto, da $S(u_1^{s_1}u_2^{s_2}u_3^{s_3}\ldots u_\delta^{s_\delta})$ sarà necessariamente multipla di $\nu_1^{a_1-\varepsilon_{s+1}}$ quando si abbia $a_1>\varepsilon_{s+1}$; tale funzione potrà essere o prima relativa a ν_1 ovvero divisibile per questo numero nel caso che sia $a_1 \overline{\overline{<}} \varepsilon_{s+1}$.

Tale funzione simmetrica multipla è sempre esprimibile in modo razionale ed intero mediante somme di potenze simili φ^{me} della serie sopra riportata dei numeri interi successivi, essendo poi $\varphi \overline{\overline{<}} s$. Il polinomio, da cui è dessa rappresentata, si compone adunque indipendentemente da coefficienti numerici, di termini in cui una o più di quelle somme, al massimo δ, entrano come fattori ed in ciascuno dei quali addizionando gl'indici de' suoi fattori si ottiene sempre lo stesso numero s. I termini medesimi, astraendo sempre dai loro coefficienti, si riducono tutti alla medesima forma tipica $(S_{\varphi_1}S_{\varphi_2}S_{\varphi_3}\ldots S_{\varphi_{k-1}}S_{\varphi_k})$ ove $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\ldots\varphi_{k-1},\varphi_k$ indicano gruppi dei numeri $s_1,s_2\ldots s_\delta$ formati addizionando rispettivamente $i_1,i_2,i_3,\ldots,i_{k-1},i_k$ di essi numeri senza ripetizione di alcuno dei medesimi, supposto $i_1<i_2<i_3\ldots<i_{k-1}<i_k$ ed $i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{k-1}+i_k \parallel \delta$; ed ove si ha sempre $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots+\varphi_{k-1}+\varphi_k=s$, ed ove $\nu_1^{f_1}, \nu_1^{f_2}, \nu_1^{f_3},\ldots,\nu_1^{f_{k-1}}, \nu^{f_k}$ rappresentano le potenze di ν_1 immediatamente inferiori rispettivamente ad φ_1+1, φ_2+1, φ_3+1, $\ldots$, $\varphi_{k-1}+1$, φ_k+1 od uguali ad essi. Il termine $S_{s_1+s_2+\ldots+s_\delta}$ è evidentemente compreso in quella forma donde si deriva per $\varphi_1=s_1+s_2+\cdots+s_\delta$, $S_{\varphi_1}=\cdots=S_{\varphi_k}=1$ (1).

(1) Vedi Faà De Bruno, *Téorie générale de l'élimination*. Paris 1859, pag. 4-7.

I. caso in cui $a_1 > \varepsilon_{s+1}$. È evidente che qui ad ogni singolo fattore S_{φ_i}, ove $\varphi_i \overline{\gtrless} s$, del termine generale suriportato è applicabile la formula (11) del § 2, sicchè in forza di essa si ottiene

$$(S_{\varphi_1} S_{\varphi_2} S_{\varphi_3} \dots S_{\varphi_{k-1}} S_{\varphi_\delta}) = \prod_{i=1}^{i=k} M(\nu^{a_1-\varepsilon_{\varphi_i+1}}) = M\left(\nu_1^{ka_1 - \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_{\varphi_i+1}}\right)$$

ed anche per

$$\varphi_1 = s_1 + s_2 + \cdots + s_\delta,\ k = 1,\ S_{\varphi_2} = \cdots = S_{\varphi_\delta} = 1, S_{s_1+s_2+\dots+s_\delta} = M(\nu_1^{a_1-\varepsilon_{s+1}}).$$

Ma dalla relazione ricavata dal precedente Lemma

$$\varepsilon_{s+1} + \sum_{i=1}^{i=k-1} f_i \overline{\gtrless} \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_{\varphi_i+1}$$

si deduce la diseguaglianza

$$ka_1 - \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_{\varphi_{i+1}} \overline{\gtrless} (a_1 - \varepsilon_{s+1}) + \sum_{i=1}^{i=k-1} (a_1 - f_i)$$

per cui si ottiene

$$\nu_1^{ka_1 - \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_{\varphi_i+1}} \overline{\gtrless} \nu_1^{(a_1-\varepsilon_{s+1}) + \sum_{i=1}^{i=k} (a_1 - f_i)} \overline{\gtrless} \nu_1^{a_1-\varepsilon_{s+1}},$$

essendo $a_1 - f_i > 0$ e ciò perchè da $f_i \overline{\gtrless} \varepsilon_{\varphi_i+1}$ segue $a_1 - f_i \overline{\gtrless} a_1 - \varepsilon_{\varphi_i+1} > 0$.

Pertanto la funzione simmetrica $S(u_1^{s_1} u_2^{s_2} \dots u_\delta^{s_\delta})$, poichè ogni suo termine contiene come divisore una potenza di ν_1 superiore o per lo meno uguale a $\nu_1^{a_1-\varepsilon_{s+1}}$, cioè a quella minima di cui è multiplo $S_{s_1+s_2+\dots+s_\delta}$, sarà essa stessa sempre divisibile per questa ultima potenza, onde necessariamente si avrà

$$S(u_1^{s_1} u_2^{s_2} u_3^{s_3} \dots u_{\delta-1}^{s_{\delta-1}} u_\delta^{s_\delta}) = M(\nu_1^{a_1-\varepsilon_{s+1}}). \tag{6}$$

II. caso in cui $a_1 \overline{\gtrless} \varepsilon_{s+1}$. In conseguenza del Teorema dato nel § 2 il termine $S_{s_1+s_2+\dots+s_\delta}$ nello sviiuppo della funzione simmetrica proposta ed anche altri, quelli cioè in cui tutte le $\varepsilon_{\varphi_i+1}$ sono $\overline{\gtrless} a_1$, possono essere o primi relativi a ν_1 o per questo divisibili; sicchè anche la funzione simmetrica sarà d'uguale natura come era da dimostrare.

Corollario. — Questo Teorema seguita a sussistere anche quando alcune delle $s_1, s_2, \dots, s_\delta$ od anche tutte sono uguali fra di sè.

PARTE SECONDA

Teorema di Wilson generalizzato.

Il Teorema Wilsoniano, come fu sopra considerato, dipende dal seguente Problema: Se P è il prodotto di tutti i numeri minori di un dato numero intero e positivo n e primi relativi allo stesso n determinare il residuo minimo assoluto D a cui P resulta congruo secondo il modulo n. Trattandosi adunque della risoluzione della congruenza di primo grado

$$\text{(I)} \qquad P \equiv D \pmod{n},$$

in cui P ed n sono supposti noti e D incognito, distingueremo differenti casi secondochè n è un numero primo assoluto ovvero composto e secondo i fattori di cui è formato.

§ 1.

Il numero n *è primo assoluto.*

I. caso: $n = 2$. Poichè in questo caso si ha $P = 1$, dalla congruenza $1 \equiv D \pmod{n}$ si ottiene il valore

$$\text{(1)} \qquad D = \pm 1.$$

II. caso: $n = \nu_1$ numero primo dispari. Posto

$$\text{(2)} \qquad F(x) = \prod_{h=1}^{h=\nu_1-1} (x+h) = \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\nu_1-1} A_\zeta \cdot x^{(\nu_1-1)-\zeta}, \quad A_0 = 1$$

avremo

$$\text{(3)} \qquad A_\zeta = \sum a_1 a_2 a_3 .. a_\zeta$$

ove $a_1, a_2, a_3, .., a_\zeta$ rappresentano numeri qualunque differenti l'uno dall'altro presi nella serie

$$1.\ 2.\ 3 \ldots (\nu_1 - 2) . (\nu_1 - 1)$$

ed ove $\sum$ ha da essere esteso a tutte le combinazioni formate coi termini di questa stessa serie ζ a ζ; ed avremo inoltre in conseguenza delle formule di Newton

$$\text{(4)} \qquad \lambda A_\lambda - \sum (-1)^\theta A_\tau S_\theta + (-1)^\lambda S_\lambda = 0$$

in cui (τ, θ) sono tutte le soluzioni positive ed intere ma escluso lo zero che ammette l'equazione

$$\text{(5)} \qquad \tau + \theta = \lambda,$$

la costante arbitraria λ dovendo assumere successivamente i valori $\lambda = 1, 2, 3, \ldots (\nu_1 - 2), (\nu_1 - 1)$ per il primo dei quali la (4) diviene $A_1 - S_1 = 0$.

Considerando ora che per effetto e del Corollario primo del Teorema del § 2 Parte I^a, e della relazione (8) stabilita nel Corollario al Lemma III ivi, se applicati all'equazione superiore (4) si ottengono le congruenze per tutti i valori di $\lambda < \nu_1 - 1$

$$S_\lambda \equiv 0\,, \ \sum(-1)^\theta A_\tau S_\theta \equiv 0, \ \lambda A_\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \nu_1);$$

per $\lambda = (\nu_1 - 1)$

$$(\nu_1 - 1)(1 + A_{\nu_1 - 1}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \nu_1).$$

Pertanto, essendo λ e $(\nu_1 - 1)$ numeri primi relativi a ν_1, le precedenti congruenze finali rispettivamente divise per λ e per $(\nu_1 - 1)$ si riducono a queste

$$A_\lambda \equiv 0, \ 1 + A_{\nu_1 - 1} \equiv 0 \quad (\text{mod. } \nu_1) \ (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu_1 - 2).$$

Ora perchè dalla (3) si ricava

$$A_{\nu_1 - 1} = \sum a_1 a_2 a_3 \ldots a_{\nu_1 - 1} = 1.2.3\ldots(\nu_1 - 1) = P$$

l'ultima congruenza diventa

$$P \equiv -1 \qquad (\text{mod. } \nu_1);$$

sicchè con questa s'identifica la (I) quando a D si attribuisce il valore

$$D = -1. \tag{6}$$

I due casi qui considerati comprendono, come è noto, il Teorema quale fu enunciato da Wilson e dimostrato da Lagrange [1].

§ 2.

Il numero n *potenza intera e positiva di un numero primo assoluto e doppio di essa se il numero primo è dispari.*

I. caso: $n = \nu_1^{a_1}$, essendo ν_1 un numero primo dispari ed a_1 un intero positivo.

I numeri minori di $\nu_1^{a_1}$ e primi relativi ad esso, in virtù del Corollario al Teorema dimostrato nel § 1. Parte I, si possono nel presente caso distribuire in $(\nu_1 - 1)$ classi, ognuna delle quali rappresentata da $\nu_1 . u + h$, purchè h designi uno dei numeri $1.2.3\ldots(\nu_1 - 2).(\nu_1 - 1)$ ed u riceva successivamente i valori $u = 0, 1, 2, 3, \ldots (\nu_1^{a_1 - 1} - 2), (\nu_1^{a_1 - 1} - 1)$, ovvero $0.1.2.3 \ldots (\xi - 1)$, ξ avendo posto per brevità $\xi = \nu_1^{a_1 - 1} - 1$.

Premesse ciò il prodotto P di tali numeri sarà manifestamente espresso dalle formule

$$F(u\nu_1) = \prod_{h=1}^{h=\nu_1 - 1} (\nu_1 u + h) = \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\nu_1 - 1} A_\zeta (\nu_1 u)^{(\nu_1 - 1) - \zeta}, \qquad P = \prod_{u=0}^{u=\xi} F(u\nu_1) \tag{1}$$

la prima delle quali, in conseguenza delle congruenze

$$A_\zeta \equiv 0\,,\quad A_{\nu_1-1} \equiv -1 \pmod{\nu_1}\ (\zeta = 1.2\ldots, \nu_1 - 2$$

stabilite nel precedente paragrafo, allorchè si faccia

$$(2)\qquad A_\zeta = \nu_1 B_\zeta\,,\quad A_{\nu_1-1} = \psi$$

si trasforma nella

$$(3)\qquad F(u\nu_1) = \psi + \nu_1^2.\sum_{\zeta=0}^{\zeta=\nu_1-2} B_\zeta.u^{(\nu_1-1)-\zeta}.\nu_1^{(\nu_1-2)-\zeta}$$

mentre la seconda diviene

$$(4)\qquad P = \psi\prod_{u=1}^{u=\xi}.F(u\nu_1) = \psi\sum_{k=0}^{k=\nu_1\xi}.V_k\,\nu_1^k,\ V_0 = \psi^\xi.$$

La determinazione del coefficente del termine generale $V_k\,\nu_1^k$ si può facilmente ottenere applicando alla funzione $\frac{P}{\psi} = P_1$, ove si deve porre

$$(5)\qquad F(z.u) = \psi + z^2.\sum_{\zeta=0}^{\zeta=\nu_1-2}.B_\zeta.u^{(\nu_1-1)-\zeta}.z^{(\nu_1-2)-\zeta},$$

z allora significando la variabile indipendente, il Teorema di Mac-Laurin e sostituendo poi nelle formule trovate la ν_1 invece della z.

Tale sviluppo richiede che venga costruita la derivata μ^{ma}, presa rispetto alla z, del prodotto P_1 i cui fattori $F(1.z)$, $F(2.z)$, $F(3.z)$, ..., $F(\xi.z)$ si possono per brevità indicare con U_1, U_2, U_3, ..., U_ξ. La qual derivata ottenuta mediante le note regole di calcolo si può porre nella seguente forma:

$$P_1^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{i=\xi}\frac{P_1}{U_i}.U_1^{(\mu)} + \sum_{\delta=2}^{\delta=\mu}\left\{\sum\left[\frac{P_1}{U_{i_1}\,U_{i_2}..U_{i_\delta}}\sum\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\tau_1).\Gamma(\tau_2)..\Gamma(\tau_\delta)}U_{i_1}^{(\tau_1)}.U_{i_2}^{(\tau_2)}..U_{i_\delta}^{(\tau_\delta)}\right]\right\}$$

ove nel secondo termine l'ultimo segno sommatorio a destra deve essere esteso a tutte le soluzioni differenti, intere e positive, escluso però lo zero, dell'equazione

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_\delta = \mu$$

ed ove il primo $\sum$ interno deve essere esteso a tutte le combinazioni degli indici $1.2,3\ldots(\xi-1).\xi$ fatte δ a δ, $i_1\,i_2..i_\delta$ significando una qualunque di esse.

Nel caso presente, poichè si hanno, qualunque valore riceva la u,

$$(U_u)_0 = \psi\,,\ (U'_u)_0 = 0\,,\ (U_u^{(\chi)})_0 = \Gamma(\chi).B_{\nu_1-\chi}\,,\ (\chi = 2, 3, .., \nu_1)$$

(1) Vedi: Die Lehre von der Krestheihmg von Dr. P. Bachmann. Leipzig, 1872, p. 28.

ed $(C_u^{(\tau_1+w)})_0=0$ per ogni valore intero e positivo di w, se S denota funzioni simmetriche semplici o multiple dei numeri 1. 2. 3...ξ ed $E\left(\frac{\mu}{2}\right)$ il più grande intero contenuto in $\frac{\mu}{2}$, la formula surriportata si trasforma in questa

$$(6) \qquad V_\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)}(P_1^{(\mu)})_0 = \psi^{\xi-1} B_{\nu-\mu} S_{\mu-1} +$$

$$+ \sum_{\delta=2}^{\delta=E\left(\frac{\mu}{2}\right)} \psi^{\xi-\delta}\left(\sum B_{\nu_1-\tau_1} B_{\nu_1-\tau_2} \ldots B_{\nu_1-\tau_\delta} . S\left(u_1^{\tau_1-1}.u_2^{\tau_2-1} .. u_\delta^{\tau_\delta-1}\right)\right)$$

ove $u_1, u_2, .., u_\delta$ significano numeri qualunque della serie 1. 2. 3..ξ ed il $\sum$ interno del secondo termine si estende a tutte le soluzioni differenti, intere e positive ma escluso lo zero, dell'equazione $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_{\delta-1} + \tau_\delta = \mu$, soppresse però quelle che contengono una o più delle τ od uguali ad uno ovvero maggiori di ν_1.

Ora è manifesto che alla formula (6) in cui si ha $(\tau_1-1)+(\tau_2-1)+\cdots+(\tau_{\delta-1}-1)+(\tau_\delta-1)=\mu-\delta$, ed $\varepsilon_\mu \overline{\overline{>}} \varepsilon_{\mu-\delta+1}$ si possono sempre e completamente applicare i Teoremi e del § 2 ed il III del § 4 Parte I. In virtù di questi nella supposizione che sia $a_1 > \varepsilon_\mu$ e così pure $a_1 > \varepsilon_{\mu-\delta+1}$ si trova

$$V_\mu.\nu_1^\mu = \nu_1^\mu M\left(\nu_1^{a_1-\varepsilon_\mu}\right) + \nu_1^\mu. \sum_{\delta=2}^{\delta=E\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\nu_1^{a_1-\varepsilon_{\mu-\delta+1}}\right),$$

ovvero

$$V_\mu - \nu_1^\mu = M\left(\nu_1^{a_1+\mu-\varepsilon_\mu}\right) + \sum_{\delta=2}^{\delta=E\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\nu_1^{a_1+\mu-\varepsilon_{\mu-\delta+1}}\right)$$

ove tanto $a_1+\mu-\varepsilon_\mu$ quanto $a_1+\mu-\varepsilon_{\mu-\delta+1}=(a_1+\delta-1)+(\mu-\delta+1)-\varepsilon_{\mu-\delta+1}$, per il Lemma I del § 2 Parte I^a, sono ambedue maggiori di a_1. Nell'altra supposizione di $a_1 \overline{\overline{<}} \varepsilon_\mu$ parimente si trova che, mentre V_μ resulta come le funzioni simmetriche che contiene un numero qualsivoglia divisibile o no per ν_1, la potenza ν_1^μ, in seguito all'ultimo Teorema sopra citato, è sempre $> \nu_1^{\varepsilon_\mu} > \nu_1^a$. Laonde in ogni caso, cioè qualunque siano a_1 e μ, sussiste la congruenza

$$V_\mu\, \nu_1^\mu \equiv 0 \pmod{\nu_1^{a_1}};$$

cosicchè l'equazione (4), in cui $\sum_{k=1}^{k=\nu_1\xi} V_k \nu_1^k$ diviene congrua a zero secondo il modulo $\nu_1^{a_1}$, produce la

$$(7) \qquad P \equiv \psi^{\xi+1} \equiv \psi^{\nu_1^{a_1-1}} \pmod{\nu_1^{a_1}}.$$

Però avendo per la seconda dell'equazioni (2) e per il § 1 $\psi \equiv -1 \pmod{\nu_1}$ è manifesto che ψ deve essere uguale ad un multiplo di ν_1 diminuito di 1 ovvero ad $R\nu_1 - 1$, onde la potenza dispari $(\nu_1^{a_1-1})^{ma}$. di questo binomio è espressa dalla formula

$$\psi^{\nu_1^{a_1-1}} = (R\nu_1 - 1)^{\nu_1^{a_1-1}} = (R\nu_1)^{\nu_1^{a_1-1}} + \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(\nu_1^{a_1-1}-1)} (-1)^i \binom{\nu_1^{a_1-1}}{i} (R\nu_1)^i \left[(R\nu_1)^{\nu_1^{a_1-1}-2i} - 1 \right] - 1$$

in quantochè tanto $(-1)^{\nu_1^{a_1-1}-2i}$ quanto $(-1)^{\nu_1^{a_1-1}}$ sono uguali a -1. Questa, osservando che il numero $\left[(R\nu_1)^{\nu_1^{a_1-1}-2i} - 1\right]$, il cui minimo valore è $(R\nu_1) - 1 > 0$, rimane sempre primo a ν_1 per qualsivoglia valore si attribuisca ad i, e che inoltre si ha $\binom{\nu_1^{a_1-1}}{i} = M(\nu_1^{a_1-1-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1})})$, Teorema I, formula (2) del § 4, Parte I[a], si trasforma nella

$$\psi^{\nu_1^{a_1-1}} = M\left(\nu_1^{\nu_1^{a_1-1}}\right) + \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(\nu_1^{a_1-1}-1)} . M(\nu_1^{a_1-1-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1})+i}) - 1. \tag{8}$$

Ora è facile mostrare che gli esponenti di ν_1, $a_1 - 1 + i - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$, $(i = 1, 2, .. \frac{1}{2}(\nu_1^{a_1-1} - 1)$ sono tutti necessariamente $\overline{\geq} a_1$. Infatti per il primo $\nu_1^{a_1-1}$ è ciò di per sè stesso evidente mentre per gli altri ciò resulta dalle diseguaglianze $(a_1 - 1) + i - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) > a_1 - 1 + \varepsilon_{i-1} > a_1 - 1$ $(i = 1, 2, .., \frac{1}{2}(\nu_1^{a_1-1} - 1)$ sussistenti per effetto della relazione $\varepsilon_i \overline{\leq} i$, Lemma I, § 2, Parte I[a]. Pertanto dalle (7), (8) segue

$$P \equiv \psi^{\nu_1^{a_1-1}} \equiv -1 \pmod{\nu_1^{a_1}}$$

congruenza che diventa identica colla (I) quando si faccia

$$D = -1. \tag{9}$$

§ 3.

Continuazione del precedente paragrafo.

II. caso in cui è $n = 2^{a_1}$, a_1 intero positivo [1]. Qui la serie dei numeri minori di n si compone dei $\varphi(n)$ numeri dispari che da 1 vanno fino ad $(n - 1)$ inclusive rappresentabili con $(2h - 1)$ $(h = 1, 2, .., \varphi(n))$. Per procedere come nel caso I del para-

[1] Benchè sia facile stabilire la congruenza $P \equiv \mp 1 \pmod{2^{a_1}}$ deducendola direttamente dalle proprietà dei numeri dispari che compongono P (vedi più oltre § 5) tuttavia espongo la presente dimostrazione analoga a quella svolta pel modulo $\nu_1^{a_1}$ perchè conforme al metodo di Lagrange.

grafo precedente distribuendo cioè tali numeri in classi nel modo indicato dal Corollario al Teorema del § 1, Parte I^a, non si può fare l uguale al numero primo 2 poichè allora si avrebbe una unica classe; ma al minimo si deve porre $l=2^2$, $m=2^{a_1-2}$ tanto chè si rende necessario distinguere quando $a_1=2$ da quando si ha $a_1>2$.

Si supponga dapprima $n=2^2$, $\varphi(n)=2$. Presa l'equazione

$$(1) \qquad F(x)=\prod_{h=1}^{h=\varphi(n)}(x+(2h-1))=\sum_{\zeta=0}^{\zeta=\varphi(n)}C_\zeta x^{\varphi(n)-\zeta},\ C_0=1,\ C_{\varphi(n)}=P,$$

ove i coefficienti C_ζ hanno il consueto significato, si ricava dalla prima delle formule di Newton $C_1=s_1$, e dal Teorema, formula (3) del § 3, Parte I^a, $s_1\equiv 0$ (mod. $n=2^2$). Attribuito ad x il valore $x=-1$, si ottiene la identità $F(-1)=1-C_1+C_2=0$ la quale immediatamente produce la congruenza

$$(2) \qquad C_2=P\equiv -1 \pmod{n=2^2},$$

che si trasforma nella (I) quando sia

$$(2)^{\text{bis}} \qquad D=-1\ (^1).$$

Veniamo ora al caso generale di $n=2^{a_1}$, essendo a_1 un intero positivo qualunque ma maggiore di 2. Allora i numeri dispari minori di n si possono distribuire nelle classi caratterizzate da $2^2.u+b=z.u+b$, ove b deve assumere soltanto $\varphi(2^2)=2$ valori che designeremo con β_1, β_2 ed u deve assumere la serie dei valori 0, 1, 2, ..., $(2^{a_1-2}-1)=\xi$. Quindi fatto

$$F(uz)=(zu+\beta_1)(zu+\beta_2)=\sum_{\zeta=0}^{\zeta=\varphi(z)}C_\zeta(zu)^{\varphi(z)-\zeta}=(zu)^2+C_1(zu)+C_2$$

in cui sono, per ciò che precede, $C_1\equiv 0$, $C_2\equiv -1$ (mod. z), e posto $C_1=B_1z$, $C_2=\psi$, si trova

$$U_u=F(uz)=z^2(u^2+B_1u)+\psi;$$

onde si avrà per $P=C_{\varphi(n)}$ la espressione

$$P=\prod_{u=0}^{u=\xi}.U_u,\ P_1=\frac{P}{\psi}=\prod_{u=1}^{u=\xi}U_u=\sum_{k=0}^{k=\xi}W_{2k}z^{2k},\ W_0=\psi^\xi.$$

ove per il Teorema di Mac-Laurin considerata P_1 come funzione di z deve essere $W_{2k}=\frac{1}{\Gamma(2k)}(P_1^{(2k)})_0$. Applicata ora al calcolo di questo coefficiente W_{2k} la formula sopra riportata nel § 2, attesochè si hanno

$$(U_u)_0=\psi,\ (U'_u)=0,\ (U_u'')_0=2(u^2+B_1u),\ (U_u^{(2+s)})_0=0,$$

(1) È possibile ricavare dalla equazione (1) anche la congruenza $P\equiv 1$ (mod. 2^a), $a_1>2$, adoperando però una delle proprietà dei fattori che compongono P (vedi più oltre § 5).

s intero positivo qualunque, si ottiene

$$W_{2k} = \psi^{\xi-k} . \sum (u^2 + B_1 u)_{i_1} . (u^2 + B_1 u)_{i_2} \dots (u^2 + B_1 u)_{i_k} ,$$

ove $\sum$ ha da essere esteso a tutte le combinazioni k a k dei numeri $1.2..\xi$, ed ove $i_1\, i_2 .. i_k$ rappresenta una qualunque delle medesime. Effettuato lo sviluppo di questa espressione, essa diviene

$$W_{2k} = \psi^{\xi-k} . \left[S\left(u_{i_1}^2 u_{i_2}^2 .. u_{i_k}^2\right) + \sum_{j=1}^{j=k-1} B_1{}^j \sum S\left(u_{i_1} u_{i_2} .. u_{i_j} . u_{i_{j+1}}^2 \dots u_{i_k}^2\right) + B_1{}^k S u_{i_1} u_{i_2} .. u_{i_k}\right]$$

ove il secondo $\sum$ si applica a tutte le combinazioni j ad j degli indici $i_1, i_2, .., i_k$ in modo che le u abbiano per indici gli j elementi della combinazione e le u^2 quelli rimanenti.

Se ora si osserva che nei prodotti $\Gamma(2k+1)$, $\Gamma(2k+1-j)$, $(j = 1, 2, .., k)$ il divisore 2 entrerà nel primo col massimo esponente sicchè sarà $\varepsilon_{(2k+1)} \geqq \varepsilon_{(2k+1-j)}$ $(j = 1, 2, .., k)$, si vede che si può applicare a W_{2k} il Teorema III, § 4, Parte I^a, distinguendo i due casi in esso considerati.

1. Se $a_1 > \varepsilon_{(2k+1)}$ e perciò $> \varepsilon_{(2k+j-1)}$, W_{2k} diventa

$$W_{2k} = M\left(2^{a_1 - \varepsilon_{(2k+1)}}\right) + \sum_{j=1}^{j=k} M\left(2^{a_1 - \varepsilon_{(2k+j-1)}}\right), \text{ ed a fortiori } = M\left(2^{a_1 - \varepsilon_{(2k+1)}}\right).$$

2. Se $a_1 \leqq \varepsilon_{(2k+1)}$, (non escluso però che a_1 possa anche non esser maggiore d'altri esponenti), uno o più termini di W_{2k} possono risultare primi a 2, sicchè questo W_{2k} può essere o no primo a 2.

Di qui si traggono le relazioni

$$\text{per } a_1 > \varepsilon_{2k+1}, \quad W_{2k} z^{2k} = M\left(2^{a_1 + 4k - \varepsilon_{2k+1}}\right), \text{ a fortiori } = M\left(2^{a_1}\right),$$

$$\text{per } a_1 \leqq \varepsilon_{2k+1}, \quad W_{2k} z^{2k} = M\left(2^{4k}\right), \qquad \text{a fortiori } = M\left(2^{a_1}\right);$$

dalle quali si concludono

$$\sum_{k=1}^{k=\xi} W_{2k} z^{2k} \equiv 0, \quad P_1 \equiv \psi^{\xi} \quad \text{ed} \quad P \equiv \psi^{\xi+1} \quad (\text{mod. } n = 2^{a_1}).$$

Però avendo, per quanto fu sopra dimostrato, $\psi = 2^2 . T - 1$, T intero positivo qualunque, si ottiene

$$\psi^{\xi+1} = \left[(2^2 T)^{2^{a_1-3}} + 1\right] + \sum_{i=1}^{i=2^{a_1-3}-1} . (-1)^i \binom{2^{a_1-2}}{i} (2^2 T)^i \left((2^2 T)^{2^{a_1-3}-2i} + 1\right) +$$

$$+ \binom{2^{a_1-2}}{2^{a_1-3}} (2^2 T)^{2^{a_1-3}}$$

la quale, applicate le formule (2), (4) del Teorema I, § 4, Parte Iª, si riduce nella

$$\psi^{\xi+1} = \left[M(2^{2^{a_1-1}}) + 1\right] + \sum_{i=0}^{i=2^{a_1-2}-1} . M(2^{a_1-2-(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1})+2i}) + M(2^{2^{a_1-2}+1}),$$

$$\text{a fortiori} = M(2^{a_1}) + 1,$$

in quantochè gli esponenti di 2 non sono minori di a_1 avendo

$$2^{a_1-1} > a_1, \quad a_1 - 2 + 2i - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) = a_1 + \varepsilon_{i-1} + i - 2 + i - \varepsilon_i \mathrel{\overline{\overline{>}}} a_1,$$

$$2^{a_1-2} + 1 > a_1 - 1 + 1 > a_1.$$

Pertanto si conclude che sussistono insieme le congruenze

$$P \equiv \psi^{\xi+1}, \quad \psi^{\xi+1} \equiv 1 \ (\text{mod. } n = 2^{a_1}),$$

da cui segue

$$P \equiv 1 \ (\text{mod. } n = 2^{a_1}), \ a_1 > 2$$

la quale poi si converte nella (I) facendo

(5) $$D = 1$$

III. caso in cui è $n \equiv 2\nu_1^{a_1}$, essendo ν_1 un numero primo dispari ed a_1 un intero positivo.

Se Q rappresenta il prodotto dei numeri minori di $\nu_1^{a_1}$ e primi ad esso e P il prodotto dei numeri minori di $2\nu_1^{a_1}$ e primi a $2\nu_1^{a_1}$, il Teorema II del § 4, Parte Iª ed il § 2, caso I danno

$$P \equiv Q \ (\text{mod. } \nu_1^{a_1}), \ Q \equiv -1 \ (\text{mod. } \nu_1^{a_1}),$$

da cui proviene $P + 1 = M(\nu_1^{a_1})$. Ma poichè P è dispari e così $P + 1$ un multiplo di 2, quest'equazione diventa $P + 1 = M(2\nu_1^{a_1})$, e quindi produce la congruenza

$$P \equiv -1 \ (\text{mod. } 2\nu_1^{a_1}),$$

donde segue che il valore di D nella (I) è

(8) $$D = -1.$$

§ 4.

In numero n *composto di più fattori primi, ovvero*

$$n = 2^{a_0} \nu_1^{a_1} \nu_2^{a_2} \ldots \nu_i^{a_i} \ldots \nu_N^{a_N}$$

designando $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_N$ *numeri primi dispari*
ed $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i \ldots a_N$ *interi positivi qualunque,*
di cui almeno due devono essere differenti da zero.

I. caso: a_0 od uguale a zero o maggiore di 1.

In virtù del Teorema dimostrato nel § 1, Parte Iª i $\varphi(n)$ numeri minori di n ed a questo primi, il cui prodotto è P, si devono dapprima distribuire in $\varphi(2^{a_0})$ classi caratterizzate dalla relazione $2^{a_0}u + r_0$, essendo r_0 uno dei $\varphi(2^{a_0})$ numeri

minori di 2^{a_0} e primi a 2^{a_0}, i quali tutti danno per prodotto P_0, e ciascuna classe rimanendo composta di $\varphi\left(\frac{n}{2^{a_0}}\right)$ termini minori di n e primi ad n; dipoi in egual modo i numeri medesimi si hanno successivamente a distribuire in $\varphi(\nu_i^{a_i})$ classi determinate da

$$\nu_i^{a_i} u + r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

ove parimente r_i significa uno qualunque dei numeri minori di ν_i e primi ad ν_i, il prodotto dei quali sarà designato con P_i, ed ove ogni classe consta di $\varphi\left(\frac{n}{\nu_i^{a_i}}\right)$ termini primi ad n. Di qui, in virtù del Teorema citato, si ricavano immediatamente le congruenze

$$P \equiv (P_0)^{\varphi\left(\frac{n}{2^{a_0}}\right)} \ (\text{mod. } 2^{a_0}), \ P \equiv (P_i)^{\varphi\left(\frac{n}{\nu_i^{a_i}}\right)} (\text{mod. } \nu_i^{a_i}) \ (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Queste, in conseguenza delle relazioni stabilite nei § 1, 2, 3 per cui sono $P_0 \equiv \mp 1$ (mod. 2^{a_0}), secondo chè si ha $a_0 = 2$, $a_0 > 2$ ed

$$P_i \equiv -1 \ (\text{mod. } \nu_i^{a_i}) \ (i = 1, 2, \ldots N)$$

e del fatto che gli esponenti $\varphi\left(\frac{n}{2^{a_0}}\right)$, $\varphi\left(\frac{n}{\nu_i^{a_i}}\right)$, qualunque i, sono pari, divengono

$$P \equiv 1 \ (\text{mod. } 2^{a_0}), \ P \equiv 1 \ (\text{mod. } \nu_i^{a_i}) \ (i = 1, 2, \ldots, N;$$

donde, perchè $2_1^{a_0}, \nu_1^{a_1}, \nu_2^{a_2}, \ldots, \nu_N^{a_N}$ sono primi relativi l'uno all'altro, manifestamente si trae $P \equiv 1$ (mod. 1) e perciò nella congruenza (I) risulta

$$D = 1. \tag{1}$$

II. caso: $a_0 = 1$ e due almeno degli altri esponenti differenti da zero.

Indicando con Q il prodotto dei numeri minori di $\frac{n}{2}$ e primi ad esso e con P quello dei numeri minori di n e primi ad n, applicando tanto il Teorema II del § 4, I. quanto la relazione sopra stabilita, si hanno

$$P \equiv Q \left(\text{mod. } \frac{n}{2}\right), \ Q \equiv 1 \left(\text{mod. } \frac{n}{2}\right),$$

e perciò $P - 1 \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{n}{2}\right)$. Ma siccome il prodotto P, composto com'è di fattori dispari, resulta esso pure dispari e quindi $P - 1$ pari, la congruenza che precede si trasforma nella $P \equiv 1$ (mod. n), onde nella (I) si deve porre

$$D = 1. \tag{2}$$

Riepilogo.

Raccogliendo i resultati a cui si giunse nei paragrafi precedenti si conclude che nella congruenza

$$P \equiv D \pmod{n}$$

D assume i seguenti valori

$D = -1$ per $n = 2, 2^2, \nu_1^{a_1}, 2\nu_1^{a_1}$

$D = +1$ per $n = 2^{a_0}, a_0 > 2, n = 2^{a_0} \nu_1^{a_1} \nu_2^{a_2} \ldots \nu_N^{a_N}$, a_0 qualunque.

§ 5.

Altre dimostrazioni nel caso in cui il modulo n è potenza di numero primo.

Oltre i procedimenti seguiti nei § 2, 3 per dimostrare il Teorema Wilsoniano generalizzato quando il modulo è potenza intera e positiva di un numero primo, procedimenti che pare ben convengano al metodo di Lagrange, quì ne esporrò altri assai più semplici, ma da quelli quasi del tutto indipendenti.

I: $n = \nu_1^{a_1}$. In forza del Corollario al Teorema del § 1, Parte I[a] in cui è da porre $l = \nu_1^t$, $m = \nu_1$, tutti i $\varphi(\nu_1^{t+1})$ numeri primi relativi a ν_1^{t+1} e minori di questo si possono distribuire in $\varphi(\nu_1^t)$ classi definite dalla relazione

$$\nu_1^t u + \beta_t$$

nella quale i

$$\beta_t \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots, \varphi(\nu_1^t))$$

sono tutti i $\varphi(\nu_1^t)$ numeri minori di ν_1^t e primi a ν_1^t ed in cui u ha da prendere successivamente i valori

$$u = 0 . 1 . 2 . 3 \ldots (\nu_1 - 2), (\nu_1 - 1).$$

Designato con $F(\beta_t)$ il prodotto $\prod_{u=0}^{u=\varphi(\nu_1)} (\nu_1^t u + \beta_t)$, ove si fa variare unicamente la u considerandovi come costante la β_t, ha luogo l'equazione

$$F(\beta_t) = \beta_t \prod_{u=1}^{u=\varphi(\nu_1)} (\nu_1^t u + \beta_t)$$

a cui si può anche dare la forma

$$F(\beta_t) = \beta_t \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\varphi(\nu_1)} A_\zeta \beta_t^{\varphi(\nu_1)-\zeta}, \; A_0 = 1.$$

Se ora si tratta quest'equazione nel modo medesimo col quale nel § 1 si operò sull'equazione (3) con cui s'identifica ponendo

$$A_\zeta = \nu_1^{i\zeta} \mathrm{A}_\zeta \,,\; A_{\varphi(\nu_1)} = \nu_1^{i\varphi(\nu_1)} \mathrm{P}_1 \,, \text{ essendo } \mathrm{P}_1 = \Gamma(\nu_1 - 1)\,,$$

e quindi $A_\zeta = \nu_1^{\zeta i+1} A'_\zeta$ $(\zeta = 1, 2, \ldots, \varphi(\nu_1) - 1)$ si trova

$$\mathrm{F}(\beta_t) = \beta_t^{\nu_1} + \beta_t \nu_1^{i+1} \left[\sum_{\zeta=1}^{\zeta=\nu_1-2} \nu_1^{i(\zeta-1)} A'_\zeta \beta_t^{\varphi(\nu_1)-\zeta} + \nu_1^{i(\nu_1-1)-1} \mathrm{P}_1 \right],$$

la quale, essendo manifestamente $(\zeta - 1) \gtreqless 0$, $i(\nu_1 - 1) - 1 > 0$, può anche essere rappresentata più brevemente da

$$\mathrm{F}(\beta_t) = \beta_t^{\nu_1} + \nu_1^{i+1} f(\nu_1, \beta_t)\,,$$

la funzione razionale ed intera $f(\nu_1, \beta_t)$ non ammettendo per divisore ν_1.

Supposto che P_{i+1} sia uguale al prodotto dei $\varphi(\nu_1^{i+1})$ numeri minori di ν_1^{i+1} e primi a questo e parimente che P_i sia quello relativo ad ν_1^i, dalla

$$\mathrm{F}(\beta_t) \equiv \beta_t^{\nu_1} \pmod{\nu_1^{i+1}}$$

procede immediatamente l'altra congruenza

$$\mathrm{P}_{i+1} = \prod_{t=1}^{t=\varphi(\nu_1^i)} \mathrm{F}(\beta_t) \equiv \prod_{t=1}^{t=\varphi(\nu_1^i)} \beta_t^{\nu_1} \equiv \mathrm{P}_i^{\nu_1} \pmod{\nu_1^{i+1}}\,.$$

Effettuata la divisione di P_i per ν_1^i per modo che il resto R_i, positivo o negativo che sia, abbia sempre un valore assoluto non maggiore di $\mathrm{E}\left(\frac{\nu_1^i}{2}\right)$, onde si ha $\mathrm{P}_i = \mathrm{Q}\,\nu_1^i + \mathrm{R}_i$, Q intero qualunque, resulterà per la formula del binomio

$$\mathrm{P}_i^{\nu_1} = (\mathrm{Q}\,\nu_1^i + \mathrm{R}_i)^{\nu_1} = (\mathrm{Q}\,\nu_1^i)^{\nu_1} + \mathrm{R}_i^{\nu_1} + \sum_{j=1}^{j=\frac{1}{2}\varphi(\nu_1)} \binom{\nu_1}{j} (\mathrm{Q}\nu_1^i)^j \mathrm{R}^j \left[(\mathrm{Q}\nu_1^i)^{\nu_1-2j} + \mathrm{R}^{\nu_1-2j} \right]$$

la quale, per effetto del Teorema I del § 4, Parte I^a^, diviene

$$\mathrm{P}_i^{\nu_1} = \mathrm{M}(\nu_1^{i+1}) + \mathrm{R}_i^{\nu_1}\,, \text{ essendo } \mathrm{P}_i = \mathrm{M}(\nu_1^i) + \mathrm{R}_i\,.$$

Di qui adunque derivano

$$\mathrm{P}_i \equiv \mathrm{R}_i \pmod{\nu_1^i}\,,\quad \mathrm{P}_i^{\nu_1} \equiv \mathrm{R}_i^{\nu_1} \pmod{\nu_1^{i+1}}\,,$$

per cui l'ultima sopra riportata congruenza si converte nella

$$\mathrm{P}_{i+1} \equiv \mathrm{R}_i \pmod{\nu_1^{i+1}}\,.$$

Attribuendo ora ad i successivamente i valori $1 . 2 . 3 \dots (a_1 - 1)$ e sostituito P a P_{a_1} si hanno

$$\begin{array}{llll} P_1 \equiv R_1 \equiv -1 & \text{pel Teorema del § 1,} & P_2 \equiv (-1)^{\nu_1} \equiv -1 & (\text{mod. } \nu_1^2) \\ P_2 \equiv R_2 \equiv -1 & - & P_3 \equiv (-1)^{\nu_1} \equiv -1 & (\text{mod. } \nu_1^3) \\ \dots\dots\dots\dots, & - & \dots\dots\dots\dots\dots & \\ P_{a_1-2} \equiv R_{a_1-2} \equiv -1 & - & P_{a_1-1} \equiv (-1)^{\nu_1} \equiv -1 & (\text{mod. } \nu_1^{a_1-1}) \end{array}$$

ed in fine.

$$P_{a_1-1} \equiv R_{a_1-1} \equiv -1 \qquad - \qquad P = P_{a_1} \equiv (-1)^{\nu_1} \equiv -1 \quad (\text{mod. } \nu_1^{a_1})$$

come si richiedeva.

II: $n = 2^{a_1}$. Ritenute le precedenti notazioni anche in questo caso, osservando che nella formula $f(\beta_t)$ u può soltanto ricevere i valori $u = 0, 1$, si trova

$$F(\beta_t) = \beta_t (2^i + \beta_t)$$

e per conseguenza

$$P_{i+1} = \prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} F(\beta_t) = \prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} \beta_t (2^i + \beta_t) = P_i \prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} (2^i + \beta_t) .$$

Inoltre il prodotto $\prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} (2^i + \beta_t)$. svolto secondo le potenze discendenti di 2^i,

$$\prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} (2^i + \beta_t) = \sum_{\zeta=1}^{\zeta=\varphi(2^i)} B_\zeta (2^i)^{\varphi(2^i)-\zeta}, \; B_0 = 1$$

ove si ha $B_\zeta = \Sigma \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\zeta$, dovendo Σ essere esteso a tutte le combinazioni ζ a ζ degli indici $1, 2, \dots, 2^{i-1}$, ed ove si ha da supporre $i \geqq 2$. Osservando che la moltitudine delle combinazioni medesime $\binom{2^{i-1}}{\zeta}$, $\zeta = 1, 2, \dots, (2^{i-1} - 1)$, è sempre divisibile per 2 e perciò pari e ch'ogni prodotto corrispondente a ciascuna di esse è dispari, si rende manifesto che B_ζ si comporrà per somma di un numero pari di ter mini dispari e perciò sarà pari; onde, fatto $B_\zeta = 2B'_\zeta$, l'equazione superiormente trovata si riduce a questa

$$\prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} (2^i + \beta_t) = P_i + 2^{i+1} \Big[2^{i(\varphi(2^i)-1)-1} + \sum_{\zeta=1}^{\zeta=\varphi(2^i)-1} B'_\zeta \, 2^{i(\varphi(2^i)-1-\zeta)} \Big]$$

la quale, perchè gli esponenti $i(\varphi(2^i) - 1) - 1$, $i(\varphi(2^i) - 1 - \zeta)$ per $i \geqq 2$ resultano positivi o nulli ma mai negativi, si trasforma nella

$$\prod_{t=1}^{t=\varphi(2^i)} (2^i + \beta_t) = P_i + M(2^{i+1}) .$$

Pertanto sussiste necessariamente l'equazione $P_{i+1} = P_i^2 + P_i M(2^{i+1})$, donde segue la congruenza

$$P_{i+1} \equiv P_i^2 \quad (\text{mod. } 2^{i+1}) ,$$

che del tutto conviene con quella superiormente stabilita per il modulo ν_1. Denotato di nuovo con R_i il resto, positivo o negativo, della divisione di P_i per 2^i tale però che sia minore di 2^{i-1}, avremo $P_i^2 = (2^i Q + R_i)^2 = R_i^2 + M(2^{i+1})$, sicchè colla precedente congruenza avranno sempre luogo le altre due

$$P_i \equiv R_i \pmod{2^i},\ P_i^2 \equiv R_i^2 \text{ e così anche } P_{i+1} \equiv R_i^2 \pmod{2^{i+1}}.$$

Se ora si attribuiscono successivamente ad i i valori $2, 3, \ldots, a_1 - 2, a_1 - 1$, si trovano

$$\begin{array}{llll} P_2 \equiv R_2 \equiv -1 \pmod{2^2}\ \S\ 3 \text{ al principio} & & P_3 \equiv (-1)^2 \equiv 1 & \pmod{2^3} \\ P_3 \equiv R_3 \equiv 1 \pmod{2^3} & , & P_4 \equiv 1^2 \equiv 1 & \pmod{2^4} \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\ P_{a_1-2} \equiv R_{a_1-2} \equiv 1 \pmod{2^{a_1-2}}, & & P_{a_1-1} \equiv 1^2 \equiv 1 & \pmod{2^{a_1-1}} \end{array}$$

ed infine

$$P_{a_1-1} \equiv R_{a_1-1} \equiv 1 \pmod{2^{a_1-1}}, \qquad P = P_{a_1} \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{2^{a_1}}$$

III. I procedimenti adoperati nel § 3 e sopra allorchè si ha per modulo 2^{a_1} sono il primo del tutto generale l'altro in parte ma ambedue assai conformi a quelli seguiti quando il modulo è potenza intera e positiva di un numero primo dispari: altri due qui seguono, notevoli per la loro più o meno grande semplicità, ma unicamente valevoli pel modulo ivi considerato 2^{a_1} in quanto dipendono in parte o totalmente dalle peculiari proprietà dei numeri dispari di cui consta il prodotto P.

1. Presa di nuovo l'equazione (1) del § 3.

$$F(x) = \prod_{h=1}^{h=\varphi(n)} \left(x + (2h-1)\right) = \sum_{\zeta=0}^{\zeta=\varphi(n)} C_\zeta x^{\varphi(n)-\zeta},\ C_0 = 1,\ C_{\varphi(n)} = P,$$

si consideri delle relazioni di Newton che insiem collegano i coefficienti C_ζ colle somme s_λ delle potenze λ^{me}. de'numeri $(2h-1)$ quella che corrisponde a $\lambda = \varphi(n)$,

$$(-1)^{\varphi(n)} s_{\varphi(n)} + \sum (-1)^\theta C_\tau s_\theta + \varphi(n) C_{\varphi(n)} = 0$$

in cui (τ, θ) si determinano, come altrove, dall'equazione $\tau + \theta = \varphi(n)$.

Da questa ultima equazione è manifesto che, essendo $\varphi(n)$ sempre pari, ogni soluzione (τ, θ) consta di numeri della stessa specie, di guisa che si ha

$$\sum (-1)^\theta C_\tau s_\theta = \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(\varphi(n)-2)} C_{2i} s_{\varphi(n)-2i} - \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)} C_{2i-1} s_{\varphi(n)-2i+1}.$$

Ma, come è noto, C_ζ, eccetto $\zeta = \varphi(n)$ poichè uguaglia la somma di $\binom{\varphi^{(n)}}{\zeta}$, (questo numero pari pel Teorema I, § 4, Parte I^a), addendi dispari, necessariamente riesce un multiplo di 2 e per conseguenza $C_{2i} s_{\varphi(n)-2i}$ un multiplo di n, congruenza (4) del Teorema § 3, Parte I^a; mentre $C_{2i-1} s_{\varphi(n)-2i+1}$, congruenza (3) ivi, è multiplo anche esso di n. Laonde in conseguenza di ciò, e del Corollario al Lemma III, § 2 ivi si hanno

$$\sum (-1) C_\tau s_\theta \equiv 0,\ \text{con } \varphi(n) + \varphi(n) C_{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod{n};$$

delle quali l'ultima, a causa di $n=2\varphi(n)$, diviene

$$\varphi(n)\,C_{\varphi(n)}\equiv n-\varphi(n)\equiv\varphi(n)\qquad(\text{mod. } 2^{a})$$

donde, fatto $M(n)=2^{pa_1+q}.T$ ove p e $q<a_1$ sono interi positivi e T è numero primo a 2, deriva l'equazione

$$C_{\varphi(n)}=2^{a_1(p-1)+(q-1)}.T+1.$$

Ora, se $a_1>2$, $P=C_{\varphi(n)}$, siccome si compone di $\varphi(n)$ fattori, fra cui compariscono,

$$2+1\,,\ 2^2+1\,,\dots,2^{a_1-1}+1\,,$$

sarà sempre maggiore di $2^{(1+2+3+\dots+(a_1-1))}=2^{\frac{1}{2}a_1(a_1-1)}$ e a fortiori $>2^{a_1}$: per la qualcosa l'esponente $a_1(p-1)+(q-1)$ dovrà necessariamente resultare non minore di a_1 e quindi dovrà essere $P=C_{\varphi(n)}=M(2^{a_1})+1$, e così

$$P\equiv1\quad(\text{mod. } 2^{a_1})\,,\quad a_1>2\,.$$

Se poi fosse $a_1=2$, in $C_{\varphi(n)}$ entrano soltanto i fattori $1,(2+1)$, sicchè si ha $2^2>C_{\varphi(n)}>2$: donde si ricava $a_1(p-1)+(q-1)=1$, $T=1$, e perciò

$$P=C_{\varphi(n)}=2+2-1=2^2-1=M(2^{a_1})-1\,,$$

ovvero

$$P\equiv-1\quad(\text{mod. } 2^{a_1}),\ a_1=2.$$

2. In questo caso, ove si ha $n=2^{a_1}$, si trova

$$P=\prod_{h=1}^{h=\varphi(n)}(2h-1)=\prod_{i=1}^{i=\varphi(n)}\beta_i\,,$$

ove è supposto che i β vadano crescendo coi loro indici. Allora, dalla nota relazione, Lemma III, § 2, Parte I^a,

$$\beta_i+\beta_{\varphi(n)-i+1}=n$$

segue che il prodotto,

$$\beta_i\,\beta_{\varphi(n)-i+1}=\beta_i\,n-\beta_i^2=2^{a_1}\beta_i-\beta_i^2\,,$$

perchè β_i è numero dispari, prende sempre necessariamente la forma $4v_i-1$, qualunque sia i. Di qui adunque si deduce essere

$$P=\prod_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)}(\beta_i\,\beta_{\varphi(n)-i+1})=\prod_{i=1}^{i=\frac{1}{2}\varphi(n)}(4v_i-1);$$

la quale relazione dimostra che se $\frac{1}{2}\varphi(n)$ è dispari, e non può esser tale se non per $n=2^2$, deve aversi

$$P=4y-1\,,\qquad a_1=2\,;$$

che se $\frac{1}{2}\varphi(n)$ è pari onde ha da essere $n>2^2$, si avrà

$$P=4y+1\,,\qquad a_1>2.$$

Avendo inoltre

$$P > \prod_{h=2}^{h=\varphi(n)} (2h-2)\,, \text{ con } \prod_{h=2}^{h=\varphi(n)} (2h-2) = 2^{\varphi(n)-1} . \Gamma\left(\varphi(n)+1\right) > 2^{\varphi(n)-1+\varepsilon_{\varphi(n)-1}}$$

sussiste anche a fortiori

$$P > 2^{\varphi(n)+\varepsilon_{\varphi(n)-1}-1} > 2^{a_1} \quad \text{se} \quad a_1 > 2\,;$$

sicchè $4y$ dovrà allora riuscire multiplo di 2^{a_1}.

Pertanto, raccogliendo tali risultati, si conclude come sia sempre

$$P = 2^2 . y - 1 \equiv -1 \qquad (\text{mod. } 2^2)$$

$$P = M(2^{a_1}) + 1 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2^{a_1})\,,\ a_1 > 2.$$

Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1891.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 19 giugno 1892.

Ho l'onore di presentare a questa R. Accademia l'effemeride e la relativa statistica idrometrica del Fiume Tevere pel decorso anno 1891, col quale anno si compie il settimo periodo decennale delle osservazioni quotidiane dell'altezza del pelo d'acqua di detto fiume.

La Memoria che ho l'onore di presentare è pienamente conforme a quelle esibite negli anni precedenti. Essa comprende il registro dell'altezza del pelo d'acqua del Tevere osservato al mezzodì di ciascun giorno di detto anno, tanto all'idrometro presso Orte (cioè prima della confluenza dell'Aniene), quanto all'idrometro di Ripetta; e cioè dopo detta confluenza.

Contiene similmente l'effemeride e la statistica idrometrica dell'Aniene durante il detto anno 1891, ossia il registro dell'altezza del pelo d'acqua di detto fiume osservato quotidianamente all'idrometro esistente all'origine dei cunicoli del monte Catillo.

Finalmente, come nei precedenti anni, alle suddette effemeridi fanno seguito le rappresentazioni grafiche, o diagrammi, delle altezze in esse registrate.

Seguitando, come di consueto, a considerare il Tevere in *stato di magra* fino a che il pelo d'acqua non raggiunge metri 6 all'idrometro di Ripetta; in *stato ordinario* dai 6 metri fino a raggiungere l'altezza di metri 8; in *stato d'intumescenza* dagli 8 ai 12 metri; ed in istato di vera e minacciosa piena dai 12 metri in avanti, lo spoglio delle effemeridi che presento dimostra qualmente nell'anno 1891 il Tevere fu in *stato di magra* per 187 giorni, ossia per oltre $\frac{51}{100}$ dell'anno; si mantenne in stato ordinario per 161 giorni, ossia per circa $\frac{44}{100}$ dell'anno; fu intumescente durante per 17 giorni, ossia per circa $\frac{5}{100}$ dell'anno; e non raggiunse mai lo stato di vera e minacciosa piena.

Può quindi considerarsi l'anno 1891 siccome uno fra quelli in cui il Tevere convogliò la minima quantità d'acqua: come lo conferma il fatto di essere il pelo di magra disceso all'altezza di m. 5,36 che è una delle più basse che siensi verificate nel settuntennio; e di avere l'altezza media generale del pelo d'acqua durante l'intero anno, raggiunti soltanto i metri 6,196; che è una delle minime altezze medie verificatesi nel periodo predetto. Inferiore a detta misura furono soltanto le altezze medie degli anni 1834, 1883, 1825, 1832, 1828 e 1882 che furono rispettivamente di metri 5,694; 5,700; 5,899; 6,014; 6,130 e 6,176.

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all' idrometro di Orte al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1891.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,65	1,73	1,37	1,75	1,45	1,57	1,14	1,00	0,92	1,08	1,63	1,68
2	1,64	1,73	1,33	1,73	1,44	1,54	1,13	1,00	0,92	1,03	1,55	1,63
3	1,64	1,73	1,30	1,72	1,43	1,51	1,12	1.00	0,91	1,00	1,50	1,60
4	1,64	1,73	1,30	1,71	1,42	1,46	1,11	1,00	0,91	1,75	1,41	1,58
5	1,64	1,73	1,28	1,68	1,42	1,41	1,11	1,00	0,90	1,46	1,34	1,55
6	1,64	1,73	1,28	1,66	2,32	1,39	1,10	1,00	0,90	1,34	1,28	1,52
7	1,62	1,73	1,28	1,72	1,76	1,36	1,10	1,00	0,90	1,23	1,23	1,50
8	4,14	1,72	1,27	1,69	1,72	1,35	1,09	0,99	1,03	1,15	1,20	1,50
9	3,09	1,72	1,27	1,68	2,49	1,33	1,09	0,99	1,00	1,42	1,25	1,50
10	2,53	1,72	1,27	1,68	2,41	1,32	1,09	0,98	0,98	1,66	1,68	1,48
11	2,36	1,72	1,27	1,68	3,05	1,30	1,09	0,98	0,96	1,52	1,63	1,48
12	2,23	1,72	1,27	1,67	2,40	1,66	1,08	0,97	0,95	1,43	1,58	1,48
13	2,06	1,71	1,70	1,67	2,00	1,53	1,08	0,97	0,94	1,37	1,65	1,48
14	1,76	1,71	1,64	2,10	1,74	1,47	1,08	0,96	0,93	1,32	1,62	1,48
15	1,75	1,71	2,16	1,72	1,66	1,45	1,07	0,96	0,93	1,25	1,16	1,48
16	1,74	1,70	3,00	1,69	1,62	1,41	1,06	0,96	0,93	1,18	2,80	1,48
17	1,73	1,70	2,52	1,68	1,73	1,36	1,05	0,95	1,64	1,12	3,04	1,47
18	1,72	1,68	2,02	1,68	1,75	1,32	1,04	0,95	1,50	1,08	2,54	1,47
19	1,72	1,66	1,76	1,67	1,71	1,29	1,03	0,95	1,42	1,04	2,00	1,47
20	1,72	1,64	1,73	1,66	1,66	1,25	1,02	0,95	1,32	1,02	1,64	1,47
21	1,72	1,62	1,72	1,64	1,63	1,24	1,02	1,36	1,24	1,02	1,45	1,46
22	1,72	1,61	2,22	1,62	1,59	1,57	1,02	1,16	1,44	1,02	3,60	1,46
23	1,72	1,61	2,42	1,60	1,55	1,48	1,02	0,94	1,36	1,64	2,64	1,46
24	1,72	1,60	2,20	1,57	1,50	1,42	1,02	0,95	1,60	1,50	2,80	1,46
25	1,72	1,58	2,40	1,55	2,17	1,36	1,02	0,95	1,53	1,50	3,25	1,45
26	1,72	1,52	2,17	1,53	2,07	1,31	1,02	0,94	1,44	1,76	2,72	1,45
27	1,96	1,47	1,77	1,51	1,77	1,27	1,02	0,94	1,36	1,73	2,50	1,45
28	2,04	1,42	2,74	1,50	1,72	1,22	1,01	0,94	1,28	1,65	2,30	3,31
29	1,76		2,73	1,48	1,68	1,18	1,01	0,93	1,21	2,38	2,70	2,37
30	1,73		2,82	1,46	1,64	1,16	1,01	0,93	1,14	2,04	1,92	2,10
31	1,73		1,88		1,61		1,00	0,93		1,71		2,00
Sommata	59,56	46,65	57,09	49,70	56,11	41,49	32,85	30,53	39,05	43,40	59,61	50,27
Media	1,92	1,67	1,84	1,66	1,81	1,38	1,06	0,98	1,30	1,40	1,99	1,62
Massima	4,14	1,73	3,00	2,10	3,05	1,66	1,14	1,36	1,64	2,38	3,60	3,31
Minima	1,62	1,42	1,27	1,46	1,42	1,16	1,00	0,93	0,90	1,00	1,46	1,45
Differenza	2,52	0,31	1,73	0,64	1,63	0,50	0,14	0,43	0,74	1,38	2,44	1,86

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1891.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	6,02	6,99	5,97	7,07	6,41	6,20	5,79	5,50	5,40	5,42	5,82	6,68
2	6,02	6,88	5,92	6,68	6,39	6,24	5,76	5,50	5,40	5,42	5,61	6,46
3	5,97	6,74	5,90	6,37	6,30	6,15	5,74	5,50	5,40	5,45	5,56	6,29
4	5,95	6,60	5,95	6,25	6,24	6,08	5,70	5,49	5,40	5,60	5,56	6,17
5	5,97	6,53	5,95	6,21	6,23	6,04	5,67	5,49	5,40	5,99	5,57	6,07
6	5,97	6,45	5,96	6,55	6,89	6,00	5,64	5,49	5,40	5,74	5,54	5,99
7	6,01	6,40	5,97	6,60	7,08	5,96	5,64	5,48	5,39	5,55	5,54	5,93
8	10,39	6,29	5,95	6,67	6,84	5,93	5,61	5,47	5,38	5,51	5,54	5,90
9	11,65	6,27	5,95	6,54	7,02	5,91	5,60	5,46	5,38	5,49	5,55	5,87
10	10,00	6,24	6,01	6,58	7,78	5,90	5,59	5,42	5,44	5,80	5,54	5,85
11	9,20	6,20	6,00	6,50	8,39	6,02	5,59	5,41	5,45	6,20	5,66	5,85
12	8,28	6,18	6,00	6,47	7,92	6,08	5,61	5,42	5,45	5,59	5,62	5,85
13	7,89	6,16	6,09	6,67	7,32	6,35	5,65	5,41	5,45	5,70	5,62	5,80
14	7,38	6,13	6,29	6,93	6,98	6,41	5,65	5,40	5,43	5,70	5,75	5,78
15	7,17	6,10	6,20	7,11	6,85	6,12	5,60	5,40	5,46	5,65	5,79	5,76
16	7,00	6,08	8,68	6,82	6,73	6,01	5,59	5,39	5,44	5, 54	6,05	5,73
17	6,82	6,03	8,45	6,82	6,75	5,98	5,57	5,38	5,67	5,48	10,85	5,70
18	6,63	6,03	7,41	6,63	6,51	5,94	5,55	5,38	5,91	5,48	8,05	5,70
19	6,55	6,03	7,00	6,48	6,68	5,93	5,51	5,38	5,57	5,46	7,75	5,68
20	6,50	6,01	6,69	6,50	6,55	5,87	5,57	5,42	5,49	5,46	7,13	5,68
21	6,43	6,01	6,63	6,50	6,41	6,22	5,54	5,40	5,48	5,48	6,81	5,68
22	7,49	5,97	6,62	6,39	6,38	6,85	5,56	5,38	5,54	5,57	7,16	5,70
23	6,75	5,93	6,88	6,32	6,38	6,41	5,56	5, 67	5,84	5,70	8,18	5,66
24	6,50	5,92	7,15	6,29	6,53	6,18	5,59	5,55	5,80	5,88	6,70	5,64
25	6,29	5,94	7,20	6,30	6,68	6,09	5,53	5,54	5,75	5,69	8,58	5,56
26	6,39	5,92	7,35	6,38	7,09	6,00	5,51	5,48	5,72	5,59	8,00	5,58
27	6,58	5,95	7,02	6,45	6,57	5,95	5,51	5,45	5,51	5,92	8,46	5,69
28	6,85	5,97	6,85	6,36	6,43	5,93	5,59	5,43	5,45	6,19	7,06	8,80
29	6,90		6,78	6,33	6,41	5,85	5,52	5,40	5,38	6,18	8,81	8,90
30	6,95		6,85	6,37	6,33	5,80	5,51	5,40	5,36	6,60	7,48	7,27
31	6,07		7,40		6,25		5,50	5,40		6,24		6,72
Sommata	220,57	173,95	205,07	196,14	208,82	181,90	173,55	168,89	165,14	177,27	201,34	189,94
Media	7,12	6,21	6,62	6,54	6,74	6,06	5,60	5,45	5,50	5,72	6,71	6,13
Massima	11,65	6,99	8,68	7,11	8,39	6,41	5,79	5,67	5,91	6,60	10,85	8,90
Minima	5,95	5,92	5,90	6,21	6,23	5,80	5,50	5,38	5,36	5,42	5,54	5,56
Differenza	5,70	1,07	2,78	0,90	2,16	0,61	0,29	0,29	0,55	1,18	5,31	3,34

***Effemeride dell'Aniene, ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Aniene all'idrometro esistente all'imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli, al mezzodì di ciascun giorno dell'anno* 1891.**

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,40	1,30	1,20	1,50	1,40	1,30	1,15	1,20	1,15	1,30	1,30	1,40
2	1,40	1,30	1,20	1,45	1,35	1,25	1,15	1,20	1,15	1,30	1,30	1.40
3	1,35	1,30	1,20	1,40	1,35	1,25	1,10	1,20	1,15	1,30	1,30	1,35
4	1,35	1,30	1,20	1,40	1,35	1,25	1,10	1,20	1,15	1,35	1,30	1,35
5	1,35	1,30	1,20	1,50	1,35	1,25	1,10	1,20	1,15	1,30	1,30	1,35
6	1,35	1,30	1,20	1,45	1,35	1,20	1,10	1,20	1,15	1,30	1,25	1,35
7	1,50	1,30	1,20	1,45	1,40	1,20	1,10	1,15	1,15	1,30	1,25	1,35
8	2,90	1,25	1,20	1,40	1,40	1,20	1,05	1,15	1,15	1,30	1,25	1,35
9	1,80	1,25	1,20	1,40	1,50	1,20	1,05	1,15	1,15	1,30	1,30	1,40
10	1,25	1,25	1,20	1,40	1,45	1,20	1,05	1,15	1,15	1,30	1,30	1,35
11	1,15	1,20	1,20	1,50	1,40	1,20	1,05	1,15	1,15	1,30	1,30	1,35
12	1,05	1,20	1,20	1,45	1,35	1,40	1,10	1,15	1,15	1,30	1,30	1,30
13	1,00	1,20	1,20	1,45	1,35	1,30	1,25	1,15	1,15	1,30	1,30	1,30
14	0,95	1,20	1,25	1,40	1,35	1,25	1,25	1,15	1,15	1,30	1,30	1,30
15	0,95	1,20	1,30	1,40	1,35	1,25	1,25	1,15	1,15	1,30	1,30	1,35
16	1,00	1,20	1,60	1,40	1,35	1,20	1,25	1,15	1,15	1,30	1,30	1,35
17	1,00	1,20	1,40	1,50	1,40	1,20	1,25	1,15	1,10	1,30	1,45	1,35
18	1,00	1,20	1,35	1,40	1,40	1,20	1,25	1,15	1,05	1,30	1,35	1,35
19	1,00	1,20	1,30	1,40	1,35	1,20	1,20	1,15	1,05	1,30	1,35	1,35
20	1,00	1,20	1,30	1,35	1,30	1,20	1,20	1,15	1,05	1,30	1,30	1,30
21	1,20	1,20	1,30	1,30	1,30	1,30	1,20	1,15	1,05	1,30	1,30	1,30
22	1,30	1,20	1,35	1,30	1,30	1,30	1,20	1,15	1,30	1,30	1,40	1,30
23	1,25	1,20	1,45	1,30	1,30	1,30	1,20	1,15	1,30	1,30	1,35	1,30
24	1,20	1,20	1,55	1,30	1,30	1,25	1,25	1,15	1,30	1,30	1,35	1,30
25	1,20	1,20	1,45	1,30	1,30	1,20	1,20	1,15	1,30	1,30	1,35	1,30
26	1,20	1,20	1,40	1,30	1,30	1,20	1,20	1,15	1,30	1,40	1,40	1,30
27	1,40	1,20	1,35	1,35	1,30	1,20	1,20	1,15	1,30	1,30	1,35	1 30
28	1,30	1,20	1,35	1,30	1,30	1,15	1,20	1,15	1,30	1,35	1,40	1,80
29	1,30		1,80	1,45	1,25	1,15	1,20	1,15	1,30	1,45	1,40	1,65
30	1,30		1,60	1,40	1,25	1,15	1,20	1,15	1,30	1,35	1,40	1,50
31	1,30		1,55		1,25		1,20	1,15		1,30		1,45
Sommata	39,70	34,45	41,25	41,90	41,65	36,90	36,25	35,95	35,40	40,65	39,80	42,45
Media	1,28	1,23	1,38	1,40	1,34	1,23	1,17	1,16	1,18	1,31	1,33	1,37
Massima	2,90	1,30	1,80	1,50	1,50	1,40	1,25	1,20	1,30	1,45	1,45	1,80
Minima	0,95	1,20	1,20	1,30	1,25	1,15	1,05	1,15	1,05	1,30	1,30	1,30
Differenza	1,95	0,10	0,60	0,20	0,25	0,25	0,20	0,05	0,25	0,15	01,5	0,50

Anno 1891.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	59,56	1,92	4,14	1,62	2,52
Febbraio	46,65	1,67	1,73	1,42	0,31
Marzo	57,09	1,84	3,00	1,27	1.73
Aprile	49,70	1,66	2,10	1,46	0,64
Maggio	56,11	1,81	3,05	1,42	1,63
Giugno	41,49	1,38	1,66	1,16	0,50
Luglio	32,85	1 06	1,14	1,00	0,14
Agosto	30,53	0,98	1,36	0,93	0,43
Settembre	39,05	1,30	1,64	0,90	0,74
Ottobre	43.40	1,40	2,38	1,00	1,38
Novembre	59,61	1,99	3,60	1,16	2,44
Dicembre	50,27	1,62	3,31	1,45	1,86
	566,31				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{566,31}{365} = 1,5515$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 4,14 }
» minima » » 0,90 } differenza massima 3,24.

Anno 1891.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	220,57	7,12	11,65	5,95	5,70
Febbraio	173,95	6,21	6,99	5,92	1,07
Marzo	205,07	6,62	8,68	5,90	2,78
Aprile	196,14	6,54	7,11	6,21	0,90
Maggio	208,82	6,74	8,39	6,23	2,16
Giugno	181,90	6,06	6,41	5,80	0,61
Luglio	173,55	5,60	5,79	5,50	0,29
Agosto	168,89	5,45	5,67	5,38	0,29
Settembre	165,14	5,50	5,91	5,36	0,55
Ottobre	177,27	5,72	6,60	5,42	1,18
Novembre	201,34	6,71	10,85	5,54	5,31
Dicembre	189,94	6,13	8,90	6,56	3,34
	2262,58				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2262,58}{365} = 6,1988$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 11,65 }
» minima » » 5,36 } differenza massima 6,29.

Anno 1891.

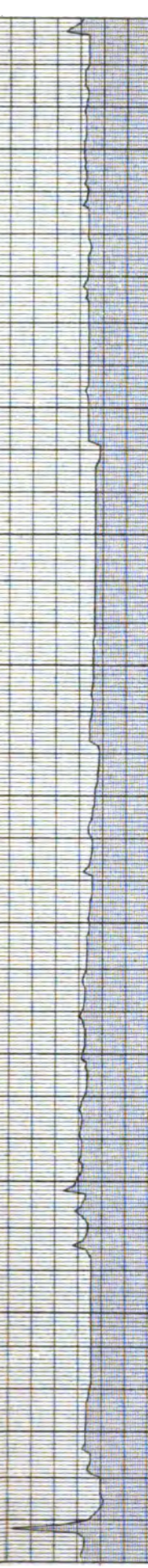
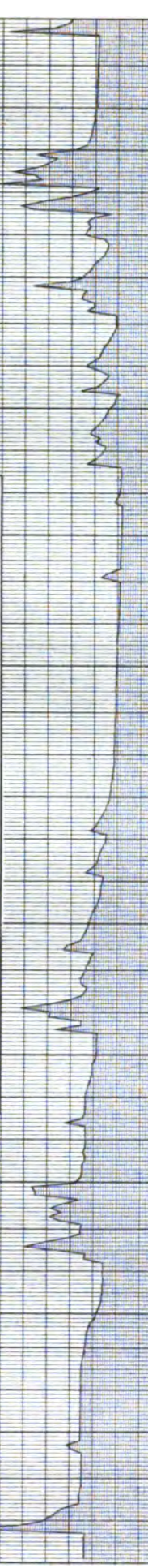
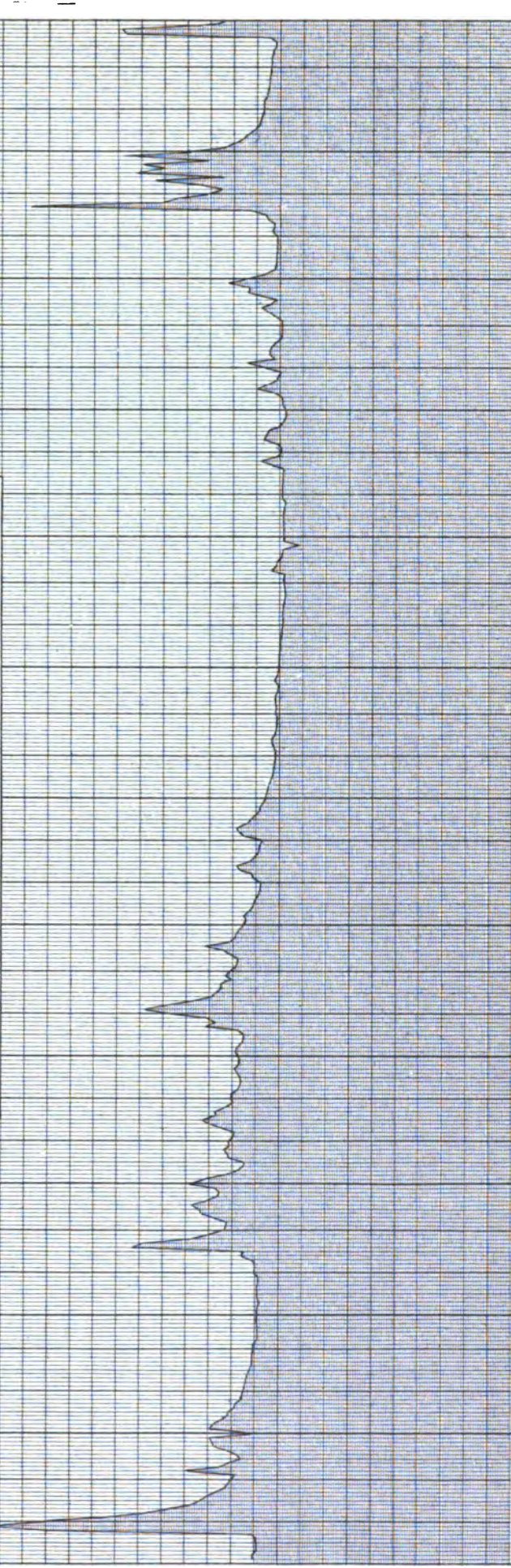
STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	39,70	1,28	2,90	0,95	1,95
Febbraio	34,45	1,23	1,30	1,20	0,10
Marzo	41,25	1,33	1,80	1,20	0,60
Aprile	41,90	1,40	1,50	1,30	0,20
Maggio	41,65	1,34	1,50	1,25	0,25
Giugno	36,90	1,23	1,40	1,15	0,25
Luglio	36,25	1,17	1,25	1,05	0,20
Agosto	35,95	1,16	1,20	1,15	0,05
Settembre	35,40	1,18	1,30	1,05	0,25
Ottobre	40,65	1,31	1,45	1,30	0,15
Novembre	39,80	1,33	1,45	1,30	0,15
Dicembre	42,45	1,37	1,80	1,30	0,50
	466,35				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{466,35}{365} = 1,2774$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 2,90 } differenza massima 1,95.
» minima » » 0,95 }

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Aniene all'imbocco dei Cunicoli a Tivoli
durante l'anno 1891
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del fiume Tevere all'idrometro di Orte
durante l'anno 1891
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del fiume Tevere all'idrometro di Ripetta
durante l'anno 1891
GENNAJO
FEBBRAJO
MARZO
APRILE
MAGGIO
GIUGNO
LUGLIO
AGOSTO
SETTEMBRE
OTTOBRE
NOVEMBRE
DICEMBRE
Lit. Martelli Roma

RELAZIONE

letta dal Socio G. SCHIAPARELLI relatore, a nome anche del Socio G. CELORIA, nella seduta del 7 gennaio 1894 sopra la Memoria presentata dai signori dottori A. DI LEGGE e F. GIACOMELLI, avente per titolo: *Catalogo delle ascensioni rette medie pel 1890 di 2438 stelle comprese fra l'equatore ed il parallelo 90° nord e di 45 stelle dell'emisfero australe osservate al Circolo Meridiano del R. Osservatorio del Campidoglio negli anni 1885-90.*

« All'Accademia sono ben noti i due Cataloghi di stelle, che il prof. Respighi di felice memoria presentò nel 1880 e nel 1885, e pubblicò nei nostri *Atti:* essi costituiscono il più importante lavoro di questo genere che sia stato fatto in Italia dai tempi di Santini fino al presente. Movendo dall' idea di preparare buoni elementi per la determinazione delle latitudini geografiche, il Respighi si applicò soltanto alle declinazioni delle stelle, differendo ad altro tempo la determinazione delle ascensioni rette. Di quest'ultima parte tuttavia egli non potè più occuparsi, rapito da morte immatura; e dovette lasciare la cura ai suoi collaboratori dott. Alfonso Di Legge e Francesco Giacomelli, i quali vi attesero con assidua cura per otto anni a partire dal 1885, ed oggi presentano all'Accademia il risultato delle loro fatiche.

« Il nuovo Catalogo contiene adunque le ascensioni rette di tutte o quasi tutte le stelle, delle quali il Respighi aveva pubblicate le declinazioni. In 795 notti di osservazione il Di Legge e il Giacomelli hanno determinato con 19620 osservazioni le ascensioni rette di 2483 stelle; sono in media otto osservazioni per ciascuna stella. Il modo di osservare, le cautele impiegate per assicurare le correzioni dell' istrumento e la necessaria precisione dei risultati, il sistema di calcolo usato per le riduzioni, sono spiegati chiaramente nell'*Introduzione* che precede il Catalogo.

« L'esame del tutto ha persuaso i Commissari, che questo lavoro è un degno complemento dei due Cataloghi Respighi, non solo per la natura del contenuto, ma anche per le cure impiegate e pel grado di esattezza raggiunto; e ci porge fondata speranza che al pari di quelli sarà apprezzato dagli Astronomi pratici. I Commissari credono ancora che una parola di speciale elogio sia dovuta ai suoi autori; i quali, in un'epoca in cui l'astronomia presenta nelle sue recenti estensioni tanti campi di facile gloria, hanno religiosamente consacrato il loro tempo ad adempire il testamento del loro Maestro, assoggettandosi con coraggio ad un còmpito ingrato e difficile, di cui l'importanza fondamentale non può essere degnamente apprezzata che da pochi specialisti.

« Pertanto non solo proponiamo, ma vivamente raccomandiamo all'Accademia di accogliere integralmente questo lavoro nei suoi *Atti* ».

Catalogo delle ascensioni rette medie pel 1890,0 di 2438 stelle comprese fra l'equatore ed il parallelo 80° nord e di 45 stelle dell'emisfero australe, osservato al Circolo Meridiano del R. Osservatorio del Campidoglio negli anni 1885-90.

Memoria di **ALFONSO DI LEGGE** e **FRANCESCO GIACOMELLI**.

Dalle osservazioni eseguite all'Osservatorio del Campidoglio su 2534 stelle dell'emisfero boreale negli anni dal 1875 al 1881 furono dedotti due Cataloghi di declinazioni medie di queste stelle pubblicati dal prof. Lorenzo Respighi negli Atti della R. Accademia dei Lincei negli anni 1880 e 1885 (1). Immediatamente dopo la pubblicazione del secondo dei suoi due pregievoli Cataloghi il prof. Respighi si propose di completarli con un Catalogo di ascensioni rette medie delle stesse stelle, ed a questo scopo furono da noi intraprese le osservazioni alle quali l'eminente astronomo non potè prender parte, impeditone dal fiero morbo, che dopo tre anni di lunghe sofferenze dovea trarlo al sepolcro. Terminate le osservazioni e compiuti i lunghi e laboriosi calcoli di riduzione, presentiamo ora il Catalogo dall'illustre estinto con tanto ardore promosso, dolenti di non averlo avuto guida e compagno nell'arduo lavoro.

Le osservazioni, incominciate il 28 ottobre 1885, ebbero termine il 19 agosto 1890. Su queste osservazioni è fondato il presente Catalogo, che contiene le ascensioni rette medie pel 1890.0 di 2483 stelle, delle quali 2438 sono comprese tra l'equatore ed il parallelo 80° nord, le poche rimanenti appartengono all'emisfero australe. E quantunque nell'indicato periodo sieno state fatte molte osservazioni di stelle dagli 80° ai 90° di declinazione, tuttavia il materiale raccolto non ci è parso sufficiente per una determinazione delle AR. di queste stelle meritevole di fiducia, se non pari, almeno non molto inferiore a quella delle altre. Al fine di dedurre le ascensioni rette di queste stelle più vicine al polo da un numero maggiore di osservazioni e determinare le ascensioni rette di alcune altre contenute nei due citati Cataloghi di Respighi che qui non figurano, perchè sfuggite o male indicate nella nota, preparata in principio, delle stelle da osservare, fu intrapresa sul finire del decembre 1892 una nuova serie di osservazioni meridiane. Condotta a termine ormai la detta serie di osservazioni

(1) *Catalogo delle declinazioni medie pel 1875.0 di 1463 stelle comprese fra i paralleli 20° e 64° nord.* Serie 3ª, Memoria della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. VIII. *Catalogo delle declinazioni medie pel 1880.0 di 1004 stelle comprese fra 0° e 20° nord, 64° e 90° nord.* Serie 4ª, Memoria della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. I.

ed eseguite in gran parte le riduzioni, speriamo di dare fra breve compimento al lavoro colla pubblicazione di un'appendice al presente Catalogo.

L'istrumento al quale furono osservati i passaggi delle stelle è lo stesso Circolo Meridiano di Ertel, del quale si fece uso per le osservazioni destinate alla determinazione delle declinazioni delle stelle dei due menzionati Cataloghi. Quest'istrumento, di cui il cannocchiale ha $0^m.094$ di apertura libera, ed $1^m.182$ di distanza focale, al pregio di un'ottima costruzione, unisce anche il vantaggio di potersi in esso operare il rovesciamento con molta facilità e prestezza, mediante un apparato fisso disposto al disotto della sua parte centrale, simile a quelli di cui sono d'ordinario provvisti gl'istrumenti portatili. Crediamo qui superfluo l'aggiungere altri dettagli sull'istrumento avendone data il professor Ignazio Calandrelli una chiara e minuta descrizione nella sua Memoria: *Descrizione scientifica del circolo meridiano collocato nel nuovo Osservatorio della romana Università.* Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1855.

I tempi dei passaggi delle stelle furono presi col metodo della registrazione cronografica ad un cronometro Frodsham n. 3546 della Commissione italiana del grado dal 28 ottobre 1885 al 13 novembre 1889, nel qual tempo compiuta dal sig. C. Kobell, orologiaio del nostro osservatorio, la riduzione a pendolo cronografico di un antico pendolo Fiorelli ad asta di legno, fu sostituito quest'ultimo al cronometro.

Il cronometro Frodsham prima, il pendolo Fiorelli poi, erano uniti ad un ottimo cronografo a striscie di Cavignato sistema Fuess (1) con registrazione a secco, il quale a preferenza di altri cronografi ha il vantaggio di non richiedere una speciale sorveglianza durante le osservazioni e di rendere più spedita la lettura delle striscie o carte cronografiche.

Le sere di osservazione utilizzate in tutto od in parte furono 795 e 19620 i passaggi osservati delle 2483 stelle, così che il numero medio di osservazioni su di una stella risulterebbe uguale a 7,9 cioè 8 in cifra rotonda. Dobbiamo però notare che le osservazioni sono ben lungi dall'essere regolarmente distribuite, alcune stelle sono state osservate un gran numero di volte, perchè destinate come fondamentali alla determinazione del tempo; altre, o per averle scambiate con stelle vicine o per inavvertenza dell'uno o dell'altro osservatore, si sono osservate due volte od una volta sola; ma quest'ultime sono in assai piccolo numero in confronto del numero totale delle stelle del Catalogo.

Due micrometri a 17 fili orarî fissi ed uno mobile sono stati alternativamente adoperati nelle osservazioni. I due micrometri non differiscono tra loro essenzialmente che nell'avere l'uno di essi, che chiameremo I, due fili orizzontali fissi e l'altro, che chiameremo II, due fili orizzontali fissi ed uno mobile. Dei tre oculari di cui sono provveduti i due micrometri, i quali portano gl'ingrandimenti 60, 120 e 180, fu adoperato costantemente l'oculare con l'ingrandimento 120.

S'incominciarono le osservazioni col micrometro I, ma a cagione della rottura di uno dei fili orarî fu il 9 gennaio 1886 sostituito ad esso il micrometro II. Il 10 giugno 1887 fu avvertito un sensibile cambiamento nelle distanze dei fili del

(1) *Di una modificazione al cronografo di Fuess eseguita dal meccanico G. Cavignato,* comunicazione di G. Lorenzoni all'Istituto Veneto. Atti, vol. VII, serie 5ª, Venezia 1881.

micrometro II. Quantunque le osservazioni della sera del 9 giugno e delle sere precedenti ci abbiano fornito la prova sicura che siffatto cambiamento era avvenuto bruscamente dalla sera del 9 alla sera del 10 del detto mese, tuttavia nè allora, nè dopo, abbiamo potuto con qualche fondamento stabilirne la causa. La sera del 10 novembre si spezzò il filo orizzontale mobile rimanendo in parte impigliato nei fili orizzontali fissi ed in parte nei fili orarî. L'osservatore tentò ed ottenne di liberare i fili orarî dai frammenti del filo mobile, ma conseguenza di quest'operazione fu un nuovo cambiamento, meno rilevante del primo, nelle distanze dei fili del micrometro II. Una verifica delle distanze dei fili, eseguita mediante le osservazioni delle sere precedenti, valse poi ad escludere il dubbio che fossero avvenute variazioni anche piccole nelle distanze dei fili prima della rottura del filo mobile. Il 22 gennaio 1888, essendosi spezzato il filo di mezzo del micrometro II, si pose nuovamente in opera il micrometro I mancante di un filo, finchè non furono sostituiti all'altro micrometro fili di miglior qualità e più resistenti. Del micrometro II coi fili cambiati si fece poi uso dal 20 marzo 1888 sino al termine delle osservazioni.

Le circostanze dianzi accennate ci obbligarono a fare cinque determinazioni delle distanze dei fili orarî dal filo di mezzo, non avendo giudicato necessaria una nuova determinazione di queste distanze pel micrometro I nel periodo di tempo compreso tra il 22 gennaio al 20 marzo 1888, poichè fu accertato, colla riduzione dei passaggi delle stelle osservate al filo di mezzo, che le dette distanze erano rimaste invariate o per lo meno avevano esse provato delle variazioni insignificanti.

Nel seguente quadro sono riportate le distanze dei fili al filo di mezzo nei due micrometri, dedotte da numerosi passaggi di stelle equatoriali, adottate per le riduzioni nei periodi 28 ottobre 1885 al 5 gennaio 1886; 9 gennaio 1886 al 9 giugno 1887; 10 giugno 1887 al 10 novembre 1887; 11 novembre 1887 al 21 gennaio 1888; 23 gennaio 1888 al 19 marzo 1888; 20 marzo 1888 al 18 agosto 1890.

MICROMETRO I.

(28 ottobre 1885 — 5 gennaio 1886).

I	53.214	XVII	53.294
II	40.289	XVI	39.780
III	35.375	XV	35.436
IV	31.130	XIV	31.068
V	22.221	XIII	29.745
VI	17.481	XII	17.740
VII	13.368	XI	13.551
VIII	4.434	X	4.347

MICROMETRO II.

(9 gennaio 1886 — 9 giugno 1887).

I	58.866	XVII	58.127
II	43.693	XVI	43.299
III	39.085	XV	38.584
IV	34.649	XIV	34.072
V	24.079	XIII	23.548
VI	19.406	XII	19.052
VII	14.803	XI	14.810
VIII	4.650	X	4.497

MICROMETRO II.

(10 giugno 1887 — 10 novembre 1887).

I	58.852	XVII	58.228
II	43.555	XVI	43.714
III	38.503	XV	37.989
IV	34.509	XIV	34.265
V	24.110	XIII	23.835
VI	19.159	XII	19.117
VII	14.216	XI	14.777
VIII	4.725	X	5.112

MICROMETRO II.

(11 novembre 1887 — 21 gennaio 1888).

I	58.891	XVII	58.250
II	43.550	XVI	43.667
III	38.860	XV	37.975
IV	34.502	XIV	34.329
V	23.945	XIII	23.948
VI	19.178	XII	19.187
VII	14.299	XI	14.816
VIII	4.837	X	5.043

MICROMETRO I.

(23 gennaio 1888 — 19 marzo 1888).

I	53.214	XVII	53.294
II	40.289	XVI	39.780
III	35.375	XV	35.436
IV	31.130	XIV	31.068
V	22.221	XIII	29.745
VI	17.481	XII	17.740
VII	13.368	XI	13.551
VIII	4.434	X	4.347

MICROMETRO II.

(20 marzo 1888 — 18 agosto 1890).

I	58.243	XVII	58.133
II	43.378	XVI	43.431
III	38.985	XV	38.783
IV	34.242	XIV	34.160
V	23.952	XIII	24.028
VI	19.571	XII	19.467
VII	14.752	XI	14.770
VIII	4.585	X	4.469

L'inclinazione dell'asse di rotazione dell'istrumento fu costantemente determinata mediante un ottimo livello di Ertel con montatura a cavalletto. Il valore trovato da Respighi nel 1879 per una parte del livello espresso in secondi di tempo è $0^s.1169$ [1].

I perni dell'asse di rotazione del Circolo Meridiano, di cui la superficie non differisce sensibilmente dalla forma cilindrica, non hanno i diametri rigorosamente uguali. Il diametro del perno posto da quella parte, alla quale è applicato l'obbiettivo del collimatore all'asse di rotazione, è un po' più grande del diametro dell'altro perno, di modo che all'inclinazione $0^s,00$ data dal livello corrisponde all'asse di rotazione un'inclinazione di cui il valore assegnato da Respighi è $0^s,032$ [2].

Convenendo quindi di chiamare posizione *diretta* la posizione dell'istrumento, allorchè è ad est il circolo graduato che è dalla parte dell'obbiettivo del collimatore all'asse; posizione *inversa* la posizione dell'istrumento quando lo stesso circolo è ad

[1] *Operazioni eseguite nell'anno 1879 per determinare la differenza di longitudine fra gli osservatorii astronomici del Campidoglio di Roma e di Brera in Milano.* Resoconto dei professori Lorenzo Respighi e Giovanni Celoria. Pubblicazione del R. Osservatorio di Brera in Milano. n. XXI, p. 7.

[2] *Operazioni eseguite nell'anno 1879* ecc., Memoria citata.

ovest, la correzione da applicare alle inclinazioni dedotte dalle letture del livello in causa della ineguaglianza dei diametri dei perni sarà negativa quando l'istrumento è nella posizione diretta, positiva quando l'istrumento è nella posizione inversa. Vennero da noi adottati in principio per le riduzioni i precedenti valori, nè si vide la necessità di cambiarli dopo averne fatto una nuova determinazione, poichè i risultati ottenuti per il valore di una parte del livello ($0^s.1163$) e per la correzione dovuta all'ineguaglianza dei perni ($0^s.0295$) pochissimo diversificavano da quelli dedotti da Respighi.

La collimazione si è sempre determinata per mezzo dei passaggi di stelle vicine al polo osservate nelle due posizioni dell'istrumento.

L'azimut si è dedotto dalla combinazione del passaggio di una delle stelle vicine al polo, del *Berliner Astronomisches Jahrbuch* e delle 5140 BAC; 8213 BAC (delle quali due le posizioni apparenti sono date dalla *Connaissances des Temps*) con i passaggi di stelle orarie tratte dalla citata effemeride di Berlino; ovvero dalla combinazione del passaggio superiore di una delle dette stelle vicino al polo col passaggio inferiore di un'altra.

Riguardo alle correzioni istrumentali si convenne, che ciascuno dei due osservatori ne determinasse i valori indipendentemente dall'altro, per ridurre con essi le proprie osservazioni. Soltanto per la collimazione fu adottato un valore comune, non risultando da ripetute prove differenze sensibili nei valori ottenuti per la collimazione in una stessa sera dai due osservatori.

Prima di cominciare le osservazioni verso l'ora del tramonto si operava d'ordinario un'approssimata rettifica dell'istrumento, allorchè l'errore di orizzontalità dell'asse di rotazione, e la deviazione azimutale dell'istrumento, osservata per mezzo di una mira situata al nord alla distanza di circa 1363 metri, risultavano un po' forti. Per siffatte rettifiche, divenendo piccoli e talvolta trascurabili gli errori istrumentali, le riduzioni dei passaggi riuscivano più agevoli ed i risultati delle osservazioni più sicuri. Non si è mai rettificato l'asse ottico dell'istrumento salvo che nei giorni, in cui è avvenuta la sostituzione di un micrometro ad un altro, poichè l'errore di collimazione si è mantenuto sempre entro limiti molto ristretti.

Nei primi due anni, durante i quali si osservavano stelle comprese per la maggior parte tra l'equatore ed il parallelo che passa pel nostro zenit non venne determinata la collimazione tutte le sere, ma avuto riguardo alle differenze generalmente piccole tra due valori consecutivi di questa costante istrumentale, si è potuto adottare per la collimazione uno stesso valore in più sere di seguito, senza tema di commettere un errore sensibile nelle correzioni da applicare alle singole stelle. Negli anni seguenti si è determinata la collimazione con più frequenza, e nel 1889 e 1890, nei quali anni le osservazioni si facevano principalmente su stelle comprese tra i 70° e 90° di declinazione, ne fu determinato ogni sera il valore.

Ciascuno dei due osservatori ha in ogni sera eseguita una livellazione al principio ed un'altra al fine delle osservazioni e quasi sempre qualche livellazione intermedia. I risultati ottenuti da queste ripetute livellazioni hanno dimostrato, che il valore dell'inclinazione presenta in generale variazioni molto piccole nel corso di una sera, talchè per la riduzione dei passaggi osservati si è adottata in ciascuna sera da ciascuno

degli osservatori un'inclinazione costante uguale alla media delle singole inclinazioni dedotte dalle varie letture del livello in quella sera. In alcune poche sere soltanto le variazioni indicate dal livello nell'errore di orizzontalità dell'asse di rotazione dell'istrumento non sono state così piccole da poterne trascurare il loro effetto nel calcolo delle correzioni. In questi casi, se le dette variazioni accennavano un andamento regolare, si è tenuto conto di tale andamento; se per contrario non davano di esso alcun indizio si sono adottati due valori distinti dell'inclinazione per due intervalli di tempo, durante i quali poteva ritenersi l'inclinazione dell'asse sensibilmente costante.

Parimente in ogni sera ciascun osservatore ha determinato un valore per l'azimut, fatta eccezione da quelle sere, nelle quali uno stesso astronomo osservando per più ore di seguito ha creduto opportuno di determinarlo due volte. Nel caso di una doppia determinazione di azimut, da parte di uno stesso osservatore, quando risultavano differenze di qualche entità tra i due valori si sono impiegate nelle riduzioni dei passaggi due correzioni, o si è adottata una correzione variabile, attribuendo agli azimut nell'intervallo di tempo compreso tra le due determinazioni variazioni proporzionali al tempo, se poi i due valori non presentavano notevoli differenze, si è preso per l'azimut un valore costante uguale al medio dei due.

Degli errori istrumentali l'azimut è quello che nel nostro istrumento dà le variazioni più forti e meno regolari. Le più grandi variazioni sono per lo più avvenute nei giorni di rapidi cambiamenti nella temperatura dell'atmosfera, specie se questi repentini cambiamenti erano accompagnati da venti del nord più o meno forti, all'influenza dei quali rimaneva esposto l'istrumento più che a quella di venti di altre direzioni, per cagione delle osservazioni dei passaggi inferiori delle stelle vicine al polo, che obbligavano a tenere aperta la fenestra della sala meridiana rivolta a settentrione.

A rendere del resto meno temibile, l'effetto di una qualche incertezza nei valori delle costanti istrumentali sui risultati delle nostre osservazioni, prima di cominciare il lavoro fu stabilito di dividere questo in due parti. La prima parte doveva abbracciare le osservazioni delle stelle comprese tra l'equatore ed il parallelo che passa pel nostro zenit; la seconda parte le osservazioni delle rimanenti stelle. Si era inoltre convenuto di circoscrivere, in ogni sera, la zona di osservazione a limiti meno estesi di quelli ora indicati e far concorrere alla determinazione del tempo principalmente i passaggi delle stelle fondamentali comprese nella zona di osservazione. Quantunque siasi avuto riguardo ad attenersi, per quanto era possibile, al programma prestabilito, pure si è dovuto più volte rinunciare alla rigorosa osservanza di quello, per non protrarre troppo oltre il periodo delle osservazioni.

Le stelle fondamentali osservate per la determinazione del tempo sono tratte esclusivamente dal Berl. Astr. Jahrbuch. Applicate al tempo del passaggio di ciascuna stella fondamentale le correzioni per l'aberrazione diurna, per la collimazione, per l'inclinazione e per l'azimut colle formole di Mayer

$$\mp k \cos\varphi \sec\delta \;,\; c \sec\delta \;,\; i \cos(\varphi-\delta)\sec\delta \;,\; a \operatorname{sen}(\varphi-\delta)\sec\delta$$

ove per la costante k di aberrazione diurna si è assunto il valore $0^s,021$ del Berl. Astr. Jahr. e per la latitudine φ dell'osservatorio del Campidoglio il valore $41°53'34''$, si è

ottenuto per ciascuna stella il tempo T del passaggio corretto dell'aberrazione e degli errori istrumentali. Sottraendo poscia dall'AR apparente di ogni stella, presa dal Berl. Astr. Jahr. il tempo T ad essa corrispondente, si aveva una correzione dell'orologio all'istante del passaggio della stella. Avendo così in una sera tanti valori della correzione dell'orologio quant'erano le fondamentali osservate, distribuite sempre con sufficiente uniformità tra il principio e la fine di una stessa sera, si è presa la media dei valori AR — T e si è assunta questa media come correzione dell'orologio all'ora media dei passaggi osservati.

Per determinare la variazione oraria dell'orologio si sono divisi i valori AR — T di una sera in due gruppi e per ognuno di essi si è determinata la correzione media dell'orologio all'ora media dei passaggi delle stelle componenti il gruppo. Da queste due correzioni e dalla differenza delle ore corrispondenti si è dedotta la variazione oraria dell'orologio.

Allorchè le osservazioni di stelle fondamentali fatte da uno stesso astronomo erano poche in numero o comprese in un intervallo di tempo troppo breve per formarne due gruppi distinti, la variazione oraria si è desunta dalle correzioni medie dell'orologio corrispondenti a due giorni consecutivi. Si è anche impiegato il metodo dei minimi quadrati per la determinazione della variazione oraria, ma solamente in quei casi, nei quali non si erano determinate le correzioni dell'orologio in due giorni consecutivi e, per la ragione di sopra addotta, non ci è sembrato applicabile il primo metodo.

Quando in una stessa sera hanno osservato ambedue gli osservatori, ciascuno di essi ha determinato la correzione dell'orologio indipendentemente dall'altro e si è poi servito di questa correzione per ridurre le proprie osservazioni, adottando una variazione oraria uguale alla media delle due dedotte dalle osservazioni proprie e da quelle dell'altro osservatore, le quali non presentavano in generale che differenze assai piccole o trascurabili.

L'andamento non molto regolare del cronometro Frodsham e del pendolo Fiorelli (adoperato il secondo solamente negli ultimi mesi di osservazione) poteva far temere una qualche incertezza nella variazione oraria adottata malgrado la somma cura posta nel determinarla. Ma l'uso, che si è fatto di detta variazione per la riduzione della correzione dell'orologio all'ora del passaggio delle singole stelle non estendendosi oltre le due ore al di qua e al di là dell'ora media delle osservazioni, rimuove qualsiasi dubbio sull'esattezza dei risultati.

Basterà a dare un'idea dell'entità degli errori istrumentali e dell'andamento dell'orologio il quadro seguente che contiene i valori adottati della collimazione, dell'inclinazione, dell'azimut, la variazione oraria e la correzione del cronometro Frodsham, l'ora media, alla quale si riferisce la detta correzione per tutte le sere di osservazione dell'anno 1888 (anno di mezzo del periodo delle nostre osservazioni) e da ultimo i nomi degli osservatori Di Legge e Giacomelli indicati colle iniziali D e G.

Data 1888	Costanti delle correzioni istrumentali			Cronometro			Osservatori
	Collimazione	Inclinazione	Azimut	Variazione oraria	Correzione	Ora corrispond.	
	s	s	s	s	m s	h m	
8 Gennaio	+ 0,161	+ 0,283	+ 0,184	+ 0,052	+ 1 7,70	6 20	G
9 »	+ 0,114	+ 0,122	. . . . .	+ 0,052	+ 1 8,73	2 7	D
10 »	+ 0,067	+ 0,189	— 0,052	+ 0,042	+ 1 9,75	2 40	D
» »	»	»	— 0,046	»	+ 1 10,23	5 38	G
11 »	+ 0,067	+ 0,160	— 0,053	+ 0,057	+ 1 11,16	2 47	D
» »	»	»	— 0,002	»	+ 1 11,56	5 43	G
12 »	+ 0,097	+ 0,204	+ 0,195	+ 0,057	+ 1 12,52	2 41	D
» »	»	+ 0,161	+ 0,336	»	+ 1 12,93	5 50	G
13 »	+ 0,127	— 0,049	— 0,260	+ 0,045	+ 1 14,00	5 40	G
14 »	+ 0,153	+ 0,120	+ 0,094	+ 0,097	+ 1 15,87	2 44	D
» »	»	+ 0,095	»	»	+ 1 16,33	5 39	G
15 »	+ 0,138	— 0,121	+ 0,009	+ 0,133	+ 1 19,07	2 40	D
17 »	+ 0,100	+ 0,051	— 0,047	+ 0,141	+ 1 25,90	2 55	D
» »	»	+ 0,099	— 0,076	»	+ 1 26,62	5 46	G
18 »	+ 0,072	+ 0,120	+ 0,133	+ 0,145	+ 1 29,37	2 52	D
» »	»	+ 0,143	+ 0,151	»	+ 1 29,96	5 55	G
19 »	+ 0,120	+ 0,105	+ 0,091	+ 0,136	+ 1 32,68	2 53	D
» »	»	+ 0,091	+ 0,128	»	+ 1 33,45	6 22	G
20 »	+ 0,169	— 0,058	+ 0,189	+ 0,142	+ 1 36,04	2 56	D
» »	»	— 0,048	+ 0,178	»	+ 1 36,71	6 33	G
21 »	+ 0,133	— 0,054	+ 0,162	+ 0,127	+ 1 39,08	2 50	D
» »	»	+ 0,024	+ 0,081	»	+ 1 39,72	6 27	G
23 »	0,000	+ 0,081	— 0,245	+ 0,132	+ 1 44,96	3 2	D (1)
» »	+ 0,024	+ 0,140	— 0,327	»	+ 1 45,49	6 30	G
24 »	+ 0,010	+ 0,086	— 0,333	+ 0,074	+ 1 46,79	3 11	D
» »	»	+ 0,154	— 0,374	»	+ 1 47,27	6 23	G
25 »	— 0,005	+ 0,147	— 0,264	+ 0,063	+ 1 48,28	3 34	D
» »	»	+ 0,247	— 0,261	»	+ 1 48,58	7 2	G
31 »	+ 0,020	+ 0,065	— 0,130	+ 0.158	+ 2 0,00	3 37	D
1 Febbraio	+ 0,027	+ 0,036	— 0,302	+ 0,158	+ 2 4,35	7 12	G
4 »	+ 0,040	+ 0,137	— 0,259	+ 0,096	+ 2 12,72	3 55	D
5 »	+ 0,054	+ 0,094	— 0,284	+ 0,079	+ 2 15,11	4 51	D
6 »	+ 0,050	+ 0,169	— 0,358	+ 0,062	+ 2 16,57	4 15	D
» »	»	+ 0,205	— 0,529	»	+ 2 16,97	7 37	G
7 »	+ 0,048	+ 0,197	— 0,068	+ 0,068	+ 2 18,22	4 20	D
» »	»	+ 0,156	— 0,174	»	+ 2 18.77	7 48	G
8 »	+ 0,049	+ 0,068	— 0,145	+ 0,081	+ 2 20,18	4 36	D
» »	»	+ 0,078	— 0,276	»	+ 2 20,57	7 40	G
10 »	+ 0,050	+ 0,030	— 0,001	+ 0,093	+ 2 24,78	4 23	D

(1) Cambiato il micrometro.

Data 1888	Costanti della correzioni istrumentali			Cronometro			Osservatori
	Collimazione	Inclinazione	Azimut	Variazione oraria	Correzione	Ora corrispond.	
	s	s	s	s	m s	h m	
10 Febbraio	+ 0,050	+ 0.021	— 0,132	+ 0,093	+ 2 25,33	7 45	G
14 »	+ 0,079	— 0,015	— 0,155	+ 0,160	+ 2 32,46	4 52	D
» »	»	+ 0,020	— 0,239	»	+ 2 33,00	7 59	G
2 Marzo	— 0,012	+ 0,024	— 0,037	+ 0,083	+ 3 2,58	6 30	D
» »	»	+ 0,119	— 0,116	»	+ 3 2,90	9 27	G
3 »	— 0,012	+ 0,004	+ 0,155	+ 0,083	+ 3 4,55	5 25	D
4 »	+ 0,009	+ 0,124	+ 0,246	+ 0,085	+ 3 6,66	6 14	D
» »	»	+ 0,092	+ 0,069	»	+ 3 7,00	9 20	G
5 »	+ 0,030	— 0,033	— 0,325	+ 0,188	+ 3 10,48	9 28	G
7 »	— 0,015	+ 0,048	— 0,453	+ 0,114	+ 3 15,95	9 22	G
8 »	— 0,016	— 0,014	— 0,526	+ 0,111	+ 3 18,68	9 51	G
9 »	+ 0,002	+ 0,123	— 0,133	+ 0.101	+ 3 20,51	6 19	D
» »	»	+ 0,139	— 0,267	»	+ 3 21,08	9 30	G
12 »	+ 0,059	+ 0,040	— 0,164	+ 0,051	+ 3 24,92	10 2	G
13 »	+ 0,053	— 0,043	— 0,056	+ 0,051	+ 3 25,70	7 6	D
» »	»	— 0,055	— 0,152	»	+ 3 26,14	9 54	G
19 »	+ 0,025	+ 0,084	+ 0,040	. . . . .	+ 3 31,72	9 40	G
24 »	+ 0,009	+ 0,208	+ 0,160	+ 0,046	+ 3 38,63	10 36	G (1)
» »	»	+ 0,185	+ 0,059	»	+ 3 38,45	12 30	D
25 »	+ 0,020	+ 0,183	+ 0,053	+ 0,046	+ 3 39,54	8 10	D
» »	»	+ 0,234	— 0,053	»	+ 3 39,74	10 28	G
31 »	+ 0,062	— 0,142	— 0,008	+ 0,035	+ 3 39,55	8 39	D
2 Aprile	+ 0,035	+ 0,028	— 0,192	+ 0,085	+ 3 40,49	11 12	G
5 »	+ 0,013	+ 0.113	+ 0,314	— 0,006	+ 3 39,71	9 34	D
» »	»	+ 0,091	+ 0,168	»	+ 3 39,99	11 39	G
7 »	— 0,007	+ 0,106	— 0,061	+ 0,004	+ 3 39,94	9 40	D
» »	»	+ 0,084	— 0,093	»	+ 3 40,25	12 6	G
8 »	— 0,008	+ 0,108	— 0,011	+ 0,007	+ 3 40.10	10 3	D
» »	»	»	— 0,051	»	+ 3 40,32	11 10	G
12 »	+ 0,007	+ 0,013	+ 0,122	+ 0,050	+ 3 42,84	10 8	D
13 »	— 0,005	+ 0,011	+ 0,300	+ 0,050	+ 3 44,04	10 8	D
» »	»	— 0,098	+ 0,265	»	+ 3 44,32	11 54	G
14 »	— 0,013	+ 0,201	+ 0,057	+ 0,061	+ 3 45,50	10 9	D
» »	»	+ 0,231	+ 0,060	»	+ 3 45,82	11 54	G
16 »	+ 0,070	+ 0,290	— 0,056	+ 0,018	+ 3 46,33	10 17	D
17 »	+ 0,040	+ 0,200	— 0,100	0,000	+ 3 46,19	10 4	D
» »	»	+ 0,349	— 0,142	»	+ 3 46,30	11 36	G
18 »	+ 0,030	— 0,021	+ 0,217	— 0,028	+ 3 45,61	10 13	D
» »	»	— 0,030	0,000	»	+ 3 45,64	12 16	G

(1) Cambiato il micrometro.

Data 1888	Costanti delle correzioni istrumentali			Cronometro			Osservatori
	Collimazione	Inclinazione	Azimut	Variazione oraria	Correzione	Ora Corrispond.	
	s	s	s	s	m s	h m	
21 Aprile	+ 0,070	— 0,146	+ 0,062	+ 0,010	+ 3 44,23	11 6	D
» »	»	— 0,132	+ 0,049	»	+ 3 44,43	12 22	G
22 »	+ 0,083	+ 0,163	+ 0,216	+ 0,010	+ 3 44,47	11 4	D
24 »	+ 0,083	+ 0,339	— 0,029	— 0,008	+ 3 44,03	13 5	G
25 »	+ 0,012	+ 0,089	+ 0,201	— 0,050	+ 3 42,88	10 32	D
28 »	— 0,055	+ 0,109	+ 0,177	— 0,021	+ 3 41,09	11 1	D
» »	»	+ 0,097	+ 0,027	»	+ 3 41,13	13 6	G
29 »	+ 0,033	+ 0,120	+ 0,034	— 0,021	+ 3 40,58	11 17	D
» »	»	+ 0,086	— 0,119	»	+ 3 40,65	12 44	G
5 Maggio	+ 0,021	+ 0,139	+ 0,225	+ 0,002	+ 3 36,76	13 26	G
6 »	+ 0,020	+ 0,133	+ 0,533	+ 0,002	+ 3 36,63	11 42	D
» »	»	+ 0,113	»	»	+ 3 36,82	13 33	G
7 »	+ 0,007	+ 0,117	+ 0,629	— 0,018	+ 3 36,38	14 12	G
8 »	+ 0,001	— 0,159	— 0,100	— 0.030	+ 3 35,66	13 41	D
9 »	— 0,018	— 0,077	— 0,176	— 0,024	+ 3 35,07	14 11	D
10 »	— 0,038	+ 0,040	— 0,321	— 0,041	+ 3 34,10	13 47	D
11 »	— 0,027	— 0,103	— 0,107	— 0,066	+ 3 32,49	14 10	D
14 »	— 0,022	+ 0,069	+ 0,168	— 0,039	+ 3 28,68	14 14	D
15 »	— 0,021	+ 0,004	— 0,067	— 0,039	+ 3 27,73	14 48	D
19 »	— 0,021	+ 0,235	+ 0,085	— 0,074	+ 3 21,28	14 42	G
21 »	+ 0,016	+ 0,027	+ 0,052	— 0,074	+ 3 17,71	14 48	G
23 »	+ 0,007	— 0,013	— 0,105	— 0,066	+ 3 14,51	15 18	G
25 »	— 0,011	+ 0,038	— 0,086	— 0,066	+ 3 12,42	14 16	D
2 Giugno	+ 0,004	+ 0,096	— 0,334	— 0,077	+ 3 1,84	14 22	D
5 »	+ 0,001	+ 0,039	— 0,044	— 0,084	+ 2 55,73	14 38	D
6 »	+ 0,016	+ 0,075	— 0,114	— 0,084	+ 2 53,73	14 21	D
7 »	+ 0.021	+ 0,041	— 0,007	— 0,090	+ 2 51,92	14 22	D
10 »	— 0,002	— 0,109	+ 0,203	— 0,064	+ 2 47,28	14 56	D
13 »	+ 0,015	— 0,103	— 0,006	— 0,048	+ 2 43,75	15 11	D
6 Luglio	+ 0,016	+ 0,138	+ 0,223	— 0,051	+ 2 16,46	16 49	D
7 »	+ 0,014	— 0,190	+ 0,222	— 0,051	+ 2 15,25	16 20	D
14 »	+ 0,017	+ 0,037	+ 0,231	— 0,047	+ 2 6,62	17 1	D
21 »	+ 0,010	+ 0,003	+ 0,485	— 0,041	+ 1 57,66	17 51	D
22 »	+ 0,041	— 0,017	+ 0,612	— 0,041	+ 1 56,70	17 11	D
23 »	+ 0,022	+ 0,029	+ 0,547	— 0,055	+ 1 55,36	17 41	D
24 »	+ 0,040	+ 0,090	+ 0,039	— 0,046	+ 1 54,27	17 8	D
25 »	+ 0,068	+ 0,055	+ 0,184	— 0,043	+ 1 53,20	17 48	D
27 »	+ 0,033	+ 0,091	+ 0,047	— 0,060	+ 1 50,33	17 21	D
28 »	— 0,011	— 0,132	+ 0,153	— 0,074	+ 1 48,56	17 23	D

Data 1888		Costanti delle correzioni istrumentali			Cronometro			Osservatori
		Collimazione	Inclinazione	Azimut	Variazione oraria	Correzione	Ora corrispond.	
		s	s	s	s	s m s	h m	
6	Agosto	+ 0,028	— 0,268	+ 0,333	— 0,050	+ 1 36,04	18 4	D
7	»	+ 0,007	— 0,089	+ 0,268	— 0,050	+ 1 34,77	17 28	D
9	»	+ 0,016	— 0,234	+ 0,620	— 0,058	+ 1 32,52	19 33	D
10	»	+ 0,002	+ 0,182	+ 1,013	— 0,058	+ 1 31,15	18 12	D
11	»	+ 0,039	+ 0,088	+ 0,936	— 0,063	+ 1 29,53	19 20	D
13	»	+ 0,003	— 0,086	+ 0,190	— 0,062	+ 1 26,71	19 7	D
14	»	+ 0,016	— 0,133	+ 0,218	— 0,062	+ 1 25,24	18 28	D
23	»	+ 0,018	+ 0,057	+ 0,271	— 0,071	+ 1 11,28	19 32	D
24	»	0,000	+ 0,035	+ 0,340	— 0,071	+ 1 9,69	18 18	D
28	»	+ 0,014	+ 0,062	— 0,321	— 0,053	+ 1 3,39	19 32	D
29	»	0,000	+ 0,088	— 0,416	— 0,053	+ 1 2,02	21 33	D
30	»	— 0,007	+ 0,115	+ 0,027	— 0,053	+ 1 0,74	21 34	D
1	Settembre	— 0,023	+ 0,156	— 0,020	— 0,077	+ 0 58,05	21 28	D
3	»	+ 0,055	— 0,048	+ 0,131	— 0,060	+ 0 55,24	21 8	D
5	»	+ 0,047	— 0,091	+ 0,087	— 0.049	+ 0 52,90	21 1	D
6	»	+ 0,015	+ 0,018	+ 0,077	— 0,057	+ 0 51,48	21 53	D
7	»	+ 0,013	— 0,060	+ 0,175	— 0,071	+ 0 49,76	21 58	D
10	»	0,000	+ 0,041	— 0,030	— 0,064	+ 0 45,14	22 19	D
12	»	+ 0,038	+ 0,041	+ 0,025	— 0,068	+ 0 41,86	22 0	D
14	»	— 0,033	— 0,008	+ 0,361	— 0,072	+ 0 38,39	22 26	D
15	»	— 0,027	— 0.005	— 0,190	— 0,072	+ 0 36,39	21 58	D
20	»	+ 0,046	+ 0.105	— 0,141	— 0,043	+ 0 28,95	22 9	D
21	»	+ 0,034	— 0,028	— 0,212	— 0,043	+ 0 27,90	22 39	D
23	»	— 0,007	— 0,006	— 0,373	— 0,060	+ 0 25,05	22 20	D
26	»	+ 0,048	+ 0,025	— 0,142	— 0,068	+ 0 20,86	22 35	D
27	»	+ 0,027	+ 0,030	— 0,037	— 0,068	+ 0 19,23	22 36	D
28	»	+ 0,015	— 0,044	+ 0,037	— 0,051	+ 0 17,99	22 56	D
29	»	+ 0,040	— 0,296	+ 0,020	— 0,029	+ 0 17,29	22 54	G
1	Ottobre	+ 0,051	+ 0,049	— 0,193	— 0,060	+ 0 14,98	23 25	G
2	»	+ 0,047	— 0,035	— 0,030	— 0,060	+ 0 13,58	22 22	D
6	»	+ 0,062	+ 0,102	+ 0,096	— 0,045	+ 0 6,73	22 17	D
10	»	— 0,047	+ 0,020	+ 0,157	— 0,024	+ 0 3,19	23 48	D
12	»	+ 0,063	— 0,089	. . . . .	— 0,036	+ 0 2,94	22 42	D
13	»	+ 0,069	+ 0,204	+ 0,164	— 0,036	+ 0 2,02	23 54	D
16	»	+ 0,066	+ 0,193	— 0,042	+ 0,015	+ 0 2,73	23 40	D
17	»	+ 0,039	+ 0,104	+ 0,287	+ 0,015	+ 0 3,09	23 33	D
19	»	+ 0,053	+ 0,161	— 0,403	+ 0,057	+ 0 3,33	23 26	D
20	»	+ 0,067	+ 0,196	+ 0,030	+ 0,057	+ 0 4,71	23 25	D
»	»	»	+ 0,264	»	»	+ 0 5,04	0 45	G

Data 1888	Costanti delle correzioni istrumentali			Cronometro			Osservatori
	Collimazione	Inclinazione	Azimut	Variazione oraria	Correzione	Ore corrispond.	
	s	s	s	s	m s	h m	
21 Ottobre	+ 0,065	+ 0,086	— 0,231	+ 0,083	+ 0 7,00	0 15	G
22 »	+ 0,061	+ 0,040	— 0,290	+ 0,071	+ 0 8,69	0 15	G
23 »	+ 0,060	+ 0,125	— 0,250	+ 0,056	+ 0 10,05	0 27	G
24 »	+ 0,060	+ 0,098	— 0,525	+ 0,032	+ 0 10,83	0 27	G
25 »	+ 0,054	+ 0,055	— 0,079	+ 0,035	+ 0 11,65	0 4	D
26 »	+ 0,040	+ 0,143	— 0,092	+ 0,026	+ 0 12,26	23 34	D
27 »	+ 0,025	— 0,050	— 0,199	+ 0,031	+ 0 13,01	23 55	D
29 »	+ 0,033	+ 0,030	— 0,301	+ 0,030	+ 0 14,43	23 45	D
30 »	+ 0,045	+ 0,038	— 0,370	+ 0,037	+ 0 15,17	23 58	D
31 »	+ 0,066	+ 0,116	— 0,297	+ 0,004	+ 0 15,25	22 58	D
5 Novembre	+ 0,065	— 0,035	— 0,180	0,000	+ 0 15,56	22 46	D
8 »	+ 0,052	— 0,030	— 0,447	0,000	+ 0 16,69	0 4	D
15 »	+ 0,050	+ 0,091	+ 0,024	+ 0,042	+ 0 27,82	23 36	D
16 »	+ 0,024	+ 0,133	— 0,005	+ 0,042	+ 0 28,86	0 15	D
19 »	+ 0,034	+ 0,062	— 0,519	+ 0,042	+ 0 31,35	23 3	D
20 »	+ 0,046	+ 0,182	+ 0,086	+ 0,042	+ 0 32,40	23 40	D
21 »	+ 0,060	+ 0,172	— 0,170	+ 0,061	+ 0 33,99	1 31	G
22 »	+ 0,061	+ 0,149	+ 0,157	+ 0.062	+ 0 35,36	23 26	D
23 »	+ 0,064	+ 0,075	+ 0,030	+ 0,104	+ 0 37,88	23 38	D
24 »	+ 0,060	+ 0,040	— 0,254	+ 0,094	+ 0 40,19	0 10	D
29 »	+ 0,067	+ 0,108	+ 0,024	+ 0,043	+ 0 51,18	23 42	D
1 Decembre	+ 0,050	— 0,103	+ 0,097	+ 0,048	+ 0 53,28	0 55	D
3 »	+ 0,042	+ 0,074	+ 0,121	+ 0,041	+ 0 55,61	0 17	D
4 »	+ 0,063	+ 0,025	+ 0,331	+ 0,074	+ 0 57,42	0 33	D
5 »	+ 0,060	+ 0,067	— 0,377	+ 0,098	+ 0 59,81	1 6	D
8 »	+ 0,055	+ 0,017	— 0,274	+ 0,050	+ 1 8,00	1 33	D
11 »	+ 0,087	+ 0,041	— 0,648	+ 0,144	+ 1 18,86	1 55	D
12 »	+ 0,060	+ 0,111	— 0,504	+ 0,144	+ 1 22,34	2 5	D
13 »	+ 0,008	+ 0,060	— 0,107	+ 0,160	+ 1 26,19	1 58	D
14 »	— 0,014	+ 0,008	— 0,133	+ 0,187	+ 1 30,72	2 11	D
17 »	+ 0,059	+ 0,092	— 0,287	+ 0,145	+ 1 43,13	2 15	D
18 »	+ 0,056	+ 0,066	— 0,448	+ 0,145	+ 1 46,60	2 12	D
29 »	+ 0,039	+ 0,065	— 0,212	+ 0,120	+ 2 10,35	2.18	D

Le ascensioni rette apparenti dedotte dai passaggi osservati sono state ridotte ad ascensioni rette medie colla formola di Bessel

$$AR_m = AR_{app} - f - g \text{ sen } (G + \alpha) \text{ tang } \delta - h \text{ sen } (H + \alpha) \sec \delta$$

e colle costanti del Berl. Astr. Jahr., tenendo conto dei termini a corto periodo per le stelle più boreali.

Il catalogo è riferito all'epoca 1890,0 abbastanza vicina all'epoca media delle osservazioni fatte sopra ogni stella. La precessione annua e la variazione secolare, inserite nelle colonne settima ed ottava del catalogo, colle quali abbiamo riportato le nostre osservazioni all'equinozio medio del 1890,0 sono state calcolate per mezzo delle note formole

$$m + \frac{1}{15} n \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \delta$$

$$\frac{100}{15}\left\{(m' + n' \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} \alpha) + \frac{1}{206264.8}\left(\frac{n^2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + mn \cos\alpha \operatorname{tg} \delta + n^2 \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{tg}^2\delta\right)\right\}$$

colle costanti di Struve.

Il calcolo delle precedenti formole si è fatto coll'aiuto delle molto utili e comode tavole per le riduzioni stellari del prof. F. Folie ([1]).

Al fine di rilevare l'influenza che la declinazione di una stella può avere esercitato sulla maggiore o minor precisione delle osservazioni, abbiamo distribuito le stelle in gruppi o zone di 5 in 5 gradi di declinazione e determinati i medii errori probabili delle osservazioni per ciascuna zona. Questi medii errori probabili, dedotti dalle osservazioni, sulle quali riposa il valore da noi ottenuto per l'ascensione retta di ciascuna stella, sono contenute nel seguente quadro insieme al numero delle stelle ed al numero medio di osservazioni delle stelle di ciascuna zona.

ZONE	Numero delle stelle osservate	Numero medio delle osservaz. per ogni stella	Errore probabile di un'osservaz. isolata	Errore probabile del medio
da —5° a 0°	24	10,2	± 0,071 s	± 0,022 s
» 0 » 5	162	7,8	0,059	0,021
» 5 » 10	161	8,1	0,056	0,020
» 10 » 15	172	7,4	0,054	0,020
» 15 » 20	183	7,4	0,054	0,020
» 20 » 25	197	6,6	0,054	0,021
» 25 » 30	168	6,6	0,056	0,022
» 30 » 35	132	6,5	0,057	0,023
» 35 » 40	182	7,5	0,062	0,023
» 40 » 45	203	7,4	0,067	0,025
» 45 » 50	185	7,6	0,073	0,026
» 50 » 55	154	8,4	0,074	0,026
» 55 » 60	187	9,2	0,074	0,025
» 60 » 65	131	9,1	0,089	0,030
» 65 » 70	93	9,3	0,095	0,031
» 70 » 75	70	8,7	0,098	0,033
» 75 » 80	60	10,3	0,125	0,039

([1]) Douze tables pour le calcul des réductions stellaires, Bruxelles 1883.

Da questo quadro, ove rimangono escluse le poche stelle osservate al disotto dei 5° di declinazione australe, apparisce che a partire dai 40° di declinazione fino all'equatore l'errore probabile di un'osservazione e l'errore probabile del medio restano sensibilmente costanti, essendo i loro valori medii rispettivamente uguali a $\pm 0^s,057$ ed a $\pm 0^s,021$.

Dai 40° di declinazione al polo i detti errori vanno continuamente crescendo, ma l'incremento è assai meno rapido di quello che indicherebbe la proporzionalità alla secante della declinazione. Riguardo poi all'anomalia che si scorge nell'errore probabile della prima zona, essa è molto probabilmente dovuta al numero assai limitato di stelle contenute in questa zona e conseguentemente degli elementi dond'è tratto l'errore probabile corrispondente.

Per riconoscere quale fiducia meritano le nostre osservazioni, ci è sembrato opportuno di paragonare le ascensioni rette del Berl. Astr. Jahr. e le ascensioni rette del nostro catalogo per le 492 stelle comuni all'uno ed all'altro. La seguente tavola contiene le differenze C-B (Campidoglio — Berl. Astr. Jahr.) che derivano da tale confronto.

Confronto

del Catalogo del Campidoglio con 492 stelle fondamentali del Berl. Astr. Jahrb.

TAVOLA I.

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′		s
α Andromedae	0 3	28 29	25	+ 0,014
β Cassiopejae.	0 3	58 33	14	+ 0,044
22 Andromedae	0 5	45 28	9	+ 0,076
γ Pegasi	0 8	14 34	14	+ 0,011
Br. 6	0 10	76 20	16	— 0,279
12 Ceti	0 24	— 4 34	21	— 0,019
κ Cassiopejae.	0 27	62 19	15	+ 0,038
ζ Cassiopejae.	0 31	53 17	14	+ 0,037
π Andromedae	0 31	33 7	21	— 0,038
ε Andromedae	0 33	28 43	6	— 0,010
δ Andromedae	0 33	30 16	30	+ 0,047
α Cassiopejae.	0 34	55 56	6	+ 0,029
21 Cassiopejae.	0 38	74 23	5	+ 0,056
ο Cassiopejae.	0 39	47 41	29	— 0,007
ζ Andromedae	0 42	23 40	5	+ 0,046
δ Piscium	0 43	6 59	16	— 0,008
γ Cassiopejae.	0 50	60 7	7	— 0,054
μ Andromedae	0 51	37 54	6	+ 0,038
ε Piscium	0 57	7 18	19	+ 0,022
β Andromedae	1 4	35 2	3	+ 0,107
τ Piscium	1 6	29 30	8	+ 0,019
υ Piscium	1 13	26 41	36	— 0,009
ψ Cassiopejae.	1 18	67 33	9	— 0,010
δ Cassiopejae.	1 19	59 40	25	+ 0,022
η Piscium	1 26	14 47	26	+ 0,018
40 Cassiopejae.	1 30	72 29	15	— 0,086
υ Persei	1 31	48 4	17	— 0,036
43 Cassiopejae.	1 34	67 29	3	+ 0,063
ν Piscium	1 36	4 56	8	— 0,025
φ Persei	1 37	50 8	31	— 0,001
ο Piscium	1 40	8 36	35	+ 0,018
ε Cassiopejae.	1 46	63 8	30	+ 0,006
α Trianguli	1 47	29 3	5	+ 0,022
γ Arietis	1 47	18 45	7	— 0,014
ξ Piscium	1 48	2 39	3	+ 0,033
β Arietis	1 49	20 16	5	+ 0,032
50 Cassiopejae.	1 54	71 53	3	— 0,023
γ Andromedae	1 57	41 48	16	— 0,002
α Arietis	2 1	22 57	12	+ 0,021
β Trianguli	2 3	34 28	6	+ 0,018
55 Cassiopejae.	2 6	66 0	15	— 0,045
6 Persei	2 6	50 33	12	— 0,087
γ Trianguli	2 11	33 20	10	+ 0,020
ϑ Arietis	2 12	19 24	12	— 0,012
ο Ceti	2 14	— 3 29	13	+ 0,025
ι Cassiopejae.	2 20	66 54	34	+ 0,039
ξ² Ceti	2 22	7 58	16	— 0,022
36 H.Cassiopej.	2 28	72 20	10	+ 0,061
ν Arietis	2 33	21 29	33	+ 0,010
δ Ceti	2 34	— 0 9	2	— 0,005
Br. 366	2 35	67 21	3	— 0,003
ϑ Persei	2 37	48 46	29	+ 0,021
γ Ceti	2 38	2 46	3	+ 0,013
μ Ceti	2 39	9 39	29	— 0,013
η Persei	2 43	55 26	25	+ 0,039
41 Arietis	2 44	26 48	5	+ 0,048
τ Persei	2 46	52 19	17	— 0,021
47 H. Cephei	2 51	78 59	15	+ 0,037
α Ceti	2 57	3 39	17	— 0,024
γ Persei	2 57	53 5	9	— 0,016
ρ Persei	2 58	38 25	12	— 0,031
β Persei	3 1	40 32	27	— 0,031
ι Persei	3 1	49 12	3	+ 0,010
δ Arietis	3 5	19 19	16	+ 0,012
48 H. Cephei	3 6	77 20	4	— 0,050
α Persei	3 16	49 28	22	+ 0,008
ο Tauri	3 19	8 38	24	+ 0,025
2 H. Camelop.	3 20	59 33	8	+ 0,040
ξ Tauri	3 21	9 21	22	— 0,005
σ Persei	3 23	47 37	3	+ 0,040
f Tauri	3 25	12 34	17	+ 0,016
Gr. 716	3 33	62 52	21	0,000

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B	NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′				h m	° ′		
δ Persei . . .	3 35	47 26	14	+ 0,007	ζ Tauri	5 31	21 4	17	+ 0,024
ο Persei	3 37	31 56	11	— 0,037	ο Aurigae. . .	5 37	49 47	26	— 0,036
ν Persei. . . .	3 38	42 14	9	+ 0,027	130 Tauri. . . .	5 41	17 41	15	+ 0,006
17 Tauri. . . .	3 38	23 46	8	+ 0,032	ν Aurigae . .	5 44	39 7	4	— 0,007
5 H.Camelop.	3 39	71 0	11	— 0,035	α Orionis. . .	5 49	7 23	30	+ 0,022
η Tauri. . . .	3 41	23 46	13	— 0,018	δ Aurigae . .	5 50	54 17	3	— 0,023
27 Tauri . . .	3 43	23 43	8	+ 0,021	β Aurigae. . .	5 51	44 56	4	+ 0,045
ζ Persei. . . .	3 47	31 33	26	— 0,005	ϑ Aurigae. . .	5 52	37 12	10	— 0,016
9 H. Camelop.	3 48	60 47	14	+ 0,007	66 Orionis. . .	5 59	4 10	9	+ 0,004
ε Persei . . .	3 50	39 41	13	+ 0,012	ν Orionis. . .	6 1	14 47	30	+ 0,007
ξ Persei. . . .	3 52	35 28	12	— 0,022	36 Camelop. .	6 2	65 44	15	— 0,061
λ Tauri. . . .	3 55	12 11	19	+ 0,044	22 H.Camelop.	6 7	69 21	6	— 0,005
ν Tauri. . . .	3 57	5 41	5	— 0,012	η Geminorum	6 8	22 32	9	+ 0,021
γ Tauri. . . .	4 14	15 22	13	+ 0,017	2 Lyncis . . .	6 10	59 3	5	+ 0,062
δ Tauri. . . .	4 17	17 17	27	— 0,010	μ Geminorum	6 16	22 34	13	— 0,015
ε Tauri. . . .	4 22	18 56	15	+ 0,003	ψ^1 Aurigae . .	6 16	49 21	24	+ 0,005
1 Camelop. sq.	4 23	53 40	26	+ 0,006	8 Monocerotis	6 18	4 39	25	+ 0,002
α Tauri. . . .	4 30	16 17	34	+ 0,016	10 Monocerotis	6 23	— 4 42	5	+ 0,040
ν Eridani. . .	4 31	— 3 35	2	+ 0,040	23 H.Camelop.	6 27	79 41	11	+ 0,007
Gr. 848 . .	4 34	75 44	10	— 0,061	8 Lyncis . . .	6 28	61 35	8	+ 0,038
τ Tauri. . . .	4 36	22 45	24	— 0,031	γ Geminorum	6 31	16 30	8	+ 0,024
4 Camelop. .	4 39	56 34	26	— 0,029	S Monocerotis	6 35	10 0	22	+ 0,005
9 Camelop. .	4 43	66 9	18	+ 0,036	ε Geminorum	6 37	25 14	3	— 0,067
π^4 Orionis . .	4 45	5 25	12	— 0,005	ψ^6 Aurigae . .	6 39	43 41	13	— 0,047
π^5 Orionis . .	4 49	2 16	13	+ 0,025	ξ Geminorum	6 39	13 1	9	+ 0,010
10 Camelop. .	4 54	60 17	11	+ 0,015	43 Camelop. .	6 42	69 1	9	+ 0,026
ε Aurigae. . .	4 54	43 40	2	— 0,030	ϑ Geminorum	6 46	34 6	2	— 0,055
ζ Aurigae. . .	4 55	40 55	7	— 0,017	15 Lyncis . . .	6 48	58 34	23	+ 0,019
ι Tauri. . . .	4 57	21 26	25	— 0,020	ζ Geminorum	6 58	20 44	14	— 0,040
η Aurigae. . .	4 59	41 5	5	— 0,010	63 Aurigae . .	7 4	39 30	20	— 0,033
19 Camelop. .	5 4	79 6	6	— 0,035	64 Aurigae . .	7 10	41 5	25	— 0,026
μ Aurigae . .	5 6	38 21	3	— 0,097	λ Geminorum	7 12	16 44	14	— 0,005
α Aurigae. . .	5 9	45 53	15	— 0,035	δ Geminorum	7 14	22 11	8	— 0,010
γ Orionis. . .	5 19	6 15	21	— 0,009	19 Lyncis seq.	7 14	55 29	36	— 0,032
β Tauri. . . .	5 19	28 31	2	+ 0,060	ς Geminorum	7 19	28 1	8	— 0,011
17 Camelop. .	5 20	62 58	20	+ 0,031	Gr. 1308 .	7 19	68 41	17	+ 0,042
Gr. 966 . .	5 25	74 58	17	+ 0,038	β Canis min.	7 21	8 31	12	+ 0,002
δ Orionis. . .	5 26	— 0 23	3	+ 0,080	α Geminorum	7 28	32 8	3	— 0,017
φ^1 Orionis. . .	5 29	9 25	14	— 0,018	25 Monocerotis	7 32	— 3 52	2	+ 0,070
ε Orionis. . .	5 31	— 1 16	4	— 0,007	α Canis min. .	7 34	5 30	16	+ 0,057

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B	NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′		s		h m	° ′		s
24 Lyncis . . .	7 34	58 58	21	+ 0,062	ε Leonis . . .	9 40	24 17	19	+ 0,024
κ Geminorum	7 38	24 40	14	+ 0,019	υ Ursae maj.	9 43	59 33	37	+ 0,033
β' Geminorum	7 39	28 17	9	+ 0,028	μ Leonis . . .	9 47	26 31	8	— 0,010
π Geminorum	7 40	33 41	6	+ 0,012	Gr. 1586. .	9 49	73 24	23	— 0,010
26 Lyncis . . .	7 47	47 51	17	— 0,025	19 Leonis min.	9 51	41 35	11	— 0,024
Gr. 1374. .	7 47	74 13	8	— 0,006	π Leonis . . .	9 54	8 34	27	+ 0,013
53 Camelop. .	7 52	60 37	20	+ 0,071	η Leonis . . .	10 1	17 18	18	+ 0,057
χ Geminorum	7 57	28 6	13	— 0,011	α Leonis . . .	10 3	12 30	14	— 0,026
27 Lyncis . . .	8 0	51 49	24	— 0,020	λ Ursae maj.	10 10	43 28	17	— 0,026
Br. 1147. .	8 6	76 5	9	+ 0,016	ζ Leonis . . .	10 11	23 58	8	— 0,030
β Cancri . . .	8 11	9 31	20	+ 0,027	30 H.Ursae maj.	10 16	66 7	4	+ 0,083
31 Lyncis . . .	8 15	43 32	25	— 0,004	31 Leonis min.	10 22	37 16	7	+ 0,012
Br. 1197. .	8 20	— 3 33	2	— 0,120	36 Ursae maj.	10 24	56 33	11	+ 0,003
ο Ursae maj.	8 21	61 5	19	+ 0,040	ρ Leonis. . . .	10 27	9 52	11	+ 0,045
Gr. 1450. .	8 26	38 24	9	— 0,048	37 Ursae maj.	10 28	57 39	24	— 0,011
η Cancri . . .	8 26	20 49	2	+ 0,045	35 H.Ursae maj.	10 35	69 39	9	+ 0,043
Gr. 1446. .	8 27	74 1	5	— 0,032	33 Sextantis. .	10 36	— 1 10	4	— 0,085
Gr. 1460. .	8 31	53 6	17	— 0,062	41 Leonis min.	10 37	23 46	9	— 0,053
δ Cancri . . .	8 38	18 33	8	— 0,031	42 Leonis min.	10 40	31 16	22	— 0,063
ι Cancri. . . .	8 40	29 10	9	— 0,047	l Leonis . . .	10 43	11 8	21	— 0,013
ε Hydrae . . .	8 41	6 49	10	— 0,034	46 Leonis min.	10 47	34 48	8	— 0,051
σ² Cancri m. .	8 48	31 0	7	— 0,010	Br. 1508. .	10 51	78 22	9	+ 0,011
ζ Hydrae. . .	8 50	6 22	6	+ 0,027	β Ursae maj.	10 55	56 58	20	+ 0,036
ι Ursae maj.	8 52	48 28	12	— 0,040	α Ursae maj.	10 57	62 21	8	— 0,070
ρ Ursae maj.	8 53	68 3	8	+ 0,010	χ Leonis . . .	10 59	7 56	26	— 0,030
10 Ursae maj.	8 53	42 13	8	— 0,016	ψ Ursae maj.	11 3	45 6	24	+ 0,024
Gr. 1501 . .	8 56	54 43	12	+ 0,062	δ Leonis. . . .	11 8	21 8	6	+ 0,027
κ Ursae maj.	8 56	47 35	2	— 0,035	θ Leonis. . .	11 8	16 2	7	+ 0,033
σ² Ursae maj.	9 1	67 35	16	+ 0,016	Gr. 1757. .	11 10	50 5	24	— 0,003
36 Lyncis . . .	9 7	43 40	15	+ 0,027	ν Ursae maj.	11 13	33 42	8	+ 0,020
θ Hydrae. . .	9 9	2 47	31	— 0,005	σ Leonis . . .	11 15	6 38	11	+ 0,008
38 Lyncis . . .	9 12	37 16	13	+ 0,024	Gr. 1771. .	11 16	64 56	17	— 0,102
83 Cancri . . .	9 13	18 10	14	+ 0,010	ι Leonis . . .	11 18	11 8	9	— 0,022
40 Lyncis . . .	9 14	34 51	15	— 0,036	58 Ursae maj.	11 25	43 47	8	— 0,066
h Ursae maj.	9 23	63 33	4	+ 0,057	λ Draconis. .	11 25	69 56	7	+ 0,090
d Ursae maj.	9 25	70 19	5	+ 0,030	υ Leonis . . .	11 31	— 0 13	16	— 0,016
θ Ursae maj.	9 25	52 11	3	+ 0,013	3 Draconis. .	11 36	67 21	16	+ 0,143
10 Leonis min.	9 27	36 53	8	— 0,001	χ Ursae maj.	11 40	48 23	19	— 0,018
Gr. 1564. .	9 33	69 44	8	+ 0,077	β Leonis . . .	11 43	15 11	8	+ 0,050
o Leonis . . .	9 35	10 24	19	— 0,001	β Virginis. . .	11 45	2 23	13	— 0,006

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B	NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′		s		h m	° ′		s
γ Ursae maj.	11 48	54 18	35	— 0,028	α Bootis. . . .	14 11	19 45	6	— 0,011
ο Virginis. . .	12 0	9 21	34	+ 0,025	λ Bootis. . . .	14 12	46 36	5	— 0,006
Gr. 1852. .	12 0	77 31	9	+ 0,146	ι Bootis. . . .	14 12	51 52	2	— 0,040
4 H.Draconis.	12 7	78 14	7	+ 0,009	ϑ Bootis . . .	14 21	52 22	45	— 0,024
δ Ursae maj.	12 10	57 39	13	— 0,011	φ Virginis . .	14 23	— 1 44	19	— 0,015
2 Canis ven. .	12 11	41 16	6	+ 0,005	ϱ Bootis. . . .	14 27	30 51	8	+ 0,017
η Virginis. . .	12 14	— 0 3	12	— 0,013	γ Bootis. . . .	14 28	38 47	13	— 0,004
6 Canis ven. .	12 20	39 38	20	+ 0,005	Gr. 2125 . .	14 29	60 43	11	— 0,030
20 Comae . . .	12 24	21 30	13	+ 0,006	33 Bootis . . .	14 35	44 53	22	— 0,043
74 Ursae maj.	12 25	59 1	4	+ 0,037	π Bootis pr. .	14 36	16 53	10	— 0,015
8 Canis ven. .	12 29	41 57	7	— 0,001	μ Virginis . .	14 37	— 5 11	8	— 0,012
κ Draconis . .	12 29	70 24	13	+ 0,038	109 Virginis . .	14 41	2 21	25	— 0,002
24 Comae seq.	12 30	18 59	17	+ 0,028	Gr. 2164 . .	14 49	59 44	44	— 0,002
γ Virginis m.	12 36	— 0 51	22	+ 0,012	P. XIV, 221	14 51	14 53	11	+ 0,068
76 Ursae maj.	12 37	63 19	32	— 0,050	β Ursae min.	14 51	74 36	5	+ 0,164
ε Ursae maj.	12 49	56 33	5	— 0,042	γ Scorpii . . .	14 58	—24 51	3	+ 0,037
δ Virginis. . .	12 50	4 0	14	+ 0,006	β Bootis. . . .	14 58	40 49	4	+ 0,055
12 Canis ven. sq	12 51	38 55	3	— 0,013	ψ Bootis . . .	15 0	27 23	14	— 0,029
8 Draconis . .	12 51	66 2	4	+ 0,035	3 Serpentis. .	15 10	5 21	4	+ 0,052
ε Virginis. . .	12 57	11 33	11	+ 0,020	δ Bootis . . .	15 11	33 44	6	+ 0,062
ϑ Virginis . .	13 4	— 4 57	13	— 0,003	1 H. Urs. min.	15 13	67 46	24	— 0,013
17 Canis ven. .	13 5	39 5	13	+ 0,047	τ¹ Serpentis. .	15 21	15 49	14	— 0,023
43 Comae . . .	13 7	28 26	13	— 0,045	γ Ursae min.	15 21	72 14	7	+ 0,093
20 Canis ven. .	13 13	41 9	33	— 0,036	ι Draconis . .	15 22	59 21	8	+ 0,020
α Virginis . .	13 19	—10 35	2	— 0,015	β Coronae b. .	15 23	29 29	11	— 0,024
ζ Ursae maj. pr.	13 19	55 30	32	+ 0,002	ν¹ Bootis . . .	15 27	41 12	23	+ 0,008
Gr. 2001. .	13 23	72 58	4	— 0,077	ν² Bootis . . .	15 28	41 16	13	— 0,052
69 H. Urs. maj.	13 24	60 31	22	+ 0,042	ϑ Coronae b.	15 28	31 44	6	— 0,028
ζ Virginis. . .	13 29	— 0 2	25	+ 0,004	α Coronae b.	15 30	27 5	3	+ 0,020
17 H. Can. ven.	13 30	37 45	6	— 0,033	φ Bootis . . .	15 34	40 43	3	+ 0,080
Gr. 2029. .	13 35	71 48	11	— 0,006	ζ Coron. b. sq.	15 35	37 0	3	0,000
τ Bootis. . . .	13 42	18 0	15	+ 0,030	γ Coronae b.	15 38	26 39	4	+ 0,005
η Ursae maj.	13 43	49 52	12	— 0,021	α Serpentis. .	15 39	6 46	16	+ 0,032
ι Draconis . .	13 48	65 16	14	+ 0,054	β Serpentis .	15 41	15 46	13	— 0,012
η Bootis . . .	13 49	18 57	17	+ 0,029	κ Serpentis. .	15 44	18 29	3	— 0,010
τ Virginiis . .	13 56	2 5	22	+ 0,013	μ Serpentis. .	15 44	— 3 6	4	— 0,033
11 Bootis . . .	13 56	27 55	7	— 0,039	12 H. Draconis	15 45	62 56	16	+ 0,070
α Draconis. .	14 1	64 54	34	+ 0,025	ε Serpentis. .	15 45	4 49	13	+ 0,026
d Bootis . . .	14 5	25 37	14	— 0,019	ζ Ursae min.	15 48	78 8	14	— 0,037
4 Ursae min.	14 9	78 4	28	— 0,046	γ Serpentis. .	15 51	16 1	4	— 0,010

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′		s
ε Coronae b.	15 53	27 12	4	— 0,030
Gr. 2296. .	15 55	55 4	3	+ 0,003
β Scorpii . . .	15 59	—19 30	9	+ 0,027
ϑ Draconis . .	16 0	58 52	8	+ 0,086
φ Herculis . .	16 5	45 13	15	— 0,057
δ Ophiuchi. .	16 9	— 3 25	9	+ 0,041
ε Ophiuchi. .	16 13	— 4 25	16	+ 0,026
19 Ursae min.	16 14	76 9	17	— 0,136
τ Herculis. .	16 16	46 35	11	+ 0,038
γ Herculis . .	16 17	19 25	12	+ 0,002
ω Herculis . .	16 20	14 17	12	— 0,053
η Ursae min.	16 21	76 1	10	+ 0,021
Gr. 2343. .	16 22	55 27	9	— 0,008
η Draconis. .	16 23	61 46	14	+ 0,070
λ Ophiuchi. .	16 25	2 14	17	0,000
β Herculis . .	16 25	21 44	3	— 0,043
A Draconis. .	16 28	69 0	9	— 0,071
σ Herculis . .	16 31	42 40	28	+ 0,016
ζ Ophiuchi. .	16 31	—10 21	3	+ 0,017
ζ Herculis . .	16 37	31 48	16	+ 0,047
η Herculis. .	16 39	39 8	29	+ 0,003
Gr. 2377. .	16 43	56 59	35	+ 0,058
49 Herculis . .	16 47	15 10	31	+ 0,011
κ Ophiuchi. .	16 52	9 33	23	— 0,008
ε Herculis . .	16 56	31 5	9	— 0,028
60 Herculis . .	17 0	12 54	8	+ 0,030
η Ophiuchi. .	17 4	—15 35	2	— 0,070
Gr. 2415. .	17 4	40 40	12	— 0,063
ζ Draconis . .	17 8	65 51	23	+ 0,052
α Herculis. .	17 10	14 31	21	— 0,003
δ Herculis . .	17 11	24 58	7	— 0,030
π Herculis . .	17 11	36 56	34	+ 0,013
ϑ Ophiuchi. .	17 15	—24 53	6	+ 0,008
x Herculis . .	17 24	48 21	47	— 0,044
β Draconis . .	17 28	52 23	53	+ 0,031
α Ophiuchi. .	17 30	12 38	17	+ 0,029
ν^1 Draconis . .	17 30	55 16	13	— 0,045
ν^2 Draconis. .	17 30	55 15	12	— 0,017
f Draconis . .	17 32	68 12	27	— 0,115
ι Herculis . .	17 36	46 4	24	+ 0,002
ω Draconis . .	17 38	68 49	33	+ 0,026
β Ophiuchi. .	17 38	4 37	7	+ 0,021
μ Herculis . .	17 42	27 47	15	+ 0,009
γ Ophiuchi. .	17 42	2 45	53	— 0,005
ψ Drac. austr.	17 44	72 12	10	+ 0,018
ξ Draconis . .	17 52	56 53	25	+ 0,110
ϑ Herculis . .	17 52	37 16	14	— 0,009
ξ Herculis . .	17 53	29 16	2	— 0,080
γ Draconis . .	17 54	51 30	11	— 0,034
35 Draconis. .	17 54	76 59	13	+ 0,014
67 Ophiuchi. .	17 55	2 56	7	+ 0,050
72 Ophiuchi. .	18 2	9 33	24	+ 0,017
o Herculis . .	18 3	28 45	7	— 0,023
Gr. 2533. .	18 12	42 7	22	— 0,074
36 Draconis . .	18 13	64 22	4	— 0,023
η Serpentis. .	18 16	— 2 56	2	— 0,050
109 Herculis . .	18 19	21 43	25	+ 0,007
b Draconis . .	18 22	58 44	17	+ 0,017
φ Draconis . .	18 22	71 17	3	— 0,010
α Lyrae. . . .	18 33	38 41	33	+ 0,022
Gr. 2655. .	18 35	77 28	2	— 0,100
Gr. 2640. .	18 36	65 23	17	— 0,036
ε Lyrae pr. .	18 41	39 33	25	— 0,080
5 Lyrae m. .	18 41	39 30	22	+ 0,016
110 Herculis . .	18 41	20 26	10	— 0,017
β Lyrae. . . .	18 46	33 14	17	+ 0,010
o Draconis . .	18 50	59 15	28	+ 0,020
ϑ Serpentis pr.	18 51	4 4	6	+ 0,023
R Lyrae . . .	18 52	43 48	2	— 0,060
ε Aquilae . .	18 55	14 55	24	+ 0,012
γ Lirae	18 55	32 32	9	— 0,011
υ Draconis . .	18 56	71 9	13	— 0,002
ζ Aquilae . .	19 0	13 42	22	+ 0,017
λ Aquilae . .	19 0	— 5 3	2	0,000
π Sagittarii. .	19 3	—21 12	4	— 0,055
ι Lyrae. . . .	19 3	35 56	22	+ 0,003
δ Draconis . .	19 13	67 28	6	— 0,025
ϑ Lyrae . . .	19 13	37 56	12	— 0,037
ω Aquilae . .	19 13	11 24	11	— 0,003
κ Cygni. . . .	19 15	53 10	23	— 0,023

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B	NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′		s		h m	° ′		s
τ Draconis. .	19 18	73 9	18	— 0,024	Br. 2777. .	21 8	77 41	21	— 0,032
δ Aquilae. . .	19 20	2 54	34	— 0,011	ζ Cygni. . . .	21 8	29 47	15	— 0,025
β Cygni. . . .	19 26	27 44	14	— 0,013	Gr. 3415. .	21 9	59 32	28	— 0,007
ι Cygni. . . .	19 27	51 30	30	+ 0,029	α Equulei . .	21 10	4 48	16	— 0,009
Gr. 2900. .	19 28	79 23	33	— 0,006	τ Cygni. . . .	21 10	37 35	6	— 0,038
ϑ Cygni. . . .	19 33	49 58	23	+ 0,013	α Cephei . . .	21 16	62 7	3	+ 0,013
15 Cygni . . .	19 40	37 5	21	+ 0,007	1 Pegasi . . .	21 17	19 20	14	— 0,015
γ Aquilae. . .	19 41	10 21	15	+ 0,013	g Cygni. . . .	21 25	46 3	3	— 0,007
δ Cygni . . .	19 42	44 52	27	+ 0,024	β Aquarii. . .	21 26	— 6 3	3	+ 0,111
δ Sagittae . .	19 42	18 16	9	+ 0,015	β Cephei . . .	21 27	70 5	5	— 0,008
α Aquilae . .	19 45	8 35	11	— 0,003	74 Cygni. . . .	21 33	39 55	16	— 0,019
η Aquilae. . .	19 47	0 43	9	— 0,002	13 H. Cephei .	21 36	56 59	18	— 0,003
ε Draconis. .	19 49	69 59	19	— 0,006	ε Pegasi . . .	21 39	9 22	15	+ 0,060
β Aquilae. . .	19 50	6 8	16	+ 0,014	κ Pegasi. . .	21 40	25 8	3	+ 0,007
ψ Cygni . . .	19 53	52 9	19	— 0,004	11 Cephei . . .	21 40	70 48	18	+ 0,004
γ Sagittae . .	19 54	19 12	19	+ 0,030	π² Cygni. . . .	21 43	48 48	22	— 0,015
ϑ Aquilae. . .	20 6	— 1 9	14	+ 0.012	16 Pegasi . . .	21 48	25 24	29	+ 0,005
o¹ sq. Cygni. .	20 10	46 24	18	+ 0,020	20 Pegasi . . .	21 56	12 36	23	+ 0,019
33 Cygni. . . .	20 11	56 14	4	0,000	α Aquarii. . .	22 0	— 0 51	9	+ 0,006
24 Vulpeculae.	20 12	24 20	15	— 0,037	20 Cephei . . .	22 2	62 15	29	— 0,017
κ Cephei. . .	20 13	77 23	18	— 0,026	ι Pegasi . . .	22 2	24 48	3	— 0,053
γ Cygni. . . .	20 18	39 54	50	+ 0,031	27 Pegasi . . .	22 4	32 38	3	— 0,023
ϑ Cephei . . .	20 28	62 37	39	+ 0,004	ϑ Pegasi . . .	22 5	5 39	7	+ 0,019
ε Delphini. .	20 28	10 56	23	— 0,004	π Pegasi . . .	22 5	32 38	9	+ 0,001
β Delphini. .	20 32	14 13	8	— 0,025	ζ Cephei . . .	22 7	57 40	12	— 0,022
73 Draconis. .	20 33	74 35	4	+ 0,015	γ Aquarii . .	22 16	— 1 56	3	+ 0,033
κ Delphini. .	20 34	9 42	3	+ 0,100	31 Pegasi . . .	22 16	11 39	12	— 0,001
α Delphini. .	20 35	15 31	2	— 0,010	3 Lacertae. .	22 19	51 41	18	+ 0,032
α Cygni . . .	20 38	44 53	30	+ 0,012	δ Cephei. . .	22 25	57 51	28	+ 0,044
δ Delphini. .	20 38	14 41	12	— 0,012	7 Lacertae. .	22 27	49 43	14	— 0,037
ε Aquarii. . .	20 42	— 9 54	12	— 0,062	η Aquarii. . .	22 30	— 0 41	26	— 0,002
ε Cygni. . . .	20 42	33 34	11	+ 0,010	31 Cephei. . .	22 33	73 4	11	+ 0,021
6 H. Cephei .	20 43	57 11	8	+ 0,001	10 Lacertae . .	22 34	38 29	15	— 0,007
η Cephei . . .	20 43	61 25	7	+ 0,003	30 Cephei. . .	22 35	63 1	12	— 0,065
λ Cygni. . . .	20 43	36 5	8	+ 0,016	ζ Pegasi . . .	22 36	10 15	6	+ 0,008
32 Vulpeculae.	20 50	27 38	8	0,000	η Pegasi . . .	22 38	29 39	14	+ 0,027
ν Cygni. . . .	20 53	40 45	4	— 0,030	13 Lacertae . .	22 39	41 15	31	0,000
ξ Cygni. . . .	21 1	43 29	26	+ 0,026	λ Pegasi . . .	22 41	22 59	9	— 0,003
61 Cygni pr. .	21 2	38 13	41	— 0,055	μ Pegasi . . .	22 45	24 1	12	+ 0,002
ν Aquarii . .	21 4	—11 49	4	+ 0,002	ι Cephei . . .	22 46	65 37	19	0,000

NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B	NOME DELLE STELLE	AR. appross. 1890,0	Decl. appross. 1890,0	Numero delle osservazioni	Differenze C—B
	h m	° ′		s		h m	° ′		s
ο Andromedae	22 57	41 44	34	— 0,002	70 Pegasi . . .	23 24	12 9	6	+ 0,045
β Pegasi . . .	22 58	27 29	5	+ 0,030	72 Pegasi . . .	23 28	30 43	3	— 0,033
α Pegasi . . .	22 59	14 37	11	+ 0,015	ι Andromedae	23 33	42 40	4	+ 0,032
π Cephei . . .	23 4	74 48	27	— 0,026	ι Piscium. . .	23 34	5 2	5	— 0,002
Br. 3077. .	23 8	56 34	35	— 0,006	γ Cephei. . .	23 35	77 1	4	— 0,035
γ Piscium . .	23 11	2 41	31	— 0,025	κ Andromedae	23 35	43 43	6	+ 0,010
τ Pegasi . . .	23 15	23 8	12	— 0,009	41 H. Cephei .	23 43	67 12	8	— 0,036
υ Pegasi . . .	23 20	22 48	6	— 0,082	φ Pegasi . . .	23 47	18 31	30	— 0,012
4 Cassiopejae	23 20	61 41	6	— 0,003	ρ Cassiopejae.	23 49	56 53	21	— 0,004
κ Piscium. . .	23 21	0 39	12	— 0,021	ω Piscium . .	23 54	6 15	35	— 0,014

Se si distribuiscono le stelle in gruppi di 5° in 5° di declinazione, e si omettano le 12 stelle di declinazione australe superiore ai 5°, si hanno per le diverse zone, le seguenti differenze medie tra le nostre ascensioni rette e le ascensioni rette del Berl. Astr. Jahrb.

Tavola II.

ZONE	Numero delle stelle	Differenze C—B
		s
da—5° a 0°	24	+ 0,001
» 0 » 5	23	+ 0,001
» 0 » 10	33	+ 0,013
» 10 » 15	29	+ 0,011
» 15 » 20	31	+ 0,006
» 20 » 25	31	— 0,006
» 25 » 30	31	— 0,005
» 30 » 35	25	— 0,007
» 35 » 40	34	— 0,005
» 40 » 45	35	— 0,008
» 45 » 50	27	— 0,005
» 50 » 55	21	— 0,008
» 55 » 60	37	+ 0,015
» 60 » 65	26	+ 0,006
» 65 » 70	29	+ 0,013
» 70 » 75	24	+ 0,004
» 75 » 80	20	— 0,025

Le differenze C-B della Tavola II sono dedotte dalle differenze C-B della Tavola I, supponendo quest'ultime tutte di ugual peso senza aver riguardo al numero delle osservazioni donde esse sono tratte. Dobbiamo tuttavia far notare che, escludendo pure le differenze derivanti da stelle osservate meno di quattro volte, non risulterebbero per le diverse zone valori di C—B sensibilmente differenti da quelli riportati qui sopra.

Esaminando le differenze medie della Tavola II, si vede che, queste differenze riescono negative per le zone più vicine al zenit, positive per le più lontane ad eccezione dell'ultima zona compresa tra + 75° e + 80°.

Il cambiamento di segno nelle differenze C—B che si riscontra, passando dalle zone più lontane alle più vicine al nostro zenit, e simmetricamente ad esso, si può con qualche fondamento attribuire ad una variazione nell'equazione personale dell'uno o dell'altro osservatore, la quale dipende probabilmente dalla posizione incomoda che si è costretti a prendere nell'osservare le stelle in vicinanza al zenit. Nè siffatto cambiamento è d'altronde spiegabile per un'incurvamento dell'asse di rotazione dell'istrumento, poichè le osservazioni sono state fatte collo strumento così nelle posizione diretta come nella posizione inversa. Quanto poi al valore di $C - B = -0^s,025$ corrispondente all'ultima zona, se questo si riduca all'equatore diviene dell'ordine degli altri, rimanendo tuttavia l'anomalia nel segno rispetto alle zone più lontane dal zenit.

Divise le 480 stelle in gruppi di 2^h in 2^h di ascensione retta, si hanno per i 12 gruppi che risultano da tale distribuzione le seguenti differenze medie tra le ascensioni rette del nostro Catalogo e le ascensioni rette del Berl. Astr. Jahr.

Tavola III.

Ore	Numero delle stelle	Differenze C—B
da 0^h a 2^h	38	+ $0^s,005$
» 2 » 4	47	+ 0,003
» 4 » 6	36	— 0,001
» 6 » 8	39	+ 0,004
» 8 » 10	38	— 0,002
» 10 » 12	37	+ 0,004
» 12 » 14	33	+ 0,001
» 14 » 16	44	+ 0,008
» 16 » 18	44	— 0,003
» 18 » 20	43	- · 0,006
» 20 » 22	39	0,000
» 22 » 24	42	— 0,005

Queste differenze nè pel segno nè pel valore sieguono alcuna legge, la quale indichi l'esistenza di errori sistematici nelle ascensioni rette delle stelle che abbiano una qualsiasi dipendenza dall'ora siderale.

Se si prenda il medio di tutta le differenze C — B della Tavola I si ha la differenza media generale.

Catalogo del Campidoglio — Catalogo del Berl. Astr. Jahr. $= + 0^s0007$, quantità piccolissima ed affatto trascurabile, avuto riguardo ai limiti di approssimazione entro cui sono date le ascensioni rette del nostro Catalogo.

La prima colonna del Catalogo contiene il numero progressivo delle stelle disposto secondo la loro ascensione retta.

La seconda contiene il nome e la designazione delle stelle per mezzo delle lettere dell'alfabeto loro assegnate in ogni costellazione, o per mezzo del numero loro attribuito da Flamsteed, dal catalogo di Groombridge, di Piazzi ecc. o col semplice nome della costellazione corrispondente.

La terza contiene la grandezza delle stelle, qual'è notata nei due Cataloghi di Respighi, desunta dall'*Uranometria nova* di Argelander o dall'*Atlas coelestis* di Heis, e per le stelle non contenute nell'*Uranometria nova* e nell'*Atlas coelestis*, dal BAC.

La quarta contiene la declinazione approssimata delle stelle pel 1890,0.

La quinta contiene l'ascensione retta media delle stelle pel 1890,0 dedotta dalle nostre osservazioni.

La sesta e settima il numero delle osservazioni fatte sopra ogni stella e l'epoca media di queste osservazioni.

L'ottava la precessione annua in ascensione retta.

La nona la variazione secolare.

La decima colonna finalmente contiene i numeri ordinali delle stelle secondo il BAC. anch'essi iscritti nell'ultima colonna dei due Cataloghi di Respighi.

Nel chiudere questa introduzione al Catalogo di ascensioni rette, non dobbiamo omettere che il nostro collega dott. Antonio Prosperi, 2° astronomo aggiunto dell'Osservatorio del Campidoglio, ha presa non piccola parte ai lunghi e laboriosi calcoli di riduzione.

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1	86 Pegasi	6	12 47,0	0 0 3,08	6	86,12	+ 3,073	+ 0,0086	8370
2	10 Cassiopejae . .	6	63 35,0	0 0 43,69	6	87,93	+ 3,081	+ 0,0629	8373
3	Pegasi	6.5	28 24,9	0 0 54,26	6	89,80	+ 3,075	+ 0,0181	8374
4	α Andromodae . .	2	28 29,0	0 2 42,08	25	87,65	+ 3,081	+ 0,0183	4
5	β Cassiopejae . .	2.3	58 32,6	0 3 18,44	14	88,05	+ 3,104	+ 0,0517	7
6	87 Pegasi	6	17 36,0	0 3 21,90	6	86,55	+ 3,079	+ 0,0116	8
7	Andromedae . .	6	45 46,6	0 4 20,46	3	87,92	+ 3,098	+ 0,0333	13
8	34 Piscium	6	10 32,0	0 4 23,01	6	86,27	+ 3,077	+ 0,0077	14
9	22 Andromedae . .	5.6	45 27,6	0 4 36,36	9	88,07	+ 3,100	+ 0,0329	16
10	γ Pegasi	3.2	14 34,3	0 7 34,28	14	88,74	+ 3,084	+ 0,0101	26
11	23 Andromedae . .	6	40 25,7	0 7 48,16	5	87,80	+ 3,111	+ 0,0284	28
12	χ Pegasi	5	19 35,7	0 8 54,62	9	86,59	+ 3,091	+ 0,0130	32
13	35 Piscium	6	8 12,6	0 9 18,81	6	87,24	+ 3,080	+ 0,0067	36
14	Br. 6.	6.7	76 20,4	0 9 59,20	16	88,69	+ 3,312	+ 0,1443	39
15	Piscium	....	3 38,4	0 10 18,59	6	86,55	+ 3,076	+ 0,0040	42
16	Cassiopejae . .	6	60 55,3	0 11 2,77	7	87,78	+ 3,188	+ 0,0593	46
17	ϑ Andromedae . .	5.4	38 4,3	0 11 20,68	6	87,12	+ 3,124	+ 0,0267	52
18	Andromedae . .	6	47 20,1	0 11 20,91	5	87,81	+ 3,144	+ 0,0363	51
19	Cassiopejae . .	6.7	50 49,3	0 11 53,37	7	88,30	+ 3,158	+ 0,0411	54
20	σ Andromedae . .	4.5	36 10,5	0 12 34,77	6	86,95	+ 3,126	+ 0,0251	58
21	40 Piscium	6	15 38,4	0 14 15,18	6	86,41	+ 3,096	+ 0,0112	63
22	Cassiopejae . .	6	61 16,1	0 14 44,53	10	87,91	+ 3,229	+ 0,0626	65
23	δ Piscium	6.5	7 34,8	0 14 56,23	6	86,59	+ 3,084	+ 0,0066	66
24	ρ Andromedae . .	6	37 21,5	0 15 19,66	7	86,81	+ 3,141	+ 0,0265	67
25	42 Piscium	6	12 52,3	0 16 43,99	6	86,55	+ 3,095	+ 0,0097	73
26	Andromedae . .	6.7	43 39,3	0 18 14,25	6	87,70	+ 3,174	+ 0,0332	78
27	Cassiopejae . .	6	51 24,6	0 18 20,28	6	87,91	+ 3,206	+ 0,0434	79
28	12 Cassiopejae . .	6.5	61 13,3	0 18 43,53	8	87,71	+ 3,270	+ 0,0641	80
29	43 Piscium	6	13 42,4	0 18 56,48	6	86,55	+ 3,100	+ 0,0103	82
30	Cassiopejae . .	6	52 26,2	0 19 9,47	6	88,27	+ 3,217	+ 0,0453	83
31	44 Piscium	6	1 19,8	0 19 45,86	5	86,76	+ 3,075	+ 0,0037	87
32	45 Piscium	6	7 5,0	0 20 1,67	7	86,80	+ 3,087	+ 0,0067	89
33	Cephei	6.7	79 26,6	0 20 4,92	10	88,82	+ 3,699	+ 0,2277	86
34	47 Piscium	6.5	17 17,0	0 22 18,79	6	86,24	+ 3,113	+ 0,0126	101
35	Andromedae . .	6.5	43 47,1	0 22 19,08	6	87,55	+ 3.197	+ 0,0339	100

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
36	48 Piscium	6	15 50,2	0 22 29,82	5	86,74	+ 3,110	+ 0,0118	102
37	28 Andromedae . .	6.5	29 8,7	0 24 19,18	7	86,77	+ 3,151	+ 0,0206	109
38	12 Ceti.	6	— 4 33,9	0 24 25,48	21	88,81	+ 3,061	+ 0,0009	112
39	13 Cassiopejae . .	6	65 54,7	0 25 5,82	5	87,93	+ 3,399	+ 0,0837	114
40	Andromedae . .	6	32 58,5	0 25 35,20	6	87,26	+ 3,169	+ 0,0238	120
41	λ Cassiopejae . .	5	53 54,9	0 25 42,30	6	87,78	+ 3,278	+ 0,0493	121
42	κ Cassiopejae . .	4.5	62 19,5	0 26 45,06	15	88,15	+ 3,369	+ 0,0762	126
43	52 Piscium	6	19 41,3	0 26 49,38	6	86,41	+ 3,128	+ 0,0144	130
44	Cassiopejae . .	6	53 33,8	0 30 1,07	6	87,80	+ 3,309	+ 0,0498	146
45	Cassiopejae . .	6	59 43,2	0 30 12,28	6	87,81	+ 3,373	+ 0,0641	148
46	Piscium	6	12 36,4	0 30 12,94	6	86,78	+ 3,112	+ 0,0104	149
47	Andromedae . .	6	43 52,9	0 30 47,78	6	87,80	+ 3,245	+ 0,0352	152
48	ζ Cassiopejae . .	4	53 17,5	0 30 50,69	14	88,62	+ 3,313	+ 0,0494	153
49	π Andromedae . .	4	33 6,8	0 31 0,29	21	87,30	+ 3,190	+ 0,0243	155
50	53 Piscium	6	14 37,6	0 31 3,49	5	86,99	+ 3,120	+ 0,0116	156
51	Andromedae . .	6	34 47,6	0 31 27,75	6	88,81	+ 3,200	+ 0,0259	158
52	ε Andromedae . .	4.5	28 42,9	0 32 44,63	6	86,93	+ 3,177	+ 0,0210	164
53	Cassiopejae . .	6	48 45,0	0 33 5,18	8	88,36	+ 3,292	+ 0,0422	165
54	δ Andromedae . .	3.4	30 15,5	0 33 26,80	30	87,93	+ 3,186	+ 0,0222	166
55	54 Piscium	6.7	20 39,4	0 33 38,57	7	89,40	+ 3,146	+ 0,0154	168
56	55 Piscium	6.5	20 50,1	0 34 7,98	6	87,11	+ 3,148	+ 0,0156	170
57	α Cassiopejae . .	var.	55 56,0	0 34 15,97	6	88,14	+ 3,367	+ 0,0557	169
58	32 Andromedae . .	5.6	38 51,3	0 35 9,46	6	87,76	+ 3,237	+ 0,0301	173
59	Andromedae . .	6	24 1,6	0 35 45,91	6	86,78	+ 3,165	+ 0,0177	178
60	ξ Cassiopejae . .	6	49 54,6	0 35 55,86	6	87,86	+ 3,320	+ 0,0445	180
61	π Cassiopejae . .	6	46 25,4	0 37 22,97	6	87,78	+ 3,301	+ 0,0394	189
62	21 Cassiopejae . .	6	74 23,2	0 38 23,60	5	88,54	+ 3,870	+ 0,1628	194
63	ο Cassiopejae . .	5	47 40,9	0 38 35,73	29	88,79	+ 3,319	+ 0,0415	198
64	Cassiopejae . .	6	54 37,2	0 39 1,22	6	87,85	+ 3,392	+ 0 0540	201
65	23 Cassiopejae . .	6	74 14,7	0 40 25,72	8	88,80	+ 3,904	+ 0,1643	206
66	58 Piscium	5	11 22,5	0 41 17,16	6	87,11	+ 3,121	+ 0,0102	213
67	59 Piscium	6	18 58,6	0 41 24,81	5	88,38	+ 3,155	+ 0,0149	214
68	ζ Andromedae . .	4.5	23 40,1	0 41 30,52	5	87,81	+ 3,178	+ 0,0179	215
69	60 Piscium	6.7	6 8,4	0 41 42,36	5	87,77	+ 3,099	+ 0,0072	216
70	η Cassiopejae . .	4.3	57 13,9	0 42 26,13	1	87,81	+ 3,454	+ 0,0610	218

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
71	62 Piscium	6	6 42,0	0 42 35,04	5	88,90	+ 3,102	+ 0,0067	220
72	ν Cassiopejae . .	5	50 22,1	0 42 36,11	6	87,80	+ 3,371	+ 0,0465	219
73	Piscium	6	4 43,1	0 42 36,78	5	88,68	+ 3,093	+ 0,0067	221
74	δ Piscium	4.5	6 59,2	0 42 58,47	16	87,17	+ 3,103	+ 0,0079	222
75	64 Piscium	6.5	16 20,8	0 43 11,86	6	88,51	+ 3,146	+ 0,0132	223
76	Andromedae . .	6	28 7,2	0 43 15,66	7	87,96	+ 3,207	+ 0,0213	224
77	Cassiopejae . .	6	47 9,9	0 43 27,53	6	87,92	+ 3,344	+ 0,0414	226
78	ν Andromedae . .	4 5	40 28,8	0 43 44,87	5	88,50	+ 3,289	+ 0,0328	227
79	i Piscium	6	27 6,7	0 43 58,69	3	87,77	+ 3,203	+ 0,0205	229
80	Br. 82	6	63 38,9	0 44 3,17	1	87,79	+ 3,588	+ 0,0831	228
81	Cassiopejae . .	5.6	60 31,2	0 46 30,45	7	87,82	+ 3,549	+ 0,0717	239
82	υ¹ Cassiopejae . .	6.5	58 22,6	0 48 28,49	7	88,32	+ 3,527	+ 0,0658	244
83	66 Piscium	6	18 35,5	0 48 45,77	6	86,63	+ 3,167	+ 0,0149	247
84	Cassiopejae . .	5	48 4,9	0 48 50,24	5	87,87	+ 3,387	+ 0,0486	245
85	36 Andromedae . .	6	23 1,9	0 49 4,65	5	88,17	+ 3,193	+ 0,0179	250
86	k Piscium	6	26 36,8	0 50 3,54	6	88,35	+ 3,217	+ 0,0206	256
87	γ Cassiopejae . .	2	60 7,2	0 50 4,21	7	87,98	+ 3,577	+ 0,0718	253
88	υ² Cassiopejae . .	6.5	58 35,2	0 50 7,06	8	88,14	+ 3,547	+ 0,0666	254
89	Cassiopejae . .	6	59 46,0	0 50 9,55	7	88,67	+ 3,571	+ 0,0707	255
90	μ Andromedae . .	4	37 54,2	0 50 38,97	6	88,45	+ 3,301	+ 0,0307	259
91	Piscium	7.6	26 24,3	0 51 19,59	5	88,08	+ 3,220	+ 0,0205	263
92	η Andromedae . .	5	22 49,4	0 51 19,97	6	88,11	+ 3,198	+ 0,0179	264
93	Cassiopejae . .	6	65 45,5	0 51 33,47	7	88,68	+ 3,733	+ 0,0970	261
94	h Piscium	6	28 23,9	0 51 52,95	6	88,87	+ 3,235	+ 0,0221	267
95	39 Andromedae . .	6	40 45,3	0 56 43,43	5	87,96	+ 3,354	+ 0,0344	283
96	σ¹ Piscium	5	31 12,8	0 56 47,64	4	88,50	+ 3,271	+ 0,0247	285
97	Cassiopejae . .	6	60 29,0	0 56 50,78	7	87,80	+ 3,652	+ 0,0752	282
98	Cassiopejae . .	6	73 46,9	0 56 55,95	8	88,80	+ 4,203	+ 0,1775	280
99	ε Piscium	4	7 17,9	0 57 14,07	19	87,82	+ 3,115	+ 0,0088	288
100	Andromedae . .	6	39 24,1	0 58 25,28	7	88,22	+ 3,349	+ 0,0330	297
101	Piscium	6	29 4,3	0 58 26,89	5	88,65	+ 3,260	+ 0,0230	299
102	72 Piscium	6	14 21,2	0 59 16,92	5	87,37	+ 3,160	+ 0,0129	305
103	Cassiopejae . .	6.7	62 10,4	0 59 26,74	7	88,56	+ 3,721	+ 0,0826	302
104	ψ¹ Piscium	5.4	20 53,0	0 59 47,09	7	87,47	+ 3,204	+ 0,0170	307
105	Piscium	6	20 52,6	0 59 47,85	7	87,18	+ 3,204	+ 0,0170	308

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
106	Cassiopejae . .	6.7	79 25,5	0 59 50,74	10	88,98	+ 4,920	+ 0,3446	300
107	μ Cassiopejae . .	6	54 22,8	1 0 56,47	7	87,83	+ 3,562	+ 0,0580	314
108	41 Andromedae . .	5	43 21,4	1 1 42,08	5	87,96	+ 3,408	+ 0,0382	318
109	78 Piscium	6	31 25,5	1 1 56,04	5	88,38	+ 3,290	+ 0,0252	321
110	ψ² Piscium	6.5	20 9,2	1 2 3,05	7	86,93	+ 3,204	+ 0,0166	322
111	e Piscium	6.5	5 4,0	1 2 42,19	5	87,78	+ 3,104	+ 0,0079	328
112	44 H. Cephei . . .	6.5	79 5,3	1 2 47,07	1	87,91	+ 4,949	+ 0,3354	320
113	φ Andromedae . .	4.5	46 39,3	1 3 7,11	6	88,29	+ 3,457	+ 0,0432	330
114	31 Cassiopejae . .	6	68 11,6	1 3 13,17	7	88,80	+ 3,983	+ 0,1192	327
115	β Andromedae . .	2.3	35 2,2	1 3 34,48	3	87,51	+ 3,329	+ 0,0287	334
116	ψ³ Piscium	6	19 4,3	1 3 56,40	5	87,65	+ 3,199	+ 0,0162	336
117	44 Andromedae . .	6	41 29,8	1 4 4,11	6	87,96	+ 3,398	+ 0,0360	337
118	Piscium	6.7	15 5,3	1 4 21,50	5	88,92	+ 3,172	+ 0,0135	341
119	ϑ Cassiopejae . .	4.5	54 33,9	1 4 24,42	7	87,80	+ 3,593	+ 0,0588	339
120	32 Cassiopejae . .	6	64 26,0	1 4 31,87	7	88,56	+ 3,848	+ 0,0953	338
121	33 Ceti.	6.7	1 51,6	1 4 53,98	6	89,00	+ 3,085	+ 0,0063	344
122	45 Andromedae . .	6	37 8,3	1 4 59,38	5	88,82	+ 3,355	+ 0,0310	343
123	g Piscium	5.6	30 50,4	1 5 2,75	5	88.91	+ 3,296	+ 0,0250	345
124	χ Piscium	5.4	20 27,0	1 5 32,46	6	88,05	+ 3,213	+ 0,0171	348
125	τ Piscium	4	29 30,3	1 5 36,15	8	87,31	+ 3,286	+ 0,0237	349
126	Andromedae . .	6.7	44 45,0	1 6 11,84	6	87,98	+ 3,450	+ 0,0406	352
127	φ Piscium	5	24 0,1	1 7 46,55	6	86,82	+ 3,246	+ 0,0196	365
128	ζ Piscium	5.4	6 59,6	1 7 59,08	7	86,69	+ 3,120	+ 0,0091	368
129	Piscium	7.6	7 0,6	1 8 0,49	7	86,82	+ 3,120	+ 0,0091	369
130	Andromedae . .	6	42 21,5	1 10 9,88	7	87,82	+ 3,440	+ 0,0377	377
131	Cassiopejae . .	7	76 59,3	1 11 10,70	9	88,38	+ 4,841	+ 0,2696	378
132	f Piscium	5.6	3 2,1	1 12 7,56	5	86,79	+ 3,094	+ 0,0072	388
133	φ Cassiopejae . .	5.6	57 39,2	1 13 9,87	8	87,92	+ 3,735	+ 0,0696	391
134	υ Piscium	4.5	26 41,1	1 13 25,20	36	88,38	+ 3,284	+ 0,0219	395
135	Cassiopejae . .	6	78 9,0	1 14 6,55	9	88,86	+ 5,097	+ 0,3177	393
136	l Piscium	5	28 9,8	1 15 2,40	6	86,63	+ 3,303	+ 0,0232	401
137	ξ Andromedae . .	5	44 57,1	1 15 52,01	5	87,88	+ 3,506	+ 0,0419	404
138	47 Andromedae . .	6	37 8,4	1 17 23,08	5	86,82	+ 3,408	+ 0,0318	409
139	ψ Cassiopejae . .	5	67 33,3	1 18 9,98	9	88,09	+ 4,155	+ 0,1217	412
140	ϑ Ceti.	3	— 8 45,1	1 18 31,52	1	89,83	+ 3,003	+ 0,0019	420

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
141	δ Cassiopejae . .	3.2	59 39,8	1 18 37,29	25	88,18	+ 3,841	+ 0,0778	416
142	Andromedae . .	6	42 53,2	1 19 50,60	6	87,31	+ 3,496	+ 0,0391	425
143	ρ Piscium	5	18 37,0	1 20 19,52	8	86,67	+ 3,227	+ 0,0164	427
144	94 Piscium	6.7	18 40,3	1 20 45,16	8	86,59	+ 3,228	+ 0,0165	431
145	ω Andromedae . .	5	44 50,3	1 21 4,52	8	87,72	+ 3,533	+ 0,0421	432
146	38 Cassiopejae . .	6	69 41.9	1 23 3,02	6	88,04	+ 4,354	+ 0,1441	438
147	A Andromedae . .	6	46 26,4	1 23 30,45	6	87,79	+ 3,573	+ 0,0449	441
148	μ Piscium	5	5 34,6	1 24 25,16	5	86,85	+ 3,119	+ 0,0090	448
149	Cassiopejae . .	6	67 50,6	1 24 26,43	7	87,95	+ 4,255	+ 0,1268	444
150	η Piscium	4.3	14 46,7	1 25 35,82	26	87,45	+ 3,201	+ 0,0142	453
151	χ Cassiopejae . .	5.6	58 40,0	1 26 44,63	8	87,79	+ 3,884	+ 0,0757	456
152	Andromedae . .	6	36 40,4	1 27 55,60	5	87,45	+ 3,445	+ 0,0319	465
153	Piscium	6.7	17 53,9	1 28 51,91	8	86,54	+ 3,235	+ 0,0162	469
154	Andromedae . .	6	48 9,6	1 29 43,87	6	87,87	+ 3,642	+ 0,0485	474
155	40 Cassiopejae . .	6.5	72 28,7	1 29 43,89	15	88,74	+ 4,688	+ 0,1853	468
156	101 Piscium	6.7	14 5,9	1 29 53,49	7	86,68	+ 3,201	+ 0,0139	476
157	Piscium	6	16 52,2	1 29 57,65	6	87,19	+ 3,228	+ 0,0156	477
158	50 Andromedae . .	4.5	40 51,3	1 30 20,50	6	87,98	+ 3,517	+ 0,0370	480
159	Cassiopejae . .	6	57 25,0	1 30 56,31	8	87,83	+ 3,881	+ 0,0720	482
160	υ Persei	4.3	48 4,2	1 31 14,43	17	88.31	+ 3,649	+ 0,0485	487
161	π Piscium	6	11 34,7	1 31 16,07	7	86,65	+ 3,179	+ 0,0125	488
162	χ Andromedae . .	5.6	43 49,6	1 32 45,17	6	87,94	+ 3,577	+ 0,0414	492
163	105 Piscium	6	15 50,8	1 33 44,77	7	86,53	+ 3,224	+ 0,0151	500
164	Andromedae . .	6	42 44,5	1 34 3,96	6	87,98	+ 3,565	+ 0,0399	501
165	τ Andromedae . .	5	40 1,2	1 34 5,22	6	87,95	+ 3,520	+ 0,0362	502
166	43 Cassiopejae . .	6	67 29,2	1 34 11,96	3	88,17	+ 4,361	+ 0,1276	498
167	42 Cassiopejae . .	6	70 4,0	1 34 24,55	10	88,77	+ 4,549	+ 0,1540	499
168	Andromedae . .	6	42 3,7	1 35 5,14	7	87,95	+ 3,558	+ 0,0390	510
169	Andromedae . .	6	34 41,4	1 35 42,05	7	86,85	+ 3,448	+ 0,0301	516
170	ν Piscium	5.4	4 55,8	1 35 42,34	8	87,21	+ 3,119	+ 0,0091	518
171	44 Cassiopejae . .	6	59 59,8	1 35 53,15	7	87,82	+ 4,012	+ 0,0825	515
172	107 Piscium	5.6	19 44,0	1 36 31,64	5	86,75	+ 3,268	+ 0,0177	523
173	φ Persei	4	50 8,1	1 36 46,00	31	89,04	+ 3,728	+ 0,0530	522
174	τ Ceti	3.4	−16 31,0	1 38 57,86	1	86,75	+ 2,907	— 0,0003	536
175	ο Piscium	4	8 36,2	1 39 35,07	35	87,38	+ 3,157	+ 0,0111	537

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz media approssim 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
176	Cassiopejae . .	6.7	63 18,6	1 39 47,52	9	87,81	+ 4,193	+ 0,0976	535
177	Andromedae . .	6.7	45 40,9	1 41 3,00	7	87,85	+ 3,657	+ 0,0448	540
178	Andromedae . .	6	37 24,3	1 42 9,39	5	86,82	+ 3,513	+ 0,0333	544
179	Andromedae . .	6	47 20,9	1 42 25,94	6	87,89	+ 3.701	+ 0.0479	547
180	Persei	6.7	51 23,5	1 43 54,64	6	87,90	+ 3.805	+ 0,0563	555
181	1 Arietis	6	21 43,7	1 44 3,96	8	86,44	+ 3,306	+ 0.0192	556
182	1 Persei	6	54 36,2	1 44 45,92	11	88,47	+ 3,902	+ 0.0648	558
183	54 Ceti.	6	10 29,9	1 45 1,79	6	86.81	+ 3.182	+ 0,0123	561
184	g Persei	6	50 14,9	1 45 9,65	6	87,91	+ 3,785	+ 0,0539	560
185	ε Cassiopejae . .	3.4	63 7,7	1 46 29,08	30	88,78	+ 4,255	+ 0,0998	564
186	55 Andromedae . .	6	40 11,2	1 46 41,59	6	87,76	+ 3,579	+ 0,0369	566
187	α Trianguli . . .	4.3	29 2,6	1 46 48,70	5	86,46	+ 3,406	+ 0.0250	569
188	46 Cassiopejae . .	5	68 8,7	1 47 27,76	7	88,05	+ 4,579	+ 0,1381	568
189	γ Arietis med. .	4	18 45,2	1 47 29,60	7	86,80	+ 3,278	+ 0.0173	. . .
190	ξ Piscium	4	2 38,6	1 47 51,67	3	87,56	+ 3,100	+ 0,0084	574
191	Andromedae . .	6	36 35,1	1 48 27,67	6	87,77	+ 3,525	+ 0,0325	576
192	β Arietis	3.2	20 16,2	1 48 33,79	5	87,62	+ 3,298	+ 0,0183	577
193	Andromedae . .	5	36 44,3	1 49 24,05	5	87,10	+ 3,531	+ 0,0327	579
194	56 Andromedae . .	5	36 42,7	1 49 37,25	5	86,86	+ 3,531	+ 0,0327	580
195	7 Arietis	6	23 2,3	1 49 43,04	6	86,62	+ 3,334	+ 0,0203	581
196	Andromedae . .	6	46 33,5	1 51 6,20	6	87,79	+ 3,730	+ 0,0468	587
197	ι Arietis	6	17 16,8	1 51 20,47	8	86,82	+ 3,267	+ 0,0163	592
198	λ Arietis	5	23 3,6	1 51 47,98	6	86,47	+ 3,340	+ 0,0203	593
199	Cassiopejae . .	6.7	77 23,0	1 51 50,29	9	88,99	+ 5,873	+ 0,3388	583
200	48 Cassiopejae . .	5.4	70 22,4	1 52 55,63	8	88,33	+ 4,846	+ 0,1656	595
201	Arietis	6.7	20 31,4	1 53 29,37	6	86,51	+ 3,310	+ 0,0186	607
202	50 Cassiopejae . .	4	71 53,3	1 54 2,97	3	88,21	+ 5,024	+ 0,1887	600
203	112 Piscium	6.7	2 34,2	1 54 25,87	8	86,69	+ 3,101	+ 0,0085	615
204	52 Cassiopejae . .	6	64 22,2	1 54 41,10	7	87,89	+ 4,410	+ 0,1090	610
205	53 Cassiopejae . .	6	63 51,5	1 54 51,85	7	87,95	+ 4,381	+ 0,1057	611
206	4 Persei	5.6	53 57,3	1 54 58,81	7	87,81	+ 3,956	+ 0,0614	614
207	49 Cassiopejae . .	6.5	75 35,2	1 55 1,76	9	88,93	+ 5,575	+ 0,2642	608
208	α Piscium	3.4	2 13,9	1 56 21,24	7	86,57	+ 3,098	+ 0,0084	625
209	ε Trianguli. . . .	5.6	32 45,2	1 56 32,33	6	87,87	+ 3,491	+ 0,0286	624
210	γ Andromedae . .	2.3	41 48,1	1 57 8,83	16	88,04	+ 3,657	+ 0,0393	628

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
211	Arietis	6.7	17 43,5	1 57 40,64	7	86,67	+ 3,282	+ 0,0168	632
212	κ Arietis	6.5	22 7,4	2 0 24,65	6	86,71	+ 3,345	+ 0,0198	644
213	Arietis	6.7	25 18,3	2 0 28,54	6	87,10	+ 3,390	+ 0,0221	645
214	11 Arietis	6.7	25 10,7	2 0 35,09	7	87,25	+ 3,388	+ 0,0220	647
215	α Arietis	2	22 56,5	2 0 58,31	12	86,81	+ 3,357	+ 0,0204	648
216	Persei	5.6	57 54,0	2 1 0,03	8	87,81	+ 4,146	+ 0.0770	646
217	58 Andromedae . .	5.6	37 20,2	2 1 50,99	5	87,97	+ 3,590	+ 0,0336	649
218	β Trianguli. . . .	3	34 28,0	2 2 59,90	6	87,23	+ 3,542	+ 0,0304	656
219	14 Arietis	5	25 25,1	2 3 9,68	6	86,66	+ 3,398	+ 0,0222	657
220	Cassiopejae . .	6.7	73 30,6	2 3 13,80	8	88,62	+ 5,385	+ 0,2237	651
221	h Persei	6	57 7,6	2 3 49,79	9	87,88	+ 4,137	+ 0,0775	658
222	59 Andromedae . .	6	38 31,2	2 4 12,45	8	87,71	+ 3,621	+ 0,0351	661
223	15 Arietis	6	18 58,9	2 4 31,73	6	86,71	+ 3,310	+ 0,0177	665
224	55 Cassiopejae . .	6.7?	66 0,5	2 5 51,25	15	88,73	+ 4,640	+ 0,1226	668
225	6 Trianguli . . .	6	29 47,2	2 5 59,34	6	88,05	+ 3,472	+ 0,0259	675
226	6 Persei	6	50 33,3	2 6 17,24	12	88,16	+ 3,923	+ 0,0554	673
227	b Andromedae . .	5.6	43 42,9	2 6 19,39	7	87,99	+ 3,742	+ 0,0423	676
228	Arietis	6 7	23 39,0	2 6 24,24	7	86,99	+ 3,379	+ 0,0208	679
229	η Arietis	5.6	20 41,6	2 6 38,57	8	86,92	+ 3,338	+ 0,0188	682
230	ξ[1] Ceti.	4.5	8 19,8	2 7 10,17	8	86,25	+ 3,176	+ 0,0116	684
231	7 Trianguli. . . .	5	32 50,8	2 9 25,96	7	86,60	+ 3,535	+ 0,0288	691
232	8 Persei	6	57 23,3	2 10 12,84	7	87,87	+ 4,197	+ 0,0761	695
233	γ Trianguli. . . .	4.5	33 20,3	2 10 46,51	10	87,64	+ 3,547	+ 0,0292	698
234	δ Trianguli. . . .	6.5	33 43,2	2 11 20,23	6	86,77	+ 3,553	+ 0,0296	697
235	ϑ Arietis	6 5	19 23,5	2 12 0,39	12	86,36	+ 3,329	+ 0,0180	707
236	c Andromedae . .	5.6	46 52,4	2 12 11,09	7	87,96	+ 3,851	+ 0,0476	706
237	Andromedae . .	6	48 26,7	2 12 12,34	6	88,05	+ 3,895	+ 0,0508	705
238	Ceti.	6	1 14,2	2 12 18,46	7	86,59	+ 3,088	+ 0,0084	708
239	Andromedae . .	6	46 48,3	2 13 34,29	7	87,99	+ 3,856	+ 0,0476	714
240	63 Andromedae . .	6	49 38,8	2 13 41,30	6	87,98	+ 3,939	+ 0,0534	715
241	o Ceti.	var.	— 3 28,7	2 13 47,35	13	89,84	+ 3,028	+ 0,0064	720
242	i Persei	6.5	55 20,5	2 14 41,45	7	87,87	+ 4,145	+ 0,0685	721
243	Andromedae . .	6	40 53,8	2 15 59,73	5	86,69	+ 3,720	+ 0,0381	727
244	64 Andromedae . .	6	49 30,4	2 17 6,59	7	87.87	+ 3,954	+ 0,0531	731
245	65 Andromedae . .	5	49 46,8	2 18 17,37	7	87,86	+ 3,970	+ 0,0536	735

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
246	ξ Arietis	5.6	10 6,7	2 18 55,24	8	86,25	+ 3,208	+ 0,0127	745
247	ι Cassiopejae . .	4	66 54,4	2 20 0,52	34	88,20	+ 4,871	+ 0,1318	744
248	Arietis	6	10 4,2	2 20 51,58	5	86,46	+ 3,209	+ 0,0129	755
249	12 Trianguli. . . .	6 5	29 10,7	2 21 43,08	8	87,16	+ 3,505	+ 0,0252	757
250	ξ² Ceti.	4	7 58,0	2 22 18,58	16	86,79	+ 3,181	+ 0,0116	760
251	Persei	6	38 38,8	2 23 7,19	9	87,16	+ 3,698	+ 0,0349	761
252	14 Trianguli. . . .	6	35 39,5	2 25 23,34	7	86,81	+ 3,641	+ 0,0315	772
253	Ceti.	6	1 46,7	2 25 48,75	7	86,13	+ 3,097	+ 0,0088	776
254	36 H. Cassiopejae.	6.5	72 20,2	2 27 35,20	10	88,79	+ 5,593	+ 0,2048	777
255	15 Trianguli. . . .	6.5	34 12,4	2 29 6,37	4	86,88	+ 3,623	+ 0,0299	786
256	Ceti.	6	6 21,7	2 30 2,46	5	85,87	+ 3,163	+ 0,0109	793
257	ν Ceti.	5	5 6,8	2 30 6,09	11	86,64	+ 3,145	+ 0,0104	794
258	31 Arietis	6	11 58,2	2 30 37,90	8	86,96	+ 3,246	+ 0,0137	798
259	30 Arietis	6	24 10,1	2 30 39,87	6	87,15	+ 3,439	+ 0,0212	796
260	ν Arietis	6.5	21 29,1	2 32 34,21	33	87,10	+ 3,397	+ 0,0192	808
261	Persei	6	52 19,8	2 32 42,74	6	87,90	+ 4,242	+ 0,0594	806
262	δ Ceti.	4	— 0 8,8	2 33 50,64	2	89,92	+ 3,070	+ 0,0081	811
263	33 Arietis	6.5	26 35,3	2 34 15,29	6	86,17	+ 3,490	+ 0,0229	813
264	Persei	6.7	53 3,4	2 35 14,69	8	87,87	+ 4,187	+ 0,0612	819
265	12 Persei	5	39 43,7	2 35 18,74	6	86,97	+ 3,769	+ 0,0361	821
266	Br. 366.	6.7	67 21,4	2 35 22,05	3	88,07	+ 5,082	+ 0,1361	814
267	μ Arietis	6.5	19 32,6	2 36 9,85	7	86,68	+ 3,372	+ 0,0179	825
268	Arietis	6	10 16,3	2 36 33,58	7	86,83	+ 3,225	+ 0,0128	830
269	ϑ Persei	4	48 45,8	2 36 41,21	29	88,39	+ 4,036	+ 0,0508	827
270	14 Persei	6	43 49,7	2 36 55,45	5	87,90	+ 3,884	+ 0,0419	829
271	35 Arietis	5	27 14,3	2 36 59,70	1	86,80	+ 3,508	+ 0,0233	831
272	γ Ceti.	3.4	2 46,3	2 37 36,08	3	86,92	+ 3,114	+ 0,0094	837
273	38 Arietis	5	11 58,9	2 38 57,90	7	86,39	+ 3,254	+ 0,0138	844
274	μ Ceti.	4	9 39,0	2 38 59,61	29	87,72	+ 3,218	+ 0,0125	845
275	39 Arietis	5	28 47,4	2 41 21,54	6	86,81	+ 3,548	+ 0,0245	861
276	40 Arietis	6.7	17 49,5	2 42 22,04	8	86,60	+ 3,352	+ 0,0168	867
277	η Persei	4.3	55 26,3	2 42 40,52	25	87,65	+ 4,337	+ 0,0678	863
278	π Arietis	6 5	17 0,4	2 43 9,22	5	86,66	+ 3,340	+ 0,0163	870
279	41 Arietis	4.3	26 48,4	2 43 30,56	5	87,26	+ 3,515	+ 0,0229	872
280	16 Persei	5.4	37 51,9	2 43 38,38	6	88,02	+ 3,753	+ 0,0334	871

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
281	17 Persei	5	34 36,4	2 44 44,25	9	86,95	+ 3,680	+ 0,0296	877
282	Persei	6	52 32,7	2 45 3,93	7	87,83	+ 4,224	+ 0,0591	875
283	σ Arietis	6	14 37,7	2 45 25,16	9	86,41	+ 3,303	+ 0,0150	881
284	τ Persei	4	52 18,7	2 46 27,57	17	88,52	+ 4,222	+ 0,0584	885
285	Persei	6	46 43,1	2 49 7,70	6	87,85	+ 4,028	+ 0,0410	897
286	ρ¹ Arietis	6	17 53,1	2 49 37,54	5	85,90	+ 3,363	+ 0,0167	901
287	ρ² Arietis	6	17 35,1	2 50 13,54	7	86,68	+ 3,359	+ 0,0165	903
288	21 Persei	5	31 29,5	2 50 36,74	4	87,47	+ 3,627	+ 0,0265	904
289	47 H. Cephei . . .	6	78 59,0	2 51 29,26	15	89,08	+ 7,744	+ 0,4608	896
290	π Persei	5	39 13,3	2 51 43,72	6	88,05	+ 3,816	+ 0,0345	912
291	47 Arietis	6	20 13,6	2 51 47,37	6	86,88	+ 3,408	+ 0,0181	913
292	24 Persei	5.6	34 44,5	2 52 14,85	6	87,72	+ 3,706	+ 0,0294	915
293	Persei	6	46 46,8	2 52 22,15	8	87,90	+ 4,043	+ 0,0459	914
294	Persei	6.7	40 35,9	2 52 33,47	6	87,99	+ 3,856	+ 0,0362	916
295	ε Arietis	4.5	20 54,0	2 52 55,33	7	86,68	+ 3,422	+ 0,0184	921
296	Persei	5	51 54,9	2 53 1,97	6	87,89	+ 4,241	+ 0,0567	918
297	λ Ceti.	5.4	8 28,1	2 53 49,15	6	85,91	+ 3,209	+ 0,0118	929
298	49 Arietis	6	26 1,6	2 55 25,29	5	86,94	+ 3,525	+ 0,0218	941
299	α Ceti.	2.3	3 39,5	2 56 31,69	17	86,99	+ 3,132	+ 0,0098	949
300	γ Persei	3	53 4,5	2 56 49,83	9	87,93	+ 4,313	+ 0,0594	947
301	Persei	5	56 16,4	2 57 16,60	7	87,87	+ 4,472	+ 0,0689	948
302	ρ Persei	var.	38 24,8	2 58 7,59	12	87,56	+ 3,816	+ 0,0331	953
303	Cassiopejae . .	5.4	73 58,5	3 0 1,49	6	88,05	+ 6,364	+ 0,2381	955
304	β Persei	var.	40 31,9	3 1 0,66	27	88,16	+ 3,884	+ 0,0355	963
305	ι Persei	4	49 11,5	3 1 7,50	3	87,87	+ 4,172	+ 0,0497	962
306	53 Arietis	6.7	17 27,3	3 1 14,10	6	85,90	+ 3,371	+ 0,0162	966
307	κ Persei	4.5	44 26,4	3 2 4,71	6	87,87	+ 4,008	+ 0,0410	967
308	55 Arietis	6	28 39,4	3 2 59,74	8	86,50	+ 3,596	+ 0,0234	974
309	Arietis	6.7	26 28,5	3 3 55,12	6	86,70	+ 3,551	+ 0,0217	980
310	ω Persei	5	39 11,6	3 4 11,39	8	86,98	+ 3,857	+ 0,0336	981
311	Persei	6	41 57,6	3 4 53,82	8	88,18	+ 3,939	+ 0,0371	983
312	δ Arietis	4.5	19 18,6	3 5 20,29	16	87,18	+ 3,411	+ 0,0172	986
313	56 Arietis	6	26 50,5	3 5 41,03	9	86,43	+ 3,563	+ 0,0220	989
314	48 H. Cephei . . .	6.7	77 19,6	3 6 22,61	4	88,13	+ 7,393	+ 0,3545	979
315	Persei	6.7	42 5,6	3 7 38,81	7	87,68	+ 3,954	+ 0,0370	993

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
316	Persei	5	50 31,7	3 8 20,51	7	87,86	+ 4,261	+ 0,0517	995
317	ζ Arietis	4.5	20 38,2	3 8 34,67	6	85,88	+ 3,442	+ 0,0177	999
318	Cassiopejae . .	6	69 19,7	3 9 32,84	6	88,00	+ 5,680	+ 0,1518	998
319	Cassiopejae . .	5	65 15,0	3 10 18,83	6	88,04	+ 5,213	+ 0,1121	1001
320	30 Persei	6	43 37,2	3 10 23,43	6	87,59	+ 4,013	+ 0,0389	1006
321	Persei	6.7	38 52,7	3 10 38,05	6	86,55	+ 3,869	+ 0,0327	1008
322	29 Persei	6	49 49,1	3 10 47,81	6	87,94	+ 4,243	+ 0,0498	1007
323	31 Persei	5.6	49 41,5	3 11 18,02	6	87,86	+ 4,230	+ 0,0495	1011
324	Persei	5	33 49,2	3 11 51,07	7	86,31	+ 3,738	+ 0,0273	1017
325	59 Arietis	6	26 40,4	3 13 21,65	7	86,56	+ 3,574	+ 0,0214	1023
326	κ¹ Ceti.	5	2 57,9	3 13 35,49	7	86,19	+ 3,124	+ 0,0094	1028
327	Arietis	5	28 38,9	3 13 41,04	7	86,94	+ 3,619	+ 0,0228	1025
328	60 Arietis	6.7	25 16,0	3 13 54,43	11	87,16	+ 3,545	+ 0,0204	1029
329	l Persei	5.6	42 55,9	3 14 4,53	6	87,92	+ 4,004	+ 0,0375	1026
330	Persei	6	48 40,5	3 14 4,57	8	87,95	+ 4,211	+ 0,0470	1024
331	τ¹ Arietis	5	20 45,0	3 14 52,60	5	87,14	+ 3,453	+ 0,0175	1034
332	Camelop.. . . .	6	64 11,5	3 15 7,69	7	88,00	+ 5,152	+ 0,0093	1030
333	κ² Ceti.	6	3 16,7	3 15 21,59	6	86,39	+ 3,130	+ 0,0095	1041
334	Persei	6.7	48 49,1	3 15 25,60	5	88,01	+ 4,223	+ 0,0469	1035
335	62 Arietis	6	27 12,7	3 15 35,68	9	86,94	+ 3,591	+ 0,0216	1040
336	τ² Arietis	5.6	20 20,9	3 16 25,42	7	86,56	+ 3,447	+ 0,0172	1045
337	α Persei	2	49 28,1	3 16 28,23	22	88,54	+ 4,255	+ 0,0483	1043
338	64 Arietis	6	24 20,0	3 17 48,79	5	86,67	+ 3,532	+ 0,0195	1052
339	65 Arietis	6	20 24,7	3 18 5,47	6	86,70	+ 3,451	+ 0,0171	1053
340	ο Tauri.	4.8	8 38,5	3 18 53,66	24	86,56	+ 3,227	+ 0,0115	1057
341	2 H. Camelop. . .	5.4	59 33,4	3 20 9,87	8	87,95	+ 4,816	+ 0,0772	1058
342	Persei	6	48 40,7	3 20 13,93	6	87,91	+ 4,238	+ 0,0462	1059
343	Persei	6.7	49 27,9	3 20 59,13	5	87,92	+ 4,274	+ 0,0476	1063
344	Camelop	5	58 29,8	3 21 7,97	6	88,07	+ 4,750	+ 0,0727	1062
345	ξ Tauri.	4.8	9 20,9	3 21 12,43	22	86,75	+ 3,242	+ 0,0117	1068
346	34 Persei	5	49 7,6	3 21 30,20	6	88,04	+ 4,262	+ 0,0468	1066
347	Camelop.. . . .	5	55 4,2	3 21 36,99	8	88,33	+ 4,548	+ 0,0611	1065
348	66 Arietis	6	22 25,5	3 22 0,69	7	85,89	+ 3,498	+ 0,0181	1069
349	σ Persei	5.4	47 36,9	3 22 49,24	3	88,00	+ 4,206	+ 0,0438	1071
350	Persei	6	47 43,5	3 22 51,00	5	88,02	+ 4,211	+ 0,0440	1072

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
351	Cassiopejae . .	6	72 58,4	3 23 10,00	8	89,04	+ 6,455	+ 0,2042	1067
352	Persei	6	47 29,1	3 23 47,79	6	88,05	+ 4,205	+ 0,0433	1078
353	Persei	6	47 38,9	3 24 22,32	9	87,82	+ 4,214	+ 0,0436	1081
354	s Tauri.	5	10 57,5	3 24 23,79	8	86,76	+ 3,274	+ 0,0123	1084
355	f Tauri.	4	12 33,5	3 24 47,99	17	87,11	+ 3,305	+ 0,0129	1087
356	36 Persei	6	45 41,0	3 24 49,16	6	87,76	+ 4,140	+ 0,0403	1083
357	Persei	6	47 34,6	3 25 33,50	4	88,01	+ 4,215	+ 0,0433	1089
358	t Tauri.	6	9 0,1	3 25 38,75	7	86,05	+ 3,239	+ 0,0114	1092
359	7 Tauri.	6	24 5,7	3 27 55,72	6	85,95	+ 3,543	+ 0,0188	1095
360	ψ Persei	5	47 49,6	3 28 40,40	6	87,88	+ 4,238	+ 0,0432	1099
361	Persei	6.7	31 18,7	3 28 47,31	6	88,05	+ 3,715	+ 0,0237	1101
362	9 Tauri.	6	22 50,8	3 30 29,94	5	85,94	+ 3,520	+ 0,0178	1107
363	Persei	6.7	42 13,2	3 30 33,98	7	87,08	+ 4,037	+ 0,0345	1105
364	10 Tauri.	4.5	0 3,1	3 31 15,75	6	85,89	+ 3,074	+ 0,0082	1112
365	Gr. 716.	6	62 51,6	3 32 36,80	21	88,22	+ 5,159	+ 0,0896	1111
366	Camelop.. . . .	6	59 36,8	3 33 39,00	7	87,91	+ 4,903	+ 0,0739	1117
367	Persei	6	37 13,5	3 33 58,39	5	86,89	+ 3,889	+ 0,0284	1123
368	12 Tauri.	6	2 41,9	3 34 7,50	6	85,89	+ 3,123	+ 0,0090	1128
369	11 Tauri.	6	24 58,4	3 34 12,16	6	85,97	+ 3,573	+ 0,0188	1126
370	δ Persei	3	47 26,1	3 35 5,61	14	88.59	+ 4,247	+ 0,0415	1129
371	40 Persei	5	33 36,7	3 35 24,27	6	86,85	+ 3,790	+ 0,0250	1132
372	Camelop.. . . .	6	66 51,4	3 35 36,55	6	88,04	+ 5,600	+ 0,1161	1127
373	Camelop.. . . .	6.5	62 59,8	3 36 25,35	8	87,92	+ 5,198	+ 0,0891	1133
374	o Persei	4	31 56,3	3 37 25,17	11	87,14	+ 3,750	+ 0,0234	1138
375	ν Persei	4	42 13,8	3 37 43,33	8	88,05	+ 4,059	+ 0,0336	1139
376	16 Tauri.	6.7	23 56,6	3 38 15,92	10	86,35	+ 3,556	+ 0,0179	1146
377	Persei	6	45 20,4	3 38 17,68	6	87,89	+ 4,175	+ 0,0376	1142
378	17 Tauri.	4.5	23 46,0	3 38 20,61	8	86,58	+ 3,552	+ 0,0179	1147
379	19 Tauri.	5	24 7,3	3 38 39,65	6	86,63	+ 3,561	+ 0,0180	1151
380	5 H. Camelop. . .	4.5	70 59,5	3 38 45,06	11	88,94	+ 6,239	+ 0,1600	1137
381	20 Tauri.	5	24 1,4	3 39 16,90	8	86,96	+ 3,560	+ 0,0179	1154
382	Camelop.. . . .	5	65 11,1	3 39 27,19	7	88,03	+ 5,438	+ 0,1014	1144
383	23 Tauri.	5	23 36,3	3 39 47,83	6	86,74	+ 3,551	+ 0,0177	1161
384	ω¹ Tauri.	6.5	5 42,3	3 39 49,90	4	85,89	+ 3,182	+ 0,0098	1162
385	η Tauri.	3	23 45,9	3 40 56,69	13	87,24	+ 3,556	+ 0,0177	1166

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
421	Camelop.. . . .	6	75 50,0	4 6 54,88	8	89,08	+ 7,737	+ 0,2316	1280
422	Camelop	6	61 34,4	4 7 12,13	6	88,08	+ 5,249	+ 0,0694	1286
423	*f* Persei	5	40 12,2	4 7 24,17	5	88,04	+ 4,069	+ 0,0265	1291
424	46 Tauri.	6	7 26,1	4 7 37,75	7	86,22	+ 3,227	+ 0,0093	1296
425	47 Tauri.	5	8 59,1	4 7 57,45	9	86,80	+ 3,259	+ 0,0098	1298
426	Camelop.. . . .	6.7	57 35,1	4 8 2,09	7	88,63	+ 4,932	+ 0,0553	1292
427	Camelop.. . . .	5	53 20,1	4 8 8,28	6	87,94	+ 4,659	+ 0,0448	1293
428	48 Tauri.	6	15 7,5	4 9 31,61	5	88,63	+ 3,393	+ 0,0117	1302
429	μ Tauri.	4.5	8 37,0	4 9 33,68	10	86,78	+ 3,252	+ 0,0095	1304
430	b^1 Persei	5	50 1,4	4 9 58,44	7	88,27	+ 4,487	+ 0,0382	1301
431	Camelop.. . . .	6	64 52,3	4 10 19,76	7	89,06	+ 5,603	+ 0,0838	1300
432	Persei	6	41 52,2	4 10 31,30	6	88,03	+ 4,137	+ 0,0276	1305
433	ω^2 Tauri.	6.5	20 18,4	4 10 48,92	10	86,51	+ 3,512	+ 0.0135	1311
534	Persei	6.5	49 46,8	4 10 57,91	7	88,21	+ 4,478	+ 0,0375	1307
435	b^2 Persei	6.5	50 39,2	4 11 51,46	6	87,91	+ 4,525	+ 0,0387	1314
436	Camelop	6.5	60 28,4	4 12 13,80	7	88,37	+ 5,177	+ 0,0630	1313
437	Persei	6.7	41 32,5	4 12 38,59	6	88,05	+ 4,129	+ 0,0271	1320
438	Camelop.. . . .	6	56 14,5	4 12 54,82	7	88,76	+ 4,858	+ 0,0499	1318
439	54 Persei	6.5	34 18,0	4 13 16,07	1	88,02	+ 3,887	+ 0,0208	1322
440	γ Tauri	4	15 21,7	4 13 31,97	13	86,71	+ 3,401	+ 0,0115	1328
441	φ Tauri.	5.6	27 5,2	4 13 35,36	9	87,22	+ 3,684	+ 0,0165	1326
442	*d* Persei	5	46 14,1	4 13 35,88	6	87,99	+ 4,321	+ 0,0319	1323
443	*h* Tauri.	6	13 46,1	4 13 46,07	5	86,12	+ 3,366	+ 0,0109	1330
444	58 Tauri.	6.7	14 49,8	4 14 22,10	6	88,40	+ 3,390	+ 0,0111	1332
445	χ Tauri.	6.5	25 22,1	4 15 53,36	6	87,90	+ 3,642	+ 0,0154	1341
446	Persei	6.7	42 10,2	4 15 56,48	6	87,98	+ 4,161	+ 0,0268	1339
447	δ Tauri.	4	17 17,0	4 16 35,41	27	88,15	+ 4,447	+ 0,0119	1346
448	63 Tauri.	6	16 31,2	4 17 6,30	8	86,64	+ 3,430	+ 0,0116	1350
449	55 Persei	6	33 52,5	4 17 20,89	7	87,95	+ 3,882	+ 0,0199	1349
450	56 Persei	6.7	33 42,3	4 17 29,52	4	88,05	+ 3,877	+ 0,0199	1352
451	δ^2 Tauri.	6	17 11,3	4 17 45,19	4	86,81	+ 3,446	+ 0,0118	1356
452	*r* Tauri.	5.6	9 12,2	4 17 52,03	5	86,14	+ 3,268	+ 0,0092	1357
453	Tauri.	6.7	18 47,3	4 18 32,51	5	88,09	+ 3,483	+ 0,0123	1361
454	κ^1 Tauri.	5.4	22 2,5	4 18 48,86	6	88,89	+ 3,562	+ 0,0135	1362
455	Tauri.	6	31 11,4	4 19 6,14	6	88,08	+ 3,805	+ 0,0180	1364

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
456	δ^2 Tauri.	5	17 40,5	4 19 7,50	8	86,46	+ 3,458	+ 0,0118	1365
457	υ^1 Tauri.	5.4	22 33,8	4 19 43,51	9	86,82	+ 3,576	+ 0,0137	1367
458	71 Tauri.	6	15 22,0	4 20 4,66	7	86,48	+ 3,406	+ 0,0109	1369
459	π Tauri.	5	14 27,8	4 20 23,45	7	87,62	+ 3,385	+ 0,0106	1370
460	υ^2 Tauri.	6	22 44,9	4 20 42,80	6	87,72	+ 3,581	+ 0,0136	1371
461	75 Tauri.	6.7	16 6,8	4 22 9,07	6	86,57	+ 3,424	+ 0,0110	1377
462	ε Tauri.	4.3	18 56,1	4 22 11,58	15	87,91	+ 3,490	+ 0,0120	1376
463	ϑ^1 Tauri.	4 5	15 43,0	4 22 17,37	6	86,61	+ 3,415	+ 0,0109	1380
464	ϑ^2 Tauri.	4.5	15 37,7	4 22 22,86	7	86,37	+ 3,413	+ 0,0109	1381
465	b Tauri.	6.5	12 48,2	4 22 40,41	6	88,09	+ 3,349	+ 0,0100	1384
466	44 Eridani	6	1 8,2	4 22 50,83	5	86,58	+ 3,097	+ 0,0070	1386
467	1 Camelop. sq. .	6.7	53 40,3	4 23 19,16	26	88,49	+ 4,731	+ 0,0406	1382
468	80 Tauri.	6.7	15 23,8	4 23 52,29	8	86,76	+ 3,409	+ 0,0106	1390
469	Tauri.	5	15 57,2	4 24 15,84	4	87,32	+ 3,422	+ 0,0109	1391
470	81 Tauri.	6.7	15 27,1	4 24 22,41	10	86,81	+ 3,410	+ 0,0106	1392
471	83 Tauri.	6	13 29,1	4 24 25,73	8	86,76	+ 3,366	+ 0,0100	1393
472	85 Tauri.	6	15 36,9	4 25 34,74	5	85,97	+ 3,415	+ 0,0105	1402
473	Persei	6.7	42 47,9	4 25 37,15	6	88,06	+ 4,207	+ 0,0254	1397
474	m Persei	6	42 49,7	4 25 40,54	6	88,06	+ 4,208	+ 0,0254	1398
475	ϱ Tauri.	5	14 36,7	4 27 36,29	6	86,01	+ 3,393	+ 0,0101	1409
476	ε Persei	5	41 2,3	4 29 4,06	6	87,83	+ 4,146	+ 0,0231	1414
477	α Tauri.	1	16 17,2	4 29 36,49	34	86,81	+ 3,433	+ 0,0105	1420
478	d Tauri.	5.4	9 56,1	4 29 36,53	5	85,95	+ 3,289	+ 0,0086	1421
479	ν Eridani.	3.4	— 3 34,7	4 30 49,34	2	90,02	+ 2,995	+ 0,0058	1429
480	3 Camelop. . . .	6	52 51,6	4 31 14,91	7	87,98	+ 4,707	+ 0,0365	1425
481	2 Camelop. . . .	6	53 15,3	4 31 15,12	7	87,93	+ 4,731	+ 0,0371	1424
482	49 Eridani	6.5	0 46,5	4 31 33,60	4	86,19	+ 3,089	+ 0,0066	1431
483	c^1 Tauri.	5.4	12 17,4	4 32 0,48	8	86,30	+ 3,343	+ 0,0092	1434
484	σ^1 Tauri.	5.6	15 34,9	4 32 52,33	7	86,75	+ 3,419	+ 0,0099	1436
485	σ^2 Tauri.	5	15 42,0	4 32 58,98	6	86,88	+ 3,422	+ 0,0100	1437
486	c^2 Tauri.	6.5	11 58,9	4 33 55,87	6	85,94	+ 3,336	+ 0,0089	1442
487	Gr. 848	6.7	75 44,4	4 34 2,33	10	88,89	+ 7,967	+ 0,1845	1428
488	Tauri.	6.5	28 24,1	4 34 26,73	4	85,97	+ 3,746	+ 0,0147	1444
489	59 Persei	6	43 9,3	4 35 6,23	6	87,97	+ 4,241	+ 0,0236	1445
490	τ Tauri.	4.5	22 44,7	4 35 38,51	24	87,20	+ 3,595	+ 0,0121	1449

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
491	Aurigae.	6.7	32 39,5	4 36 41,76	5	86,69	+ 3,873	+ 0,0162	1452
492	Tauri.	6	10 56,4	4 38 19,96	6	85,91	+ 3,315	+ 0,0084	1460
493	4 Camelop. . . .	6.5	56 33,6	4 38 50,37	26	88,62	+ 4,971	+ 0,0404	1456
494	Camelop. . . .	6	55 24,3	4 39 5,79	5	87,91	+ 4,891	+ 0,0380	1459
495	Camelop. . . .	6	67 58,4	4 39 49,35	8	88,57	+ 6,177	+ 0,0812	1457
496	Tauri.	6	18 32,1	4 39 51,50	7	85,97	+ 3,494	+ 0,0103	1468
497	Camelop. . . .	6	63 19,0	4 41 47,61	7	88,06	+ 5,580	+ 0,0572	1470
498	Aurigae.	6	32 23,7	4 42 12,14	5	86,86	+ 3,872	+ 0,0152	1475
499	1 Aurigae.	6	37 17,6	4 42 30,48	6	86,99	+ 4,033	+ 0,0178	1476
500	Persei	6	48 33,0	4 42 53,25	6	87,98	+ 4,501	+ 0,0270	1477
501	9 Camelop. . . .	4.5	66 9,3	4 43 7,01	18	88,29	+ 5,928	+ 0,0683	1474
502	96 Tauri.	6	15 42,7	4 43 26,54	6	85,95	+ 3,428	+ 0,0092	1485
503	π^1 Orionis.	3.4	6 46,1	4 43 52,02	6	85,95	+ 3,222	+ 0,0071	1486
504	π^2 Orionis.	5.4	8 42,7	4 44 37,05	7	86,41	+ 3,266	+ 0,0074	1491
505	*i* Tauri.	5.6	18 39,1	4 44 56,30	8	86,81	+ 3,500	+ 0,0099	1493
506	2 Aurigae.	5	36 31,0	4 45 16,18	5	86,98	+ 4,010	+ 0,0168	1492
507	π^3 Orionis.	4.5	5 25,0	4 45 20,82	12	86,83	+ 3,193	+ 0,0067	1495
508	5 Camelop. . . .	6	55 4,6	4 46 3,71	7	88,31	+ 4,889	+ 0,0346	1494
509	o^1 Orionis.	5.6	14 4,0	4 46 18,61	7	86,26	+ 3,390	+ 0,0085	1500
510	5 Orionis.	6	2 19,5	4 47 38,61	11	86,16	+ 3,124	+ 0,0061	1508
511	6 Camelop. . . .	6	55 38,8	4 47 45,12	7	88,00	+ 4,932	+ 0,0349	1501
512	Camelop. . . .	6	74 5,9	4 48 23,21	12	89,25	+ 7,538	+ 0,1299	1496
513	7 Camelop. . . .	5	53 34,5	4 48 28,09	6	87,96	+ 4,797	+ 0,0514	1504
514	π^5 Orionis.	4	2 15,6	4 48 31,31	14	86,34	+ 3,123	+ 0,0060	1514
515	*g* Orionis.	6	11 14,7	4 48 40,79	8	86,94	+ 3,325	+ 0,0077	1515
516	π^4 Orionis.	5	9 58,5	4 48 50,49	6	87,56	+ 3,296	+ 0,0074	1516
517	Orionis.	6	0 17,3	4 49 11,80	5	86,81	+ 3,079	+ 0,0057	1519
518	Tauri.	6	24 25,0	4 49 33,60	6	87,38	+ 3,651	+ 0,0110	1518
519	o^2 Orionis.	5	13 20,4	4 50 11,15	6	88,19	+ 3,375	+ 0,0081	1525
520	Camelop. . . .	6	73 36,0	4 50 30,83	7	89,06	+ 7,408	+ 0,1196	1509
521	Camelop.. . . .	6	73 54,2	4 50 48,29	9	89,32	+ 7,496	+ 0,1231	1510
522	8 Camelop. . . .	6.7	52 59,1	4 51 0,66	6	87,99	+ 4,766	+ 0,0295	1524
523	Tauri.	6	16 58,8	4 51 1,13	11	86,69	+ 3,463	+ 0,0087	1526
524	99 Tauri.	6	23 46,6	4 51 8,21	3	87,03	+ 3,635	+ 0,0106	1527
525	*k* Tauri.	6.5	24 52,8	4 51 25,51	6	86,63	+ 3,665	+ 0,0110	1528

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
526	4 Aurigae.	6	37 43,4	4 51 47,42	6	88,06	+ 4,061	+ 0,0165	1530
527	5 Aurigae.	6.7	39 13,7	4 52 44,67	6	87,57	+ 4,117	+ 0,0169	1534
528	π^6 Orionis.	5.4	1 32,7	4 52 50,89	8	85,96	+ 3,107	+ 0,0057	1538
529	10 Camelop.. . . .	4	60 16,8	4 53 38,09	11	87,86	+ 5,317	+ 0,0403	1536
530	ε Aurigae.	var.	43 39,6	4 54 4,47	2	89,07	+ 4,296	+ 0,0194	1540
531	ζ Aurigae.	4	40 54,9	4 54 47,33	7	87,77	+ 4,184	+ 0,0174	1541
532	ι Tauri.	5	21 25,9	4 56 31,19	25	86,60	+ 3,577	+ 0,0093	1551
533	11 Camelop.. . . .	5	58 49,1	4 56 34,81	8	88,01	+ 5,198	+ 0,0365	1546
534	12 Camelop.. . . .	6	58 52,1	4 56 37,94	7	88,03	+ 5,202	+ 0,0366	1547
535	9 Aurigae.	5	51 27,0	4 58 3,92	7	88,04	+ 4,690	+ 0,0251	1554
536	11 Orionis.	6	15 15,0	4 58 17,02	6	85,95	+ 3,424	+ 0,0077	1557
537	Camelop.. . . .	5.6	73 48,2	4 58 30,24	8	88,93	+ 7,512	+ 0,1093	1549
538	η Aurigae.	4.3	41 5,1	4 58 48,05	5	89,27	+ 4,197	+ 0,0166	1558
539	m Tauri.	5.6	18 29,8	5 0 56,78	6	86,32	+ 3,506	+ 0,0082	1568
540	l Tauri.	6.5	20 16,3	5 1 17,88	6	86,21	+ 3,550	+ 0,0086	1570
541	105 Tauri.	6	21 33,5	5 1 20,86	7	87,65	+ 3,584	+ 0,0088	1571
542	103 Tauri.	6	24 7,2	5 1 24,52	5	88,91	+ 3,652	+ 0,0096	1572
543	i Orionis.	6	8 21,2	5 1 53,55	6	85,95	+ 3,263	+ 0,0062	1584
544	Aurigae.	6	46 49,5	5 2 31,56	6	88,02	+ 4,453	+ 0,0195	1582
545	h Orionis.	6	9 41,2	5 3 16,61	6	86,01	+ 3,294	+ 0,0063	1590
546	14 Camelop.. . . .	6	62 33,3	5 3 17,12	7	88,03	+ 5,569	+ 0,0409	1583
547	15 Orionis.	5.6	15 27,4	5 3 24,15	4	86,50	+ 3,431	+ 0,0074	1591
548	19 H. Camelop.. .	5	79 6,2	5 4 26,12	6	89,41	+ 9,813	+ 0,2026	1565
549	Camelop. . . .	6	73 8,4	5 4 39,23	8	89,06	+ 7,357	+ 0,0924	1585
550	μ Aurigae.	6.5	38 21,2	5 5 53,93	3	87,03	+ 4,101	+ 0,0137	1602
551	ϱ Orionis.	5	2 43,8	5 7 32,39	7	85,94	+ 3,135	+ 0,0050	1611
552	14 Aurigae.	5.6	32 33,6	5 8 14,59	5	86,61	+ 3,905	+ 0,0110	1614
553	12 Aurigae.	6	46 17,4	5 8 18,40	6	88,02	+ 4,436	+ 0,0177	1609
554	α Aurigae.	1	45 53,1	5 8 33,73	15	88,17	+ 4,417	+ 0,0170	1613
555	Camelop. . . .	6	78 18,1	5 8 51,52	12	89,33	+ 9,369	+ 0,1648	1598
556	18 Orionis.	6	11 13,0	5 9 57,54	6	85,98	+ 3,331	+ 0,0060	1624
557	16 Aurigae.	5	33 15,3	5 10 57,54	6	86,69	+ 3,929	+ 0,0107	1627
558	λ Aurigae.	5	40 0,1	5 11 24,15	6	87,76	+ 4,169	+ 0,0132	1631
559	Camelop. . . .	6	78 11,9	5 11 33,32	10	89,32	+ 9,327	+ 0,1541	1610
560	Camelop. . . .	6	77 52,5	5 12 30,10	9	89,06	+ 9,164	+ 0,1440	1619

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
561	*n* Tauri.	6	21 58,9	5 12 40,07	4	86,00	+ 3,601	+ 0,0076	1637
562	19 Aurigae	5.6	33 50,6	5 12 45,91	8	87,00	+ 3,950	+ 0,0106	1636
563	21 Orionis.	6.5	2 28,9	5 13 26,95	8	85,93	+ 3,129	+ 0,0047	1646
564	ϱ Aurigae	6.5	41 41,6	5 14 1,29	6	88,08	+ 4,240	+ 0,0133	1645
565	16 Camelop.. . . .	6.5	57 26,2	5 14 2,69	7	87,98	+ 5,124	+ 0,0254	1642
566	Orionis.	6	8 19,1	5 15 44,35	5	86,01	+ 3,264	+ 0,0052	1656
567	*m* Orionis.	5.6	3 26,3	5 17 3,14	6	85,96	+ 3,151	+ 0,0046	1665
568	σ Aurigae	6	37 16,9	5 17 10,54	4	87,04	+ 4,073	+ 0,0108	1663
569	111 Tauri.	6.5	17 16,8	5 18 0,24	10	86,44	+ 3,481	+ 0,0062	1671
570	ψ^1 Orionis.	5	1 44,7	5 19 2,20	5	86,62	+ 3,113	+ 0,0043	1685
571	γ Orionis.	2	6 15,0	5 19 13,82	21	87,42	+ 3,217	+ 0,0047	1687
572	β Tauri.	2	28 30,8	5 19 20,34	2	86,43	+ 3,788	+ 0,0082	1681
573	Aurigae	6	34 17,7	5 19 31,69	6	88,10	+ 3,970	+ 0,0094	1683
574	113 Tauri	6	16 36,1	5 19 44,35	5	87,29	+ 3,465	+ 0,0059	1689
575	17 Camelop.. . . .	6	62 58,4	5 19 46,91	20	88,11	+ 5,653	+ 0,0304	1676
576	φ Aurigae	5.6	34 22,9	5 20 21,44	6	88,10	+ 3,974	+ 0,0093	1690
577	115 Tauri.	6	17 52,0	5 20 45,08	9	87,27	+ 3,497	+ 0,0060	1692
578	ο Tauri.	6	21 50,6	5 21 1,80	5	88,49	+ 3,601	+ 0,0066	1695
579	ψ^2 Orionis.	5	3 0,0	5 21 4,41	6	86,69	+ 3,142	+ 0,0043	1700
580	116 Tauri.	6	15 46,8	5 21 26,32	6	86,86	+ 3,445	+ 0,0056	1701
581	117 Tauri.	6.7	17 8,8	5 21 38,51	7	86,39	+ 3,479	+ 0,0057	1702
582	18 Camelop.. . . .	6.7	57 8,6	5 23 8,51	7	88,02	+ 5,116	+ 0,0203	1705
583	*A* Orionis.	5.6	5 51,3	5 24 53,91	7	85,94	+ 3,208	+ 0,0043	1722
584	Gr. 966.	6.7	74 58,2	5 25 1,17	17	89,27	+ 7,993	+ 0,0728	1706
585	n^1 Orionis.	6	3 12,5	5 25 28,32	6	86,02	+ 3,147	+ 0,0041	1725
586	χ Aurigae	5	32 6,6	5 25 34,13	9	86,79	+ 3,902	+ 0,0078	1723
587	119 Tauri.	6.5	18 30,7	5 25 45,80	12	86,32	+ 3,515	+ 0,0056	1726
588	δ Orionis.	var.	— 0 22,9	5 26 23,26	3	89,04	+ 3,064	+ 0,0038	1730
589	19 Camelop.. . . .	6.7	64 4,9	5 26 36,29	8	88,02	+ 5,795	+ 0,0273	1721
590	120 Tauri.	6	18 27,7	5 27 4,84	4	87,02	+ 3,514	+ 0,0054	1734
591	Aurigae	6	47 38,5	5 27 57,66	6	87,84	+ 4,525	+ 0,0119	1736
592	n^2 Orionis.	6	3 41,5	5 28 29,48	8	86,62	+ 3,158	+ 0,0039	1743
593	121 Tauri.	6	23 57,9	5 28 44,06	5	86,82	+ 3,661	+ 0,0061	1742
594	φ^1 Orionis.	5	9 24,9	5 28 46,86	14	86,54	+ 3,292	+ 0,0043	1748
595	λ Orionis.	3.4	9 51,6	5 29 4,76	9	86,25	+ 3,303	+ 0,0043	1749

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
596	22 Camelop....	6	56 17,8	5 29 47,99	7	88,05	+ 5,060	+ 0,0162	1744
597	ε Orionis.....	2	— 1 16,4	5 30 37,86	4	89,02	+ 3,043	+ 0,0035	1765
598	122 Tauri......	6	16 58,3	5 30 40,68	8	86,65	+ 3,477	+ 0,0048	1764
599	φ^2 Orionis.....	5.4	9 13,8	5 30 51,74	10	86,08	+ 3,288	+ 0,0042	1766
600	ζ Tauri......	3.4	21 4,5	5 31 4,25	17	88,91	+ 3,584	+ 0,0052	1767
601	Camelop....	6	65 38,2	5 31 24,96	5	88,08	+ 6,002	+ 0,0261	1751
602	26 Aurigae	6	30 25,6	5 31 34,37	6	87,02	+ 3,852	+ 0,0064	1768
603	Aurigae	6.7	29 9,0	5 32 18,65	4	87,05	+ 3,814	+ 0,0061	1772
604	Aurigae	6.7	53 26,2	5 32 24,95	6	87,98	+ 4,862	+ 0,0132	1769
605	125 Tauri......	6	25 50,1	5 32 55,19	9	86,55	+ 3,715	+ 0,0057	1778
606	σ Orionis.....	4.3	— 2 39,9	5 33 13,37	1	87,05	+ 3,011	+ 0,0033	1780
607	ω Orionis.....	5	4 3,5	5 33 22,69	8	85,96	+ 3,167	+ 0,0036	1782
608	24 Camelop....	6.7	56 31,4	5 33 41,90	6	88,04	+ 5,081	+ 0,0145	1776
609	23 Camelop....	6	61 25,3	5 34 1,53	5	88,10	+ 5,511	+ 0,0184	1777
610	126 Tauri......	5	16 28,6	5 34 56,28	5	86,03	+ 3,466	+ 0,0043	1792
611	b Orionis.....	6.5	1 25,2	5 36 47,34	7	85,94	+ 3,106	+ 0,0032	1806
612	26 Camelop....	5.6	56 4,2	5 37 14,12	7	88,03	+ 5,050	+ 0,0124	1797
613	ο Aurigae	6.5	49 46,6	5 37 22,67	26	88,67	+ 4,645	+ 0,0040	1804
614	128 Tauri	6	16 2,3	5 38 33,03	5	86,04	+ 3,455	+ 0,0039	1810
615	129 Tauri......	6.7	15 46,7	5 40 25,98	8	86,64	+ 3,449	+ 0,0037	1821
616	Orionis.....	6	9 28,9	5 40 49,81	5	85,97	+ 3,295	+ 0,0034	1826
617	Orionis.....	6	1 7,8	5 40 54,59	5	86,17	+ 3,099	+ 0,0030	1831
618	131 Tauri......	6	14 26,8	5 40 57,26	5	87,06	+ 3,416	+ 0,0036	1827
619	130 Tauri......	6	17 41,2	5 41 1,35	15	86,61	+ 3,497	+ 0,0038	1828
620	Camelop....	6	68 26,3	5 41 5,60	8	89,49	+ 6,445	+ 0,0214	1813
621	29 Camelop....	5.6	56 52,9	5 41 11,08	7	87,75	+ 5,115	+ 0,0108	1818
622	133 Tauri......	6	13 51,5	5 41 28,59	6	88,27	+ 3,401	+ 0,0035	1834
623	τ Aurigae	5	39 8,5	5 41 33,20	6	88,10	+ 4,157	+ 0,0058	1830
624	52 Orionis.....	6.5	6 24,9	5 42 5,63	6	86,90	+ 3,222	+ 0,0111	1839
625	Aurigae	6.7	51 28,8	5 42 11,90	6	88,04	+ 4,747	+ 0,0083	1832
626	132 Tauri......	5.6	24 31,8	5 42 15,96	6	88,82	+ 3,681	+ 0,0041	1837
627	30 Camelop....	6	58 55,9	5 42 35,54	7	88,12	+ 5,285	+ 0,0111	1833
628	134 Tauri......	5.6	12 36,9	5 43 22,16	6	86,07	+ 3,371	+ 0,0034	1846
629	υ Aurigae	5	37 16,4	5 43 32,38	6	87,25	+ 4,086	+ 0,0051	1844
630	ν Aurigae	4	39 6,9	5 43 51,88	4	88,83	+ 4,157	+ 0,0053	1845

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
631	135 Tauri.	6	14 16,4	5 44 13,41	17	86,47	+ 3,412	+ 0,0033	1852
632	31 Camelop.. . . .	5.6	59 51,7	5 45 6,69	7	88,07	+ 5,371	+ 0,0101	1849
633	Aurigae	6.7	33 53,2	5 45 23,30	5	87,04	+ 3,969	+ 0,0044	1857
634	ξ Aurigae	5	55 40,8	5 45 37 65	6	88,04	+ 5,027	+ 0,0081	1854
635	137 Tauri.	6	14 8,6	5 46 7,47	3	86,05	+ 3,409	+ 0,0031	1862
636	136 Tauri.	5	27 35,1	5 46 24,84	7	86,07	+ 3,770	+ 0,0038	1863
637	56 Orionis.	6.5	1 49,7	5 46 43,78	6	85,95	+ 3,115	+ 0,0026	1869
638	Aurigae	6.7	51 47,0	5 47 29,96	6	88,05	+ 4,768	+ 0,0062	1866
639	χ¹ Orionis.	5.4	20 15,3	5 47 52,18	6	86,72	+ 3,565	+ 0,0032	1876
640	χ² Orionis.	6	19 43,7	5 48 26,01	6	86,54	+ 3,551	+ 0,0031	1880
641	α Orionis.	var.	7 23,2	5 49 12,98	30	86,94	+ 3,246	+ 0,0027	1883
642	Camelop.. . . .	6	67 0,1	5 49 24,22	6	88,17	+ 6,219	+ 0,0109	1874
643	δ Aurigae	4.5	54 16,5	5 50 28,12	3	88,00	+ 4,930	+ 0,0054	1885
644	Aurigae	6.7	55 18,7	5 50 35,51	7	88,04	+ 5,003	+ 0,0056	1887
645	Aurigae	6	54 32,2	5 50 43,61	7	88,06	+ 4,948	+ 0,0054	1888
646	Camelop.. . . .	6	66 53,5	5 50 53,94	8	88,86	+ 6,203	+ 0,0095	1881
647	139 Tauri.	5.6	25 56,4	5 51 10,14	6	86,05	+ 3,722	+ 0,0030	1896
648	β Aurigae	2	44 56,1	5 51 27,64	4	89,38	+ 4,405	+ 0,0039	1895
649	π Aurigae	5	45 55,6	5 51 46,35	5	87,70	+ 4,453	+ 0,0038	1897
650	ϑ Aurigae	3	37 12,2	5 52 13,21	10	87,25	+ 4,087	+ 0,0032	1900
651	36 Aurigae	6	47 53,6	5 52 37,87	6	88,16	+ 4,551	+ 0,0038	1902
652	59 Orionis.	6	1 49,5	5 52 41,72	6	85,97	+ 3,115	+ 0,0023	1908
653	Orionis.	6	12 47,8	5 52 41,89	7	86,08	+ 3,376	+ 0,0024	1907
654	60 Orionis.	6.5	0 32,5	5 53 10,26	7	86,46	+ 3,085	+ 0,0023	1913
655	Aurigae	6	49 54,2	5 54 15,87	5	88,04	+ 4,660	+ 0,0034	1914
656	141 Tauri.	6	22 23,8	5 55 3,21	4	86,08	+ 3,623	+ 0,0023	1925
657	38 Aurigae	6	42 54,9	5 55 22,30	6	87,25	+ 4,315	+ 0,0026	1923
658	Aurigae	6.7	51 34,5	5 55 45,83	7	88,05	+ 4,758	+ 0,0028	1924
659	μ Orionis.	5.4	9 38,8	5 56 19,83	6	86,00	+ 3,300	+ 0,0021	1928
660	χ³ Orionis.	6	19 41,5	5 56 56,74	8	86,55	+ 3,551	+ 0,0021	1934
661	39 Aurigae	6.7	42 59,4	5 57 8,87	7	87,52	+ 4,319	+ 0,0022	1931
662	χ⁴ Orionis.	5	20 8,4	5 57 23,25	6	86,39	+ 3,563	+ 0,0021	1939
663	1 Geminorum . .	5	23 16,1	5 57 26,00	7	86,60	+ 3,647	+ 0,0021	1938
664	40 Aurigae	6	38 29,5	5 59 0,22	8	87,04	+ 4,136	+ 0,0017	1942
665	66 Orionis.	6	4 9,9	5 59 9,68	9	87,22	+ 3,170	+ 0,0019	1945

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
666	37 Camelop.	6	58 56,9	6 0 16,74	7	87,90	+ 5,293	+ 0,0009	1943
667	ν Orionis.	5.4	14 46,9	6 1 17,49	30	86,73	+ 3,425	+ 0,0017	1958
668	36 Camelop.	6.5	65 44,3	6 1 46,82	15	88,61	+ 6,039	+ 0,0005	1952
669	3 Geminorum . .	6.7	23 7,8	6 3 3,26	5	86,01	+ 3,664	+ 0,0014	1971
670	41 Aurigae	6	48 44,0	6 3 11,17	6	88,08	+ 4,596	+ 0,0002	1963
671	5 Geminorum . .	6	24 26,6	6 4 47,61	5	86,01	+ 3,680	+ 0,0011	1981
672	68 Orionis.	6	19 48,9	6 5 30,41	5	86,05	+ 3,554	+ 0,0010	1986
673	6 Geminorum . .	6	22 55,9	6 5 39,04	4	87,03	+ 3,638	+ 0,0009	1987
674	ξ Orionis.	5.4	14 14,0	6 5 41,09	5	86,04	+ 3,412	+ 0,0012	1990
675	f^1 Orionis.	6.5	16 9,3	6 5 42,71	8	86,44	+ 3,460	+ 0,0011	1989
676	40 Camelop.	6	60 1,7	6 5 47,64	10	87,94	+ 5,390	— 0,0027	1979
677	22 H. Camelop. . .	5.4	69 21,4	6 6 43,42	6	88,79	+ 6,620	— 0,0076	1980
678	Camelop.	6	69 36,4	6 7 24,18	10	88,63	+ 6,667	— 0,0087	1985
679	1 Lyncis	6	61 33,0	6 7 46,23	9	88,08	+ 5,539	— 0,0044	1992
680	η Geminorum . .	var.	22 32,3	6 8 14,31	9	87,28	+ 3,627	+ 0,0007	2002
681	κ Aurigae	5.4	29 32,3	6 8 22,24	6	86,07	+ 3,830	+ 0,0008	2001
682	71 Orionis.	6.5	19 11,6	6 8 22,57	6	86,00	+ 3,538	+ 0,0007	2004
683	f^2 Orionis.	6.5	16 10,6	6 9 4,59	8	86,09	+ 3,460	+ 0,0009	2009
684	42 Aurigae	6	46 27,6	6 9 22,93	5	87,08	+ 4,478	— 0,0017	2008
685	k^1 Orionis.	6	12 35,1	6 9 34,16	7	87,02	+ 3,371	+ 0,0009	2012
686	2 Lyncis	5.4	59 3,0	6 9 55,14	5	87,64	+ 5,300	— 0,0049	2007
687	43 Aurigae	6	46 24,1	6 10 4,86	6	87,07	+ 4,475	— 0,0019	2010
688	k^2 Orionis.	5.6	12 18,1	6 10 16,01	10	86,46	+ 3,364	+ 0,0008	2017
689	l Orionis.	6	9 58,9	6 11 2,78	6	85,99	+ 3,308	+ 0,0009	2022
690	3 Lyncis	6	61 48,6	6 11 56,82	8	88,05	+ 5,564	— 0,0074	2019
691	4 Lyncis	6	59 25,1	6 12 18,87	7	88,10	+ 5,332	— 0,0064	2020
692	45 Aurigae	6	53 30,1	6 12 49,96	6	87,40	+ 4,877	— 0,0045	2024
693	μ Geminorum . .	3	22 34,2	6 16 18,32	13	86,88	+ 3,627	— 0,0004	2047
694	ψ^1 Aurigae	5.6	49 20,6	6 16 25,61	24	88,23	+ 4,625	— 0,0047	2044
695	5 Lyncis	6	58 28,6	6 17 12,60	6	87,87	+ 5,246	— 0,0088	2045
696	Monocerotis . .	6	3 49,1	6 17 30,71	6	86,08	+ 3,161	+ 0,0007	2057
697	8 Monocerotis . .	5.4	4 38,9	6 17 56,38	25	87,33	+ 3,181	+ 0,0006	2059
698	15 Geminorum . .	6	20 51,4	6 21 13,25	5	86,05	+ 3,580	— 0,0009	2080
699	6 Lyncis	6	58 14,5	6 21 13,90	7	87,75	+ 5,224	— 0,0109	2074
700	16 Geminorum . .	6	20 33,7	6 21 24,22	6	86,11	+ 3,572	— 0,0009	2084

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
701	48 Aurigae.	6.5	30 33,6	6 21 29,93	5	87,04	+ 3,859	— 0,0021	2082
702	77 Orionis.	6	0 21,9	6 21 34,90	5	85,99	+ 3,081	+ 0,0007	2086
703	47 Aurigae.	6.7	46 45,3	6 21 49,98	8	87,72	+ 4,488	— 0,0057	2081
704	ν Geminorum . .	5.4	20 16,9	6 22 25,97	8	86,58	+ 3,564	— 0,0010	2090
705	10 Monocerotis . .	5	— 4 41,7	6 22 31,69	5	90,10	+ 2,963	+ 0,0009	2094
706	Camelop.	6	78 4,9	6 23 23,20	10	89,47	+ 9,376	— 0,0764	2069
707	Camelop.	6.7	73 46,7	6 24 1,51	9	88,35	+ 7,643	— 0,0441	2083
708	7 Lyncis	6	56 26,0	6 25 23,58	7	88,03	+ 5,001	— 0,0118	2107
709	Aurigae.	6	32 32,0	6 26 16,54	6	86,71	+ 3,922	— 0,0033	2110
710	12 Monocerotis . .	5	4 56,0	6 26 28,98	4	86,01	+ 3,187	0,0000	2123
711	9 Lyncis	6.7	56 28,3	6 26 45,39	7	88,06	+ 5,077	— 0,0126	2114
712	13 Monocerotis . .	5.4	7 24,8	6 26 58,33	6	86,12	+ 3,245	— 0,0002	2126
713	23 H. Camelop. . .	5.6	79 40,9	6 27 27,08	11	89,07	+ 10,362	— 0,1157	2095
714	8 Lyncis	6	61 34,6	6 27 38,21	8	89,31	+ 5,525	— 0,0180	2120
715	49 Aurigae.	6.5	28 6,4	6 28 16,40	6	86,55	+ 3,781	— 0,0028	2133
716	11 Lyncis	6	56 56,7	6 28 17,28	7	88,11	+ 3,511	— 0,0137	2128
717	14 Monocerotis . .	6	7 39,4	6 28 48,96	6	86,07	+ 3,251	— 0,0004	2144
718	Aurigae.	6.7	38 32,0	6 28 59,08	6	88,50	+ 4,129	— 0,0052	2139
719	41 Camelop.	6.7	62 1,0	6 30 20,90	8	88,04	+ 5,567	— 0,0203	2143
720	51 Aurigae.	6.7	39 29,2	6 31 2,27	1	90,06	+ 4,164	— 0,0060	2155
721	ψ² Aurigae.	6	39 59,7	6 31 9,54	9	88,00	+ 4,184	— 0,0062	2156
722	γ Geminorum . .	2.3	16 29,5	6 31 21,45	8	86,46	+ 3,465	— 0,0015	2163
723	ψ³ Aurigae.	5	42 35,1	6 31 28,59	6	88,30	+ 4,289	— 0,0071	2159
724	54 Aurigae.	6	28 21,6	6 32 37,07	5	86,07	+ 3,787	— 0,0035	2170
725	S Monocerotis . .	var.	9 59,8	6 34 55,22	22	87,59	+ 3,305	— 0,0011	2185
726	ψ⁴ Aurigae.	5	44 37,8	6 35 4,74	6	87,75	+ 4,377	— 0,0089	2182
727	Monocerotis . .	6.7	0 35,8	6 35 26,06	6	86,09	+ 3,086	— 0,0001	2189
728	26 Geminorum . .	6.5	17 45,1	6 36 0,04	5	86,09	+ 3,495	— 0,0022	2191
729	12 Lyncis	5	59 33,1	6 36 31,02	7	88,03	+ 5,318	— 0,0210	2187
730	ε Geminorum . .	3.4	25 14,4	6 37 9,78	3	86,40	+ 3,694	— 0,0036	2194
731	13 Lyncis	6	57 16,9	6 37 26,92	7	88,05	+ 5,126	— 0,0187	2192
732	30 Geminorum . .	5	13 20,3	6 37 47,09	6	86,07	+ 3,385	— 0,0018	2199
733	28 Geminorum . .	6	29 4,9	6 37 47,30	6	86,57	+ 3,806	— 0,0045	2197
734	ψ⁵ Aurigae.	6.5	43 41,2	6 38 48,53	13	88,30	+ 4,331	— 0,0095	2200
735	ξ Geminorum . .	4.3	13 0,8	6 39 6,97	9	86,52	+ 3,377	— 0,0018	2206

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
736	ψ^6 Aurigae.	6	48 54,3	6 39 16,41	6	88,03	+ 4,583	— 0,0125	2201
737	42 Camelop. . . .	5	67 41,5	6 39 28,80	7	88,11	+ 6,283	— 0,0402	2198
738	α Canis maj. . .	1	—16 34,0	6 40 18,42	1	86,04	+ 2,681	+ 0,0010	2213
739	16 Monocerotis . .	6	8 42,2	6 40 32,54	7	86,08	+ 3,274	— 0,0014	2211
740	17 Monocerotis . .	5	8 9,3	6 41 21,45	6	86,10	+ 3,261	— 0,0013	2216
741	43 Camelop. . . .	5.6	69 0,9	6 41 50,51	9	88,10	+ 6,500	— 0.0476	2209
742	18 Monocerotis . .	5	2 31,9	6 42 7,46	1	86,03	+ 3,131	— 0,0007	2222
743	14 Lyncis.	6	59 34,8	6 43 22,93	8	87,78	+ 5,309	— 0,0249	2220
744	33 Geminorum . .	6	16 19,6	6 43 29,90	6	86,10	+ 3,457	— 0,0026	2228
745	35 Geminorum . .	6.7	13 32,3	6 44 13,02	6	86,70	+ 3,389	— 0,0023	2230
746	*d* Geminorum . .	6	21 53,4	6 44 57,53	5	86,49	+ 3,599	— 0,0039	2233
747	Geminorum . .	6.7	23 43,9	6 45 19,42	5	86,52	+ 3,649	— 0,0043	2238
748	59 Aurigae.	6.7	39 0,0	6 45 27,39	5	88,93	+ 4,134	— 0,0091	2235
749	ϑ Geminorum . .	3.4	34 5,6	6 45 32,30	2	87,04	+ 3,960	— 0,0073	2237
750	ψ^8 Aurigae.	6	38 34,5	6 45 40,85	6	88,10	+ 4,118	— 0,0090	2239
751	61 Aurigae.	6	38 38,3	6 46 24,69	5	87,30	+ 4,119	— 0,0092	2241
752	15 Lyncis	5.4	58 34,0	6 47 45,09	23	87,93	+ 5,213	— 0,0258	2248
753	*e* Geminorum . .	5	13 19,0	6 48 26,32	8	86,07	+ 3,382	— 0,0027	2255
754	37 Geminorum . .	6.7	25 30,7	6 48 32,93	5	86,05	+ 3,696	— 0,0053	2254
755	Camelop. . . .	6.7	70 57,3	6 48 51,36	8	88,77	+ 6,858	— 0,0659	2247
756	16 Lyncis	5	45 14,2	6 49 35,46	6	87,03	+ 4,389	— 0,0135	2261
757	Monocerotis . .	6	10 46,7	6 54 53,71	5	86,04	+ 3,320	— 0,0028	2292
758	ω Geminorum . .	6	24 22,3	6 55 42,74	5	86,09	+ 3,660	— 0,0058	2299
759	Lyncis	6	59 57,8	6 56 18,45	7	87,61	+ 5,316	— 0,0330	2294
760	Lyncis	6	52 55,3	6 56 55,12	7	87,09	+ 4,787	— 0,0225	2300
761	Monocerotis . .	6	9 17,8	6 57 17,10	6	86,13	+ 3,285	— 0,0027	2304
762	Monocerotis . .	6	11 6,7	6 57 32,40	5	86,09	+ 3,327	— 0,0027	2306
763	ζ Geminorum . .	var.	20 43,9	6 57 35,05	14	86,86	+ 3,563	— 0,0051	2305
764	Geminorum . .	5.6	34 38,4	6 58 56,64	6	86,45	+ 3,966	— 0,0100	2314
765	Canis min. . .	6	9 21,1	6 59 37,61	8	86,11	+ 3,285	— 0,0029	2322
766	17 Lyncis	6	60 57,9	6 59 46,48	8	87,57	+ 5,400	— 0,0372	2312
767	45 Geminorum . .	6	16 6,3	7 2 3,53	5	86,03	+ 3,445	— 0,0045	2330
768	Lyncis	6	49 58,2	7 3 32,31	5	87,69	+ 4,603	—0,0217	2334
769	63 Aurigae.	5	39 30,0	7 4 5,32	20	87,91	+ 4,132	— 0,0135	2338
770	τ Geminorum . .	5.4	30 25,5	7 4 8,43	4	86,09	+ 3,827	— 0,0090	2340

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
771	47 Geminorum . .	6	27 2,2	7 4 33,81	5	86,03	+ 3,728	— 0,0078	2343
772	Lyncis	5.6	51 36,6	7 4 48,70	7	87,20	+ 4,694	— 0,0239	2341
773	48 Geminorum . .	6	24 18,7	7 5 45,47	5	86,08	+ 3,652	— 0,0072	2350
774	Canis min. . . .	6	5 50,2	7 5 59,39	7	86,13	+ 3,204	— 0,0027	2356
775	18 Lyncis	6	59 49,9	7 6 18,42	8	87,93	+ 5,277	— 0,0384	2349
776	51 Geminorum . .	6	16 20,7	7 7 3,29	5	86,03	+ 3,448	— 0,0050	2362
777	Lyncis	6	47 26,1	7 7 40,11	5	87,02	+ 4,465	— 0,0204	2361
778	Canis min. . . .	6	3 18,0	7 8 34,22	5	86,09	+ 3,146	— 0,0023	2373
779	Lyncis	6	52 19,5	7 8 55,69	8	87,07	+ 4,726	— 0,0263	2367
780	53 Geminorum . .	6.7	28 5,3	7 9 5,11	5	86,04	+ 3,754	— 0,0088	2374
781	Lyncis	6	49 39,6	7 10 10,47	7	87,66	+ 4,574	— 0,0234	2379
782	64 Aurigae	6	41 4,7	7 10 23,30	25	88,09	+ 4,183	— 0,0159	2381
783	λ Geminorum . .	4.3	16 44,3	7 11 46,29	14	86,36	+ 3,455	— 0,0055	2398
784	47 Camelop. . . .	6	60 6,3	7 12 39,02	8	88,07	+ 5,282	— 0,0424	2397
785	δ Geminorum . .	3.4	22 11,1	7 13 33,20	8	86,83	+ 3,590	— 0,0073	2410
786	19 Lyncis sq. . . .	5.6	55 29,3	7 13 53,38	36	87,72	+ 4,916	— 0,0331	2407
787	65 Aurigae	6	36 58,0	7 14 41,70	7	86,41	+ 4,026	— 0,0141	2416
788	56 Geminorum . .	6.5	20 39,1	7 15 27,49	6	86,04	+ 3,549	— 0,0073	2423
789	Monocerotis . .	6	0 23,1	7 16 24,79	6	86,25	+ 3,082	— 0,0022	2433
790	66 Aurigae	6	40 53,0	7 16 31,50	5	87,08	+ 4,166	— 0,0171	2429
791	A Geminorum . .	5.6	25 15,7	7 16 46,33	5	86,09	+ 3,668	— 0,0088	2431
792	21 Lyncis	5	49 25,7	7 18 24,85	5	87,04	+ 4,544	— 0,0257	2441
793	1 Canis min. . . .	6	11 53,1	7 18 51,53	5	86,03	+ 3,337	— 0,0048	2444
794	ι Geminorum . .	4	28 1,0	7 18 53,70	8	86,76	+ 3,742	— 0,0102	2442
795	Gr. 1308. . . .	6	68 41,3	7 19 25,94	17	88,48	+ 6,296	— 0,0842	2439
796	ε Canis min. . . .	6	9 29,5	7 19 38,18	6	86,13	+ 3,283	— 0,0043	2451
797	Geminorum . .	7	21 47,0	7 20 20,42	4	86,08	+ 3,574	— 0,0079	2455
798	β Canis min. . . .	3	8 30,6	7 21 11,14	12	87,80	+ 3,260	— 0,0041	2462
799	63 Geminorum . .	6.5	21 40,2	7 21 12,70	2	86,12	+ 3,571	· 0,0079	2460
800	22 Lyncis	6	49 53,9	7 21 34,78	6	87,04	+ 4,561	— 0,0273	2459
801	η Canis min. . . .	6	7 9,9	7 22 7,18	5	86,13	+ 3,230	— 0,0039	2465
802	γ Canis min. . . .	6	9 8,8	7 22 10,39	4	86,38	+ 3,274	— 0,0044	2468
803	b^1 Geminorum . .	5	28 20,6	7 22 29,36	5	86,04	+ 3,748	— 0,0108	2467
804	b^2 Geminorum . .	5	28 8,5	7 22 58,32	7	86,53	+ 3,741	— 0,0108	2469
805	6 Canis min. . . .	5	12 14,0	7 23 40,39	5	86,07	+ 3,343	— 0,0053	2473

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
806	Geminorum . .	6	28 8,3	7 23 49,41	7	86,98	+ 3,739	— 0,0109	2472
807	δ¹ Canis min. . . .	6	2 8,8	7 26 23,20	5	86,08	+ 3,119	— 0,0030	2480
808	68 Geminorum . .	6.5	16 3,8	7 27 19,85	5	86,24	+ 3,430	— 0,0067	2486
809	δ² Canis min. . .	6	3 31,5	7 27 25,66	7	86,44	+ 3,149	— 0,0033	2487
810	α Geminorum . .	2	32 7,7	7 27 34,67	3	88,37	+ 3,852	— 0,0134	2485
811	δ³ Canis min. . . .	6.7	3 36,6	7 28 29,64	6	86,11	+ 3,151	— 0,0034	2491
812	Lyncis.	6	46 25,3	7 28 32,55	6	87,04	+ 4,374	— 0,0250	2488
813	υ Geminorum . .	4.5	27 8,4	7 29 8,74	6	86,61	+ 3,707	— 0,0111	2493
814	70 Geminorum . .	6	35 17,7	7 31 19,73	5	86,86	+ 3,945	— 0,0160	2504
815	23 Lyncis	6.7	57 20,0	7 31 43,48	7	87,38	+ 4,993	— 0,0444	2501
816	25 Monocerotis . .	5.6	— 3 52,0	7 31 48,50	2	90,15	+ 2,989	— 0,0020	2513
817	ο Geminorum . .	5.6	34 50,1	7 31 59,15	4	86,16	+ 3,929	— 0,0158	2509
818	Lyncis	6	55 1,1	7 32 59,55	7	87,62	+ 4,828	— 0,0397	2512
819	f Geminorum . .	6	17 55,5	7 33 7,48	5	86,04	+ 3,470	— 0,0078	2519
820	α Canis min. . . .	1	5 30,4	7 33 32,85	16	86,44	+ 3,191	— 0,0041	2522
821	24 Lyncis	5.6	58 58,0	7 33 41,99	21	87,66	+ 5,111	— 0,0496	2516
822	Lyncis	6	50 41,6	7 35 44,26	8	87,34	+ 4,565	— 0,0330	2532
823	51 Camelop. . . .	6	65 43,1	7 36 8,90	8	90,14	+ 5,779	— 0,0786	2527
824	σ Geminorum . .	5	29 8,9	7 36 26,30	5	86,04	+ 3,753	— 0,0131	2540
825	49 Camelop. . . .	5.6	63 5,7	7 36 29,67	10	87,29	+ 5,477	— 0,0657	2533
826	c Geminorum . .	6	26 2,7	7 37 24,44	5	86,09	+ 3,668	— 0,0116	2549
827	κ Geminorum . .	4.3	24 39,7	7 37 48,42	14	86,85	+ 3,631	— 0,0110	2551
828	β Geminorum . .	1.2	28 17,5	7 38 35,29	9	86,20	+ 3,726	— 0,0128	2555
829	g Geminorum . .	6.5	18 46,7	7 39 45,41	6	86,13	+ 3,485	— 0,0086	2558
830	11 Canis min. . . .	5.6	11 2,1	7 40 12,87	6	86,08	+ 3,309	— 0,0060	2564
831	π Geminorum . .	6	33 41,1	7 40 24,88	6	87,14	+ 3,879	— 0,0163	2563
832	Lyncis	6.7	54 24,1	7 42 52,63	7	87,04	+ 4,758	— 0,0419	2576
833	ζ Canis min. . . .	5.6	2 2,8	7 45 59,79	5	86,09	+ 3,115	— 0,0038	2612
834	26 Lyncis	6.7	47 50,9	7 46 42,08	17	87,41	+ 4,392	— 0,0314	2609
835	φ Geminorum . .	6	27 3,0	7 46 45,98	6	86,09	+ 3,683	- 0,0131	2617
836	Gr. 1374. . . .	5.6	74 12,6	7 47 0,98	8	88,51	+ 7,294	— 0,1833	2596
837	Camelop. . . .	5	79 46,7	7 47 28,14	10	89,07	+ 9,688	— 0,4032	2590
838	52 Camelop. . . .	5.6	56 47,6	7 47 31,62	7	87,05	+ 4,894	— 0,0492	2616
839	Canis min. . . .	6	9 9,2	7 49 32,91	5	86,09	+ 3,263	— 0,0060	2636
840	Lyncis	6	44 16,2	7 50 33,03	8	87,07	+ 4,227	— 0,0276	2638

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
841	1 Cancri	6.7	16 5,0	7 50 44,73	4	86,04	+ 3,414	— 0,0085	2639
842	53 Camelop.	6	60 37,5	7 52 18,70	20	87,91	+ 5,168	— 0,0634	2643
843	14 Canis min. . . .	6	2 31,1	7 52 38,56	5	86,09	+ 3,124	— 0,0042	2653
844	Camelop.	6	61 17,6	7 52 46,14	7	87,42	+ 5,223	— 0,0663	2648
845	54 Camelop.	6	57 34,7	7 53 38,04	8	87,07	+ 4,924	— 0,0537	2650
846	ω¹ Cancri	6	25 41,6	7 54 16,62	6	86,05	+ 3,637	— 0,0132	2657
847	3 Cancri	6	17 36,6	7 54 29,12	5	86,11	+ 3,445	— 0,0094	2659
848	5 Cancri	6.7	16 45,5	7 55 14,11	7	86,14	+ 3,425	— 0,0090	2664
849	Canis min. . . .	6	2 38,2	7 56 32,59	5	86,08	+ 3,126	— 0,0043	2673
850	χ Geminorum . .	5	28 6,1	7 56 45,72	13	88,16	+ 3,696	— 0,0148	2672
851	Cancri	6.7	19 9,1	7 58 23,95	6	86,11	+ 3,476	— 0,0103	2683
852	8 Cancri	6	13 25,9	7 58 56,81	5	86,08	+ 3,350	— 0,0080	2690
853	Camelop.	6	65 58,7	7 59 15,18	8	87,50	+ 5,675	— 0,0946	2681
854	μ¹ Cancri	6.7	22 56,9	7 59 47,41	5	86,16	+ 3,563	— 0,0122	2700
855	27 Lyncis	5.4	51 49,4	8 0 10,81	24	88,34	+ 4,544	— 0,0416	2697
856	Camelop.	6	58 34,2	8 1 2,00	8	87,07	+ 4,962	— 0,0595	2704
857	μ² Cancri	6.5	21 54,0	8 1 17,58	5	86,08	+ 3,537	— 0,0118	2714
858	Lyncis	6.7	42 45,2	8 1 49,86	6	86,50	+ 4,138	— 0,0279	2715
859	55 Camelop.	6	68 47,8	8 1 51,53	6	88,14	+ 6,043	— 0,1195	2707
860	12 Cancri	6.7	13 57,6	8 2 33,57	6	86,11	+ 3,359	— 0,0084	2720
861	ψ² Cancri	6	25 50,4	8 3 49,87	5	86,08	+ 3,628	— 0,0142	2730
862	Lyncis	5.6	56 46,9	8 4 4,06	7	87,06	+ 4,818	— 0,0549	2732
863	Br. 1147	5.6	76 5,5	8 5 42,46	9	88,12	+ 7,679	— 0,2574	2722
864	ζ Cancri	5.4	17 58,7	8 5 54,22	5	86,09	+ 3,443	— 0,0104	2744
865	ψ Geminorum . .	6	29 59,1	8 6 19,91	6	86,14	+ 3,730	— 0,0171	2747
866	56 Camelop.	6	60 42,7	8 6 33,95	7	87,15	+ 5,102	— 0,0696	2741
867	Camelop.	6.7	72 44,9	8 8 32,42	9	88,75	+ 6,718	— 0,1781	2749
868	29 Lyncis	6	59 54,4	8 8 41,87	9	87,08	+ 5,025	— 0,0671	2757
869	57 Camelop.	6	62 50,8	8 9 42,62	8	87,65	+ 5,273	— 0,0808	2765
870	β Cancri	4.3	9 31,4	8 10 33,02	20	86,58	+ 3,261	— 0,0071	2778
871	30 Lyncis	6	58 5,1	8 11 32,91	7	87,73	+ 4,875	— 0,0614	2776
872	χ Cancri	6	27 34,4	8 13 22,98	6	86,18	+ 3,656	— 0,0161	2786
873	Ursae maj. . .	6	60 58,7	8 13 29,21	8	87,09	+ 5,085	— 0,0733	2784
874	λ Cancri	6	24 22,1	8 13 59,67	3	86,16	+ 3,578	— 0,0141	2789
875	Hydrae	6.7	4 17,6	8 14 2,87	5	86,08	+ 3,156	— 0,0054	2791

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
876	31 Lyncis	5	43 32,4	8 15 18,32	25	88,95	+ 4,128	— 0,0312	2793
877	Lyncis	6	53 34,4	8 15 28,60	8	87,08	+ 4,577	— 0,0494	2792
878	d^1 Cancri	6	18 41,1	8 17 3,97	5	86,07	+ 3,446	— 0,0114	2799
879	Lyncis	6	42 21,5	8 17 15,91	5	86,17	+ 4,080	— 0,0300	2798
880	Ursae maj . . .	6	67 39,5	8 19 23,25	8	87,25	+ 5,742	— 0,1191	2803
881	d^2 Cancri	6	17 24,5	8 19 36,42	5	86,98	+ 3,416	— 0,0109	2816
882	Cancri	6	7 55,4	8 20 0,73	5	86,08	+ 3,225	— 0,0068	2822
883	φ^2 Cancri	6	27 17,6	8 20 8,16	3	86,18	+ 3,637	— 0,0165	2817
884	Br. 1197	4.3	— 3 32,9	8 20 9,72	2	86,62	+ 3,005	— 0,0032	2825
885	•o Ursae maj . . .	3.4	61 5,1	8 21 7,41	19	87,38	+ 5,048	— 0,0764	2819
886	Ursae maj . . .	6	69 41,3	8 22 0,15	8	88,13	+ 6,013	— 0,1421	2824
887	29 Cancri	6	14 34,5	8 22 29,01	5	86,08	+ 3,355	— 0,0098	2836
888	Ursae maj. . .	6.7	53 29,2	8 24 18,07	8	87,05	+ 4,532	— 0,0512	2844
889	A Ursae maj . . .	5	65 31,2	8 24 44,97	7	87,16	+ 5,442	— 0,1038	2842
890	υ^2 Cancri	6	24 17,1	8 25 0,35	4	86,11	+ 3,563	— 0,0151	2850
891	ϑ Cancri	6	18 27,9	8 25 19,44	5	86,07	+ 3,432	— 0,0117	2853
892	Gr. 1450	6.7	38 23,6	8 25 45,82	9	86,94	+ 3,925	— 0,0265	2855
893	32 Lyncis	6	36 48,5	8 26 18,43	5	86,18	+ 3,876	— 0,0249	2860
894	η Cancri	6.5	20 48,9	8 26 20,91	2	88,24	+ 3,481	— 0,0131	2862
895	Gr. 1446	6	74 0,8	8 27 27,84	5	87,80	+ 6,806	— 0,2205	2852
896	3 Ursae maj . . .	6.5	65 24,0	8 29 25,35	8	87,89	+ 5,394	— 0,1044	2876
897	Lyncis	6	53 47,0	8 30 9,23	5	87,10	+ 4,521	— 0,0533	2887
898	π Ursae maj . . .	5.4	64 42,7	8 30 35,64	8	87,55	+ 5,313	— 0,1003	2884
899	c^1 Cancri	6	10 2,2	8 31 7,93	5	86,08	+ 3,260	— 0,0081	2897
900	Gr. 1460	6.5	53 5,8	8 31 8,31	17	87,95	+ 4,480	— 0,0517	2892
901	Cancri	7	19 39,0	8 31 28,47	5	86,13	+ 3,449	— 0,0127	2899
902	δ Hydrae	4.5	6 5,2	8 31 49,99	6	86,17	+ 3,185	— 0,0066	2901
903	σ Hydrae	5	3 43,6	8 33 0,44	6	86,15	+ 3,141	— 0,0057	2911
904	34 Lyncis	6	46 13,1	8 33 24,98	7	86,69	+ 4,167	— 0,0379	2909
905	39 Cancri	6	20 23,7	8 33 46,88	8	86,10	+ 3,462	— 0,0132	2917
906	40 Cancri	6	20 21,6	8 33 51,98	6	86,14	+ 3,461	— 0,0133	2918
907	γ Cancri	4.5	21 51,8	8 36 55,29	5	86,11	+ 3,488	— 0,0143	2937
908	A^1 Cancri	6	13 4,5	8 37 8,68	5	86,19	+ 3,313	— 0,0097	2942
909	η Hydrae	5.4	3 47,6	8 37 28,55	9	86,16	+ 3,141	— 0,0059	2945
910	δ Cancri	4	18 33,5	8 38 25,99	8	86,13	+ 3,418	— 0,0125	2953

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
911	σ^1 Cancri	6.7	31 5,7	8 38 36,48	6	86,23	+ 3,693	— 0,0209	2952
912	Ursae maj. . .	6	67 6,7	8 38 51,16	6	87,15	+ 5,509	— 0,1224	2943
913	ι Cancri	4.5	29 9,7	8 40 2,40	9	86,25	+ 3,644	— 0,0194	2965
914	A^2 Cancri	6	12 30,8	8 40 54,26	6	86,20	+ 3,299	— 0,0095	2970
915	ε Hydrae	3.4	6 49,3	8 40 57,06	10	86,59	+ 3,195	— 0,0071	2971
916	ϱ Hydrae	5	6 14,6	8 42 36,34	4	86,13	+ 3,184	— 0,0069	2978
917	b Ursae maj. . . .	5	62 22,4	8 44 18,45	8	87,14	+ 4,998	— 0,0899	2982
918	35 Lyncis	6	44 8,1	8 44 33,94	6	87,06	+ 4,049	— 0,0362	2989
919	51 Cancri	6	32 53,1	8 45 46,89	6	86,17	+ 3,720	— 0,0230	2999
920	ϱ^1 Cancri	6.7	28 40,2	8 45 51,84	4	86,21	+ 3,620	— 0,0195	3000
921	ϱ^2 Cancri	6	28 45,0	8 46 2,97	6	86,20	+ 3,622	— 0,0193	3002
922	Hydrae	6	5 45,2	8 46 35,58	6	86,16	+ 3,173	— 0,0067	3013
923	6 Ursae maj. . . .	6	65 1,4	8 47 11,25	8	87,30	+ 5,212	— 0,1078	3003
924	σ^2 Cancri m. . . .	6.5	30 59,7	8 47 31,96	7	86,93	+ 3,670	— 0,0215	3016
925	ϱ^3 Cancri	6	28 20,8	8 49 4,46	6	86,15	+ 3,606	— 0,0193	3026
926	Lyncis	6.7	40 37,4	8 49 22,20	6	87,16	+ 3,920	— 0,0317	3027
927	Lyncis	6	46 3,2	8 49 23,20	7	87,08	+ 4,098	— 0,0398	3025
928	ζ Hydrae	3.4	6 21,8	8 49 34,81	6	86,17	+ 3,183	— 0,0070	3032
929	60 Cancri	6	12 2,8	8 49 55,24	5	86,20	+ 3,288	— 0,0096	3035
930	59 Cancri	6	33 20,0	8 50 9,35	6	86,71	+ 3,720	— 0,0237	3033
931	o^1 Cancri	6	15 44,6	8 51 6,84	7	86,38	+ 3,349	— 0,0114	3047
932	σ^3 Cancri	6	30 39,3	8 51 17,76	4	86,69	+ 3,654	— 0,0214	3046
933	o^2 Cancri	6	16 0,2	8 51 26,67	7	86,21	+ 3,353	— 0,0116	3052
934	ι Ursae maj. . .	3	48 24,4	8 51 40,60	12	87,61	+ 4,178	— 0,0444	3048
935	Cancri	6.7	9 48,7	8 51 46,05	6	86,16	+ 3,242	— 0,0085	3053
936	α Cancri	4	12 17,0	8 52 28,14	1	86,27	+ 3,285	— 0,0098	3055
937	ϱ Ursae maj. . .	5	68 3,5	8 52 37,27	8	87,99	+ 5,493	— 0,1363	3019
938	64 Cancri	5	32 40,7	8 52 47,43	5	87,03	+ 3,702	— 0,0233	3056
939	10 Ursae maj. . .	4	42 13,1	8 53 30,01	8	87,04	+ 3,954	— 0,0343	3059
940	Lyncis	6.7	38 1,9	8 53 31,25	4	86,21	+ 3,832	— 0,0289	3060
941	66 Cancri	6.7	32 40,9	8 54 39,55	6	86,15	+ 3,693	— 0,0234	3068
942	Gr. 1501. . . .	6	54 43,0	8 55 56,89	12	87,14	+ 4,432	— 0,0604	3072
943	$\varkappa$ Ursae maj. . .	3.4	47 35,5	8 56 6,84	2	90,18	+ 4,125	— 0,0433	3075
944	ν Cancri.	6	24 53,1	8 56 18,55	5	86,15	+ 3,518	— 0,0172	3079
945	Ursae maj. . .	6	48 58,0	8 57 48,57	7	86,36	+ 4,169	— 0,0463	3085

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
946	Ursae maj. . .	6	59 47,0	8 58 10,38	7	87,17	+ 4,709	— 0,0796	3086
947	σ^1 Ursae maj. . .	5	67 18,9	8 58 43,74	9	87,85	+ 5,346	— 0,1302	3087
948	Lyncis	5	38 53,5	8 59 31,98	8	86,13	+ 3,837	— 0,0304	3097
949	Lyncis	6	38 43,1	8 59 49,53	6	86,20	+ 3,831	— 0,0302	3100
950	ω Hydrae	6	5 31,9	9 0 10,99	5	86,09	+ 3,164	— 0,0068	3105
951	σ^2 Ursae maj. . .	5	67 34,8	9 0 42,57	16	88,81	+ 5,357	— 0,1333	3099
952	*f* Ursae maj. . .	5	52 2,9	9 1 6,66	7	87,06	+ 4,279	— 0,0537	3106
953	τ Cancri	6	30 5,7	9 1 23,85	6	86,14	+ 3,617	— 0,0214	3109
954	ϰ Cancri	5	11 6,6	9 1 47,25	5	86,08	+ 3,257	— 0,0094	3111
955	τ Ursae maj. . .	5.4	63 57,6	9 1 50,70	8	87,16	+ 4,992	— 0,1034	3108
956	Lyncis	6	34 19,7	9 2 6,24	6	86,15	+ 3,711	— 0,0255	3112
957	ξ Cancri	5	22 29,4	9 3 2,15	8	86,15	+ 3,459	— 0,0159	3117
958	79 Cancri	6.7	22 26,6	9 4 1,71	3	86,11	+ 3,456	— 0,0159	3123
959	Ursae maj. . .	6	73 24,0	9 4 49,03	8	88,19	+ 6,176	— 0,2244	3116
960	*c* Ursae maj. . .	5	61 52,5	9 5 38,59	10	87,14	+ 4,797	— 0,0912	3125
961	Hydrae	6.7	4 19,0	9 6 28,11	6	86,09	+ 3,142	— 0,0063	3133
962	36 Lyncis	5	43 40,2	9 6 36,65	15	88,62	+ 3,948	— 0,0375	3131
963	Cancri	6.7	21 44,2	9 7 20,36	6	86,14	+ 3,437	— 0,0155	3138
964	17 Ursae maj. . .	6	57 11,8	9 7 40,63	7	87,60	+ 4,489	— 0,0701	3135
965	*e* Ursae maj. . .	5	54 28,5	9 8 16,26	7	87,89	+ 4,348	— 0,0612	3140
966	Lyncis	6.7	35 5,2	9 8 29,11	6	90,19	+ 3,711	— 0,0266	3144
967	ϑ Hydrae	4	2 46,7	9 8 38,44	31	86,54	+ 3,117	— 0,0057	3146
968	π Cancri	6	15 23,8	9 9 9,47	5	86,21	+ 3,322	— 0,0117	3147
969	Ursae maj. . .	6	47 16,5	9 10 8,24	6	87,17	+ 4,050	— 0,0440	3150
970	38 Lyncis	4.5	37 16,1	9 11 59,95	13	88,01	+ 3,753	— 0,0292	3162
971	83 Cancri	6.5	18 10,3	9 12 50,57	14	86,50	+ 3,365	— 0,0134	3171
972	Ursae maj. . .	6.7	51 43,5	9 13 5,47	6	87,20	+ 4,200	— 0,0540	3169
973	Ursae maj. . .	6	57 9,9	9 13 38,67	8	87,87	+ 4,448	— 0,0707	3172
974	40 Lyncis	3.4	34 51,4	9 14 21,18	15	87,97	+ 3,688	— 0,0267	3178
975	Ursae maj. . .	6	50 0,7	9 15 2,10	9	87,42	+ 4,128	— 0,0501	3182
976	ϰ Leonis	5	26 39,3	9 18 14,90	5	86,09	+ 3,508	— 0,0194	3204
977	41 Lyncis	6.7	46 5,0	9 21 47,43	5	87,81	+ 3,958	— 0,0425	3218
978	ω Leonis	6	9 32,1	9 22 33,89	5	86,09	+ 3,215	— 0,0088	3227
979	*h* Ursae maj. . .	3.4	63 32,5	9 22 51,10	4	87,14	+ 4,773	— 0,1031	3221
980	7 Leonis min. . .	6.7	34 8,3	9 24 4,44	5	86,12	+ 3,643	— 0,0263	3238

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
981	22 Ursae maj. . .	6	72 41,6	9 24 30,05	7	88,18	+ 5,765	— 0,2111	3231
982	*d* Ursae maj. . .	5.4	70 18,8	9 24 44,99	5	88,13	+ 5,414	— 0,1697	3232
983	8 Leonis min. . .	6	35 35,4	9 24 50,86	8	86,95	+ 3,672	— 0,0279	3241
984	λ Leonis	5.4	23 27,2	9 25 26,66	8	86,45	+ 3,435	— 0,0171	3246
985	ϑ Ursae maj. . .	3	52 10,7	9 25 30,15	3	87,86	+ 4,147	— 0,0560	3242
986	ξ Leonis	6	11 47,2	9 26 1,01	5	86,09	+ 3,246	— 0,0100	3250
987	*h* Leonis	6	10 12,0	9 26 3,89	4	86,22	+ 3,222	— 0,0091	3251
988	9 Leonis min. . .	6	36 58,4	9 26 45,39	6	86,15	+ 3,696	— 0,0295	3252
989	26 Ursae maj. . .	5	52 32,4	9 27 17,20	7	87,65	+ 4,151	— 0,0570	3256
990	10 Leonis min. . .	5.4	36 53,1	9 27 29,07	8	87,22	+ 3,692	— 0,0294	3261
991	Lyncis	5	40 6,6	9 28 12,10	5	86,19	+ 3,765	— 0,0335	3265
992	11 Leonis min. . .	6	36 18,4	9 29 3,97	5	86,09	+ 3,674	— 0,0288	3268
993	10 Leonis	6	7 19,7	9 31 24,24	5	86,09	+ 3,176	— 0,0077	3286
994	42 Lyncis	6	40 44,0	9 31 29,78	7	86,14	+ 3,767	— 0,0344	3281
995	9 Leonis	6.7	25 9,8	9 31 32,36	4	86,19	+ 3,452	— 0,0185	3285
996	2 Sextantis. . . .	5	5 8,7	9 32 43,06	4	86,15	+ 3,145	— 0,0066	3295
997	27 Ursae maj. . .	6	72 45,1	9 32 48,83	9	88,17	+ 5,651	— 0,2118	3283
998	Gr. 1564	6.5	69 44,3	9 32 49,49	8	87,67	+ 5,241	— 0,1615	3287
999	Draconis	6	78 38,1	9 33 0,51	10	88,67	+ 7,052	— 0,4336	3275
1000	Draconis	6	79 38,4	9 34 13,05	10	89,23	+ 7,417	— 0,5194	3284
1001	*o* Leonis	4 3	10 23,5	9 35 16,84	19	86,38	+ 3,217	— 0,0092	3312
1002	13 Leonis	6.7	26 24,8	9 35 18,85	5	86,09	+ 3,464	— 0,0195	3309
1003	Ursae maj. . .	6.7	54 51,9	9 35 30,17	7	87,18	+ 4,193	— 0,0642	3308
1004	13 Leonis min. . .	6	35 35,7	9 36 5,01	6	86,15	+ 3,635	— 0,0281	3313
1005	28 Ursae maj. . .	6.7	64 9,5	9 37 27,38	7	88,18	+ 4,681	— 0,1076	3315
1006	ψ Leonis	6	14 31,5	9 37 44,45	5	86,09	+ 3,274	— 0,0115	3321
1007	Ursae maj. . .	6	57 37,9	9 38 44,12	6	87,15	+ 4,292	— 0,0737	3324
1008	Ursae maj. . .	6	63 45,5	9 39 8,85	8	87,85	+ 4,636	— 0,1048	3325
1009	ε Leonis	3	24 16,8	9 39 36,47	19	87,40	+ 3,419	— 0,0179	3331
1010	Leonis	5.6	7 13,0	9 40 21,82	5	86,14	+ 3,169	— 0,0075	3336
1011	18 Leonis	6	12 19,0	9 40 27,76	4	86,20	+ 3,239	— 0,0102	3337
1012	15 Leonis min. . .	6	46 32,0	9 41 29,44	8	86,62	+ 3,847	— 0,0440	3341
1013	19 Leonis	7	12 4,6	9 41 31,16	7	86,14	+ 3,235	— 0,0101	3344
1014	υ Ursae maj. . .	4.3	59 33,3	9 43 10,00	37	88,27	+ 4,351	— 0,0817	3346
1015	16 Leonis min. . .	6	40 8,6	9 43 28,51	3	86,13	+ 3,704	— 0,0339	3352

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1016	φ Ursae maj. . .	5,4	54 34,7	9 44 37,05	6	87,26	+ 4,119	— 0,0632	3358
1017	4 Sextantis. . . .	6.7	4 51,5	9 44 46,70	5	86,10	+ 3,136	— 0,0063	3359
1018	g Leonis	5	24 54,9	9 45 38,39	5	86,15	+ 3,416	— 0,0165	3366
1019	μ Leonis	4	26 31,5	9 46 30,49	8	86,22	+ 3,440	— 0,0197	3371
1020	Sextantis. . . .	6.7	6 28,6	9 47 56,30	5	86,10	+ 3,155	— 0,0071	3380
1021	31 Ursae maj. . .	5	50 20,3	9 48 32,13	7	87,15	+ 3,948	— 0,0519	3381
1022	Gr. 1586. . . .	6	73 24,1	9 48 32,25	23	88,42	+ 5,506	— 0,2226	3376
1023	Ursae maj. . .	6	57 56,5	9 49 33,11	6	87,21	+ 4,223	— 0,0747	3390
1024	Leonis	6	9 27,2	9 50 36,10	5	86,10	+ 3,192	— 0,0086	3398
1025	19 Leonis min. . .	5.6	41 34,7	9 50 56,81	11	86,56	+ 3,706	— 0,0359	3399
1026	Ursae maj. . .	6.7	45 56,3	9 51 0,43	6	86,39	+ 3,810	— 0,0418	3397
1027	Ursae maj. . .	6	57 20,3	9 52 17,23	7	87,16	+ 4,175	— 0,0723	3402
1028	Leonis	6	8 50,3	9 52 17,95	5	86,11	+ 3,183	— 0,0083	3407
1029	ν Leonis	5	12 58,1	9 52 18,31	6	86,16	+ 3,235	— 0,0105	3406
1030	Leonis	6	30 10,8	9 53 15,57	4	86,11	+ 3,481	— 0,0228	3409
1031	π Leonis	5	8 34,3	9 54 24,05	27	87,16	+ 3,177	— 0,0081	3415
1032	20 Leonis min. . .	5	32 27,8	9 54 40,49	7	86,20	+ 3,515	— 0,0250	3416
1033	Ursae maj. . .	6	50 38,4	9 56 6,95	6	87,21	+ 3,911	— 0,0525	3421
1034	Ursae maj. . .	6	54 25,4	9 57 17,64	7	87,16	+ 4,026	— 0,0624	3425
1035	21 Leonis min. . .	4.5	35 46,8	10 0 56,58	5	86,17	+ 3,551	— 0,0284	3446
1036	14 Sextantis. . . .	6	6 8,9	10 1 2,24	5	86,17	+ 3,143	— 0,0067	3449
1037	η Leonis	3.4	17 17,9	10 1 20,26	18	87,47	+ 3,279	— 0,0127	3453
1038	A Leonis	5	10 32,2	10 2 3,96	4	86,20	+ 3,195	— 0,0090	3457
1039	15 Sextantis. . . .	4.5	0 9,9	10 2 18,42	12	87,39	+ 3,074	— 0,0037	3458
1040	α Leonis	1.2	12 30,3	10 2 30,82	14	88,36	+ 3,218	— 0,0101	3459
1041	16 Sextantis. . . .	6	6 42,6	10 3 29,07	6	86,13	+ 3,149	— 0,0069	3463
1042	Leonis min. . .	6.7	41 12,1	10 4 21,19	5	86,17	+ 3,638	— 0,0352	3466
1043	34 Leonis	6.7	13 53,8	10 5 43,24	5	86,11	+ 3,231	— 0,0108	3475
1044	Leonis min. . .	...	31 58,2	10 7 51,69	4	86,15	+ 3,465	— 0,0243	3484
1045	22 Leonis min. . .	6	32 0,3	10 8 47,41	6	86,19	+ 3,462	— 0,0245	3490
1046	23 Leonis min. . .	5	29 51,5	10 9 59,52	9	86,47	+ 3,427	-- 0,0223	3500
1047	32 Ursae maj. . .	6	65 39,4	10 10 2,38	8	88,21	+ 4.436	— 0,1146	3496
1048	Leonis	6	18 17,3	10 10 16,64	5	86,40	+ [illegible]76	— 0,0134	3506
1049	35 Leonis.	6	24 2,9	10 10 26,98	5	87,28	+ 3, 47	— 0,0175	3507
1050	λ Ursae maj. . .	3.4	43 27,8	10 10 27,72	17	87,85	+ 3,655	— 0,0383	3505

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1051	ζ Leonis	3	23 57,9	10 10 34,28	8	87,00	+ 3,346	— 0,0174	3508
1052	37 Leonis	6.5	14 16,6	10 10 46,50	6	86,13	+ 3,229	— 0,0110	3510
1053	Ursae maj. . .	6.7	44 36,4	10 12 9,97	6	87,09	+ 3,670	— 0,0401	3515
1054	Ursae maj. . .	6	69 18,0	10 12 39,63	7	88,28	+ 4,670	— 0,1479	3514
1055	Ursae maj. . .	6.7	54 46,1	10 13 24,02	7	87,16	+ 3,922	— 0,0624	3519
1056	40 Leonis	6.7	20 1,7	10 13 44,98	5	86,18	+ 3,291	— 0,0145	3522
1057	γ^1 Leonis	2	20 23,9	10 13 54,40	4	86,23	+ 3,294	— 0,0148	3523
1058	Ursae maj. . .	6	42 24,1	10 14 28,30	6	87,78	+ 3,615	— 0,0366	3525
1059	Leonis	6	6 59,0	10 14 46,82	5	86,12	+ 3,143	— 0,0067	3529
1060	23 Sextantis. . . .	6	2 50,6	10 15 21,28	7	86,52	+ 3,102	— 0,0046	3532
1061	Ursae maj. . .	6	41 47,3	10 15 38,23	6	87,42	+ 3,598	— 0,0358	3530
1062	42 Leonis.	6	15 31,8	10 15 55,33	6	86,75	+ 3,237	— 0,0116	3534
1063	30 H. Ursae maj..	5	66 7,3	10 16 11,69	4	88,73	+ 4,394	— 0.1166	3531
1064	43 Leonis	6.7	7 6,1	10 17 15,04	5	86,14	+ 3,145	— 0,0068	3544
1065	29 Leonis min. . .	6.7	35 59,1	10 19 2434	6	86,91	+ 3,485	— 0,0282	3559
1066	44 Leonis	6	9 20,6	10 19 27,41	4	86,22	+ 3,166	— 0,0079	3561
1067	30 Leonis min. . .	5.4	34 21,4	10 19 36,61	5	86,45	+ 3,460	— 0,0264	3560
1068	Ursae maj. . .	6	49 23,5	10 21 16,48	4	87,16	+ 3,723	— 0,0484	3567
1069	31 Leonis min. . .	4.5	37 16,2	10 21 31,38	7	86,53	+ 3,496	— 0,0296	3572
1070	45 Leonis	6	10 19,4	10 21 50,36	5	86,15	+ 3,174	— 0,0083	3575
1071	35 Ursae maj. . .	6	66 11,3	10 22 5,12	7	88,26	+ 4,328	— 0,1155	3571
1072	Leonis	6	14 54,3	10 22 55,82	5	86,25	+ 3,219	— 0,0111	3579
1073	36 Ursae maj. . .	5	56 32,7	10 23 35,14	11	87,26	+ 3,899	— 0,0667	3580
1074	32 Leonis min. . .	6	39 29,3	10 23 41,23	6	86,93	+ 3,522	— 0,0321	3584
1075	Sextantis. . . .	6.7	2 3,5	10 24 3,65	5	86,12	+ 3,092	— 0,0039	3592
1076	30 Sextantis. . . .	5	— 0 4,4	10 24 40,12	5	86,18	+ 3,072	— 0,0029	3597
1077	33 Leonis min. . .	6	32 56,6	10 25 36,73	7	87,10	+ 3,419	— 0,0248	3602
1078	ι Leonis	5	14 42,1	10 26 19,49	6	86,59	+ 3,212	— 0,0108	3606
1079	Ursae maj. . .	5	40 59,5	10 26 48,91	7	88,14	+ 3,532	— 0,0340	3607
1080	ρ Leonis	4	9 52,3	10 27 1,21	11	86,16	+ 3,164	— 0,0080	3609
1081	34 Leonis min. . .	6	35 33,3	10 27 13,51	3	87,27	+ 3,449	— 0,0274	3610
1082	37 Ursae maj. . .	5.6	57 38,9	10 28 4,34	24	87,95	+ 3.897	— 0,0698	3612
1083	48 Leonis	6	7 31,2	10 29 3,76	5	86,20	+ 3,141	— 0,0066	3621
1084	49 Leonis	6	9 13,1	10 29 15,91	5	86,13	+ 3,156	— 0,0075	3622
1085	35 Leonis min. . .	6	36 53,8	10 30 2,71	8	86,48	+ 3,456	— 0,0288	3625

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
1086	36 Leonis min. . .	6.7	34 38,9	10 31 37,92	4	87,29	+ 3,420	— 0,0262	3633
1087	Ursae maj. . .	6	54 14,6	10 32 16,16	7	87,16	+ 3,766	— 0,0588	3639
1088	37 Leonis min. . .	5.4	32 32,8	10 32 31,79	7	86,38	+ 3,390	— 0,0241	3640
1089	38 Leonis min. . .	6	38 29,0	10 32 50,28	5	86,85	+ 3,467	— 0,0305	3641
1090	Ursae maj. . .	6	69 1,1	10 33 58,37	9	88,15	+ 4,351	— 0,1359	3645
1091	38 Ursae maj. . .	5	66 17,5	10 34 25,99	8	88,07	+ 4,182	— 0,1121	3647
1092	35 H. Ursae maj. .	5.6	69 39,1	10 35 11,25	9	88,17	+ 4,376	— 0,1419	3652
1093	33 Sextantis. . . .	6.5	— 1 9,8	10 35 48,27	4	87,25	+ 3,063	— 0,0019	3663
1094	39 Ursae maj. . .	6	57 46,6	10 36 46,42	7	87,16	+ 3,826	— 0,0688	3664
1095	34 Sextantis. . . .	6.7	4 9,4	10 36 56,74	5	86,12	+ 3,107	— 0,0046	3667
1096	40 Leonis min. . .	6	26 54,2	10 36 59,57	5	86,18	+ 3,313	— 0,0189	3666
1097	Ursae maj. . .	5	46 46,9	10 37 5,02	7	86,67	+ 3,576	— 0,0423	3665
1098	41 Leonis min. . .	5.6	23 45,8	10 37 26,07	7	86,39	+ 3,280	— 0,0164	3671
1099	41 Ursae maj. . .	6	57 56,7	10 39 28,58	7	87,16	+ 3,807	— 0,0688	3682
1100	36 Sextantis. . . .	6	3 4,0	10 39 29,44	6	86,13	+ 3,097	— 0,0038	3684
1101	42 Leonis min. . .	5	31 15,7	10 39 44,80	22	87,90	+ 3,351	— 0,0225	3685
1102	37 Sextantis . . .	6	6 57,2	10 40 21,96	5	86,19	+ 3,128	— 0,0058	3690
1103	*m* Leonis	6	19 28,3	10 40 29,00	6	86,23	+ 3,233	— 0,0134	3691
1104	*k* Leonis	6	14 46,5	10 40 35,76	6	86,80	+ 3,192	— 0,0104	3693
1105	43 Leonis min. . .	6.7	29 59,8	10 42 53,29	4	86,20	+ 3,327	— 0,0212	3704
1106	*l* Leonis	5.6	11 7,6	10 43 28,53	21	87,64	+ 3,159	— 0,0081	3708
1107	44 Leonis min. . .	6.7	28 33,3	10 43 51,09	5	86,14	+ 3,310	— 0,0200	3710
1108	43 Ursae maj. . .	6	57 9,9	10 44 24,06	6	87,16	+ 3,743	— 0,0653	3713
1109	42 Ursae maj. . .	6	59 54,2	10 44 28,62	7	87,48	+ 3,819	— 0,0748	3714
1110	Leonis	6.7	1 36,5	10 46 34,70	5	86,12	+ 3,084	— 0,0028	3726
1111	44 Ursae maj. . .	5	55 10,2	10 46 54,64	6	87,39	+ 3,675	— 0,0589	3725
1112	46 Leonis min. . .	4	34 48,5	10 47 9,47	8	86,90	+ 3,363	— 0,0255	3728
1113	ω Ursae maj. . .	5	43 46,5	10 47 38,81	8	86,51	+ 3,470	— 0,0364	3729
1114	Leonis min. . .	5.6	34 5,6	10 49 38,90	4	86,29	+ 3,346	— 0,0247	3741
1115	54 Leonis	4.5	25 20,2	10 49 39,55	5	86,21	+ 3,264	— 0,0171	3742
1116	55 Leonis	6	1 19,4	10 50 2,90	7	86,76	+ 3,082	— 0,0025	3749
1117	50 Leonis min. . .	6	26 5,2	10 50 36,39	8	86,30	+ 3,268	— 0,0176	3751
1118	Br. 1508	6	78 21,6	10 51 8,39	9	88,74	+ 4,993	— 0,3142	3747
1119	47 Ursae maj. . .	5	41 1,0	10 53 18,42	5	86,19	+ 3,406	— 0,0321	3757
1120	Ursae maj. . .	6	46 6,9	10 53 55,68	5	88,09	+ 3,468	— 0,0393	3758

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1121	Ursae maj. . .	6	43 30,3	10 54 6,39	6	87,13	+ 3,432	— 0,0353	3760
1122	49 Ursae maj. . .	5	39 48,2	10 54 40,55	5	86,30	+ 3,386	— 0,0305	3765
1123	*d* Leonis	5	4 12,5	10 54 52,83	5	86,12	+ 3,100	— 0,0038	3768
1124	*c* Leonis	5	6 41,5	10 55 2,81	5	86,25	+ 3,116	— 0,0051	3769
1125	β Ursae maj. . .	2.3	56 58,3	10 55 12,09	20	87,95	+ 3,646	— 0,0624	3767
1126	*b* Leonis	4.5	20 46,2	10 56 27,48	5	86,21	+ 3,211	— 0,0135	3776
1127	α Ursae maj. . .	2	62 20,7	10 56 56,15	8	88,15	+ 3,766	— 0,0814	3777
1128	p^2 Leonis	6	0 35,5	10 57 58,84	9	86,55	+ 3,076	— 0,0018	3782
1129	51 Ursae maj. . .	6	38 50,0	10 58 24,42	4	86,21	+ 3,358	— 0,0291	3784
1130	χ Leonis	5.4	7 55,8	10 59 20,61	26	86,66	+ 3,121	— 0,0056	3788
1131	p^3 Leonis	6	2 33,1	11 1 17,68	5	86,14	+ 3,088	— 0,0026	3798
1132	67 Leonis	6	25 15,2	11 2 55,03	6	86,21	+ 3,228	— 0,0163	3809
1133	Ursae maj. . .	6	36 54,3	11 3 16,14	4	86,21	+ 3,319	— 0,0265	3811
1134	ψ Ursae maj. . .	3.4	45 5,7	11 3 28,75	24	88,30	+ 3,400	— 0,0366	3812
1135	Ursae maj. . .	6.7	43 48,2	11 3 28,98	7	86,68	+ 3,385	— 0,0347	3813
1136	Draconis	6	68 52,1	11 5 8,98	8	87,24	+ 3,896	— 0,1166	3821
1137	Ursae maj. . .	6.7	55 29,5	11 6 20,23	7	87,16	+ 3,523	— 0,0559	3825
1138	p^3 Leonis	5	0 31,7	11 7 7,76	7	86,77	+ 3,075	— 0,0013	3832
1139	Leonis	6	2 51,1	11 8 14,34	5	86,24	+ 3,087	— 0,0024	3836
1140	δ Leonis	2.3	21 7,6	11 8 15,49	6	86,93	+ 3,188	— 0,0132	3834
1141	ϑ Leonis	3.4	16 1,8	11 8 28,09	7	88,01	+ 3,158	— 0,0099	3838
1142	72 Leonis	5	23 41,7	11 9 21,32	9	86,50	+ 3,201	— 0,0147	3842
1143	*n* Leonis	6	13 54,5	11 10 6,60	5	86,16	+ 3,144	— 0,0084	3843
1144	Leonis	6	13 26,8	11 10 13,00	4	86,22	+ 3,141	— 0,0082	3845
1145	Gr. 1757	6	50 4,6	11 10 29,88	24	87,47	+ 3,415	— 0,0436	3846
1146	75 Leonis	6	2 36,9	11 11 37,73	9	86,28	+ 3,085	— 0,0021	3850
1147	ν Ursae maj. . .	3.4	33 41,7	11 12 32,36	8	86,75	+ 3,256	— 0,0226	3852
1148	55 Ursae maj. . .	5	38 47,3	11 13 8,14	5	87,06	+ 3,291	— 0,0279	3856
1149	76 Leonis	6.7	2 15,2	11 13 16,28	5	86,16	+ 3,083	— 0,0018	3857
1150	σ Leonis	4.5	6 37,9	11 15 27,91	11	86,46	+ 3,103	— 0,0041	3862
1151	Gr. 1771 . . .	6.7	64 55,9	11 16 18,61	17	87,40	+ 3,614	— 0,0855	3864
1152	71 Leonis	6	18 2,4	11 16 43,62	4	86,20	+ 3,156	— 0,0152	3869
1153	56 Ursae maj. . .	6	44 5,1	11 16 47,42	7	87,39	+ 3,315	— 0,0335	3868
1154	ι Leonis	4	11 8,1	11 18 11,30	9	86,87	+ 3,120	— 0,0065	3877
1155	79 Leonis	6	2 0,7	11 18 23,67	5	86,15	+ 3,081	— 0,0015	3879

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1156	Ursae maj. . .	6	56 27,2	11 19 44,62	7	87,16	+ 3,425	— 0,0550	3885
1157	81 Leonis	6	17 3,7	11 19 52,30	4	86,19	+ 3,144	— 0,0098	3886
1158	83 Leonis	7	3 36,7	11 21 11,43	5	86,16	+ 3,087	— 0,0021	3894
1159	τ Leonis	5	3 27,7	11 22 16,84	5	86,61	+ 3,086	— 0,0021	3900
1160	Ursae maj. . .	6.7	62 22,6	11 22 47,20	10	87,18	+ 3,488	— 0,0719	3904
1161	57 Ursae maj. . .	5	39 56,5	11 23 8,66	5	87,31	+ 3,252	— 0,0278	3905
1162	85 Leonis	6	16 1,2	11 23 58,02	6	86,16	+ 3,133	— 0,0090	3910
1163	58 Ursae maj. . .	6	43 46,6	11 24 33,88	8	87,02	+ 3,270	— 0,0321	3913
1164	86 Leonis	6	19 0,9	11 24 44,63	6	86,26	+ 3,143	— 0,0107	3915
1165	λ Draconis	3.4	69 56,3	11 24 52,32	7	87,39	+ 3,631	— 0,1105	3914
1166	88 Leonis	6	14 58,6	11 26 4,24	4	86,19	+ 3,125	— 0,0082	3919
1167	Ursae maj. . .	6	61 41,5	11 26 6,55	8	87,17	+ 3,438	— 0,0681	3918
1168	89 Leonis	6	3 40,3	11 28 44,17	5	86,20	+ 3,084	— 0,0018	3930
1169	90 Leonis	6	17 24,3	11 28 58,97	5	86,20	+ 3,129	— 0,0095	3932
1170	Ursae maj. . .	6	55 23,6	11 29 1,12	7	87,21	+ 3,333	— 0,0501	3931
1171	2 Draconis	6.5	69 56,1	11 29 35,41	6	87,26	+ 3,556	— 0,1067	3933
1172	Leonis	6	28 23,3	11 30 30,63	5	86,22	+ 3,165	— 0,0168	3937
1173	Ursae maj. . .	6	62 48,3	11 31 15,02	8	88,15	+ 3,398	— 0,0697	3942
1174	υ Leonis	5.4	— 0 13,0	11 31 18,96	16	86,96	+ 3,072	+ 0,0003	3946
1175	Ursae maj. . .	6	51 13,7	11 31 55,77	7	87,74	+ 3,276	— 0,0415	3949
1176	59 Ursae maj. . .	6	44 14,1	11 32 28,91	6	87,14	+ 3,228	— 0,0315	3952
1177	60 Ursae maj. . .	6	47 26,6	11 32 39,15	6	87,17	+ 3,246	— 0,0357	3953
1178	92 Leonis	5	21 57,8	11 35 3,95	5	86,19	+ 3,131	— 0,0120	3964
1179	61 Ursae maj. . .	5	34 49,4	11 35 15,59	4	86,30	+ 3,173	— 0,0216	3965
1180	62 Ursae maj. . .	6	32 21,2	11 35 50,91	7	86,27	+ 3,161	— 0,0194	3966
1181	3 Draconis	5.6	67 21,2	11 36 20,28	16	87,78	+ 3,403	— 0,0861	3968
1182	Ursae maj. . .	6.7	42 20,0	11 37 47,96	5	86,69	+ 3,190	— 0,0245	3973
1183	ξ Virginis	5.4	8 52,2	11 39 36,82	6	86,19	+ 3,091	— 0,0040	3979
1184	ν Virginis	4.5	7 8,7	11 40 12,33	5	86,21	+ 3,087	— 0,0031	3982
1185	χ Ursae maj. . .	4.3	48 23,4	11 40 14,47	19	88,40	+ 3,202	— 0,0356	3981
1186	Ursae maj. . .	6	56 14,4	41 41 2,26	6	87,21	+ 3,238	— 0,0486	3985
1187	A^1 Virginis	6	8 51,4	11 42 15,83	6	86,24	+ 3,089	— 0,0038	3989
1188	93 Leonis	4.5	20 49,8	11 42 18,76	5	86,57	+ 3,112	— 0,0107	3990
1189	β Leonis	2	15 11,2	11 43 27,07	8	87,00	+ 3,099	— 0,0073	3995
1190	Virginis	6	5 48,0	11 43 28,76	5	86,24	+ 3,082	— 0,0022	3996

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1191	Leonis	6	16 51,4	11 43 33,92	5	87,34	+ 3,102	— 0,0082	3997
1192	Ursae maj . . .	6	35 32,6	11 43 58,92	6	87,83	+ 3,139	— 0,0212	3998
1193	β Virginis.	3.4	2 23,1	11 44 57,74	13	87,09	+ 3,076	— 0,0002	4002
1194	Leonis	6	12 53,4	11 45 16,64	6	86,18	+ 3,092	— 0,0058	4005
1195	γ Ursae maj . . .	2.3	54 18,4	11 48 2,54	35	88,25	+ 3,170	— 0,0430	4017
1196	Ursae maj. . .	7	41 31,6	11 48 7,88	4	86,80	+ 3,134	— 0,0263	4018
1197	A² Virginis	6	9 3,3	11 49 24,46	5	86,19	+ 3,082	— 0,0035	4027
1198	66 Ursae maj . . .	6	57 12,6	11 50 13,55	9	87,24	+ 3,161	— 0,0477	4033
1199	Ursae maj . . .	6	62 9,8	11 51 8,51	7	87,53	+ 3,170	— 0,0588	4036
1200	b Virginis	6	4 16,1	11 54 18,89	6	86,19	+ 3,075	— 0,0007	4049
1201	π Virginis.	4.5	7 13,7	11 55 14,19	5	86,23	+ 3,076	— 0,0022	4052
1202	1 Comae	6.7	22 42,4	11 56 6,36	3	86,21	+ 3,082	— 0,0109	4056
1203	67 Ursae maj . . .	5	43 39,3	11 56 31,78	6	87,12	+ 3,092	— 0,0272	4057
1204	2 Comae	6	22 4,3	11 58 38,63	4	86,21	+ 3,076	— 0,0103	4066
1205	o Virginis. . . .	4	9 20,6	11 59 36,42	34	87,21	+ 3,073	— 0,0030	4072
1206	Gr. 1852. . . .	6.5	77 31,3	11 59 39,23	9	88,25	+ 3,082	— 0,1331	. . . .
1207	Ursae maj . . .	6	63 32,9	12 0 6,14	6	87,23	+ 3,071	— 0,0582	4074
1208	10 Virginis	6	2 30,9	12 4 3,12	5	86,22	+ 3,071	+ 0,0008	4094
1209	11 Virginis	6	6 25,1	12 4 27,02	4	86,23	+ 3,070	— 0,0012	4096
1210	68 Ursae maj . . .	6	57 39,8	12 6 15,87	7	87,24	+ 3,015	— 0,0431	4108
1211	4 Comae	6	26 29,0	12 6 16,38	6	86,26	+ 3,054	— 0,0124	4107
1212	5 Comae	6	21 9,3	12 6 33,70	4	86,24	+ 3,058	— 0,0091	4110
1213	4 H. Draconis . .	5.4	78 13,7	12 7 2,39	7	89,05	+ 2,875	— 0,1225	4112
1214	12 Virginis	6	10 52,5	12 7 49,87	4	86,88	+ 3,064	— 0,0034	4114
1215	1 Canum ven. . .	6	54 2,8	12 9 16,24	7	87,55	+ 2,998	— 0,0367	4121
1216	Draconis	5.4	70 48,7	12 9 53,35	9	88,28	+ 2,906	— 0,0740	4122
1217	δ Ursae maj . . .	3.4	57 38,6	12 9 59,81	13	87,42	+ 2,981	— 0,0418	4123
1218	6 Comae	5	15 30,7	12 10 25,01	6	86,22	+ 3,056	— 0,0057	4125
1219	2 Canum ven. . .	6.5	41 16,4	12 10 36,82	6	88,50	+ 3,018	— 0,0227	4126
1220	7 Comae	5.6	24 33,4	12 10 46,65	4	86,23	+ 3,044	— 0,0109	4127
1221	Canum ven. . .	5	33 40,6	12 10 58,45	5	86,49	+ 3,030	— 0,0167	4128
1222	8 Comae	6.7	23 38,7	12 13 45,91	4	86,22	+ 3,037	— 0,0101	4141
1223	Draconis	6.5	75 46,3	12 13 53,34	14	87,82	+ 2,752	— 0,0908	4143
1224	η Virginis	3.4	— 0 3,3	12 14 16,67	12	87,17	+ 3,073	+ 0,0027	4145
1225	10 Comae	6.7	29 4,5	12 14 18,79	4	86,24	+ 3,026	— 0,0133	4147

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1226	3 Canum ven. . .	6	49 35,7	12 14 23,76	6	87,27	+ 2,974	— 0,0300	4148
1227	c Virginis	5	3 55,5	12 14 45,85	5	86,31	+ 3,067	+ 0,0006	4151
1228	Comae	6	27 14,0	12 14 47,90	5	90,33	+ 3,028	— 0,0121	4153
1229	11 Comae	5	18 24,0	12 15 9,63	8	88,82	+ 3,043	— 0,0069	4156
1230	70 Ursae maj. . .	6	58 28,6	12 15 31,03	6	87,24	+ 2,925	— 0,0411	4159
1231	17 Virginis	6	5 55,0	12 16 56,56	5	86,23	+ 3,062	-- 0,0003	4168
1232	12 Comae	5	26 27,4	12 16 58,58	4	86,22	+ 3,023	— 0,0115	4169
1233	4 Canum ven. . .	6	43 9,1	12 18 22,41	6	86,34	+ 2,970	— 0,0281	4177
1234	13 Comae	5	26 42,5	12 18 47,53	5	86,21	+ 3,017	— 0,0114	4181
1235	Comae	6.7	24 32,2	12 19 43,15	4	86,21	+ 3,020	— 0,0101	4184
1236	71 Ursae maj. . .	6.7	57 23,3	12 19 47,61	7	87,24	+ 2,892	— 0,0379	4185
1237	6 Canum ven. . .	5.6	39 37,7	12 20 25,89	20	88,02	+ 2,974	— 0,0199	4188
1238	γ Comae	4.5	28 52,8	12 21 27,43	5	86,91	+ 3,004	— 0,0125	4195
1239	16 Comae	5	27 26,1	12 21 29,35	4	86,31	+ 3,007	— 0,0118	4196
1240	73 Ursae maj. . .	6	56 19,3	12 22 21,18	6	87,26	+ 2,877	— 0,0357	4203
1241	Comae	6	26 50,1	12 23 8,62	5	89,36	+ 3,004	— 0,0111	4205
1242	17 Comae	5	26 31,3	12 23 25,15	2	86,24	+ 3,004	— 0,0109	4207
1243	18 Comae	6	24 43,0	12 23 56,98	5	86.30	+ 3,008	— 0,0098	4209
1244	20 Comae	6	21 30,3	12 24 11,74	13	86,43	+ 3,017	— 0,0080	4212
1245	74 Ursae maj. . .	6.5	59 0,7	12 24 49,14	4	87,37	+ 2,832	— 0,0383	4216
1246	7 Canum ven. . .	6	52 8,6	12 24 50,80	6	87,31	+ 2,886	— 0,0302	4217
1247	75 Ursae maj. . .	6.7	59 22,6	12 24 55,19	9	87,56	+ 2,828	— 0,0387	4219
1248	Virginis	6	10 19,5	12 24 58,46	6	86,51	+ 3,046	— 0,0021	4218
1249	4 Draconis	5	69 48,6	12 25 17,16	8	88,29	+ 2,672	— 0,0562	4222
1250	21 Comae	6.5	25 10,5	12 25 31,12	3	86,24	+ 3,003	— 0,0100	4223
1251	20 Virginis	6.7	10 54,2	12 27 28,86	5	86,21	+ 3,042	— 0,0021	4228
1252	22 Comae	6.7	24 53,4	12 28 5,39	5	86,21	+ 2,997	— 0,0096	4232
1253	8 Canum ven. . .	4.5	41 57,3	12 28 31,29	7	87,21	+ 2,923	— 0,0205	4235
1254	κ Draconis	3.4	70 23,7	12 28 47,10	13	88,14	+ 2,602	— 0,0540	4239
1255	23 Comae	4.5	23 14,1	12 29 22,33	5	86,29	+ 2,999	— 0,0085	4240
1256	24 Comae sq. . . .	5.6	18 59,0	12 29 36,78	17	87,51	+ 3,013	— 0,0062	4242
1257	6 Draconis	6.5	70 37,7	12 30 4,49	8	87,28	+ 2,575	— 0,0531	4246
1258	9 Canum ven. . .	6	41 28,7	12 33 28,76	7	86,35	+ 2,900	— 0,0194	4258
1259	26 Comae	6	21 40,1	12 33 39,02	5	86,11	+ 2,995	— 0,0075	4260
1260	27 Virginis	6	11 1,8	12 36 1,68	4	86,24	+ 3,032	— 0,0017	4267

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1261	γ Virginis m. . .	3	—0 50,8	12 36 5,29	22	87,60	+ 3,076	+ 0,0043	4268
1262	ϱ Virginis	5	10 50,5	12 36 19,00	6	86,31	+ 3,032	— 0,0015	4271
1263	d¹ Virginis	6	7 24,6	12 36 22,78	5	86,34	+ 3,045	+ 0,0002	4274
1264	76 Ursae maj. . .	6	63 19,0	12 36 45,46	32	87,71	+ 2,648	— 0,0385	4276
1265	33 Virginis	6	10 9,3	12 40 47,10	6	86,26	+ 3,030	— 0,0009	4288
1266	27 Comae	5	17 10,7	12 41 9,09	5	86,22	+ 2,999	— 0,0044	4290
1267	Virginis	6.7	6 33,2	12 41 27,07	6	86,36	+ 3,045	+ 0,0009	4291
1268	34 Virginis	6.7	12 33,6	12 41 41,42	6	86,39	+ 3,019	— 0,0021	4292
1269	35 Virginis	6.7	4 10,4	12 42 15,36	5	86,58	+ 3,055	+ 0,0021	4296
1270	Ursae maj. . .	6	63 22,9	12 42 37,06	7	87,26	+ 2,579	— 0,0358	4300
1271	7 Draconis	6	67 23,5	12 43 4,59	8	88,28	+ 2,473	— 0,0384	4302
1272	29 Comae	6	14 48,4	12 43 23,45	4	86,24	+ 3,006	— 0,0030	4301
1273	11 Canum ven. . .	6	49 8,9	12 43 38,10	6	87,37	+ 2,781	— 0,0229	4303
1274	Ursae maj. . .	6.7	60 55,2	12 43 52,18	8	87,85	+ 2,615	— 0,0325	4305
1275	30 Comae	6	28 9,1	12 43 55,98	8	86,83	+ 2,936	— 0,0101	4304
1276	Canum ven. . .	6	38 6,9	12 44 57,09	5	86,57	+ 2,868	— 0,0154	4311
1277	37 Virginis	6.7	3 39,3	12 46 1,25	5	86,34	+ 3,055	+ 0,0026	4314
1278	31 Comae	5	28 8,3	12 46 20,52	8	86,37	+ 2,929	— 0,0097	4315
1279	35 Comae	5	21 50,6	12 47 52,80	6	86,38	+ 2,961	— 0,0063	4328
1280	41 Virginis	6	13 1,0	12 48 18,65	4	86,37	+ 3,008	— 0,0019	4329
1281	ε Ursae maj. . .	2	56 33,4	12 49 11,23	5	87,69	+ 2,641	— 0,0270	4335
1282	Canum ven. . .	6	47 47,6	12 49 55,18	7	87,34	+ 2,754	— 0,0207	4341
1283	δ Virginis	3	3 59,7	12 50 3,83	14	86,51	+ 3,052	+ 0,0026	4340
1284	12 Canum ven. sq.	3.2	38 54,8	12 50 52,96	3	87,69	+ 2,835	— 0,0151	4346
1285	8 Draconis	5	66 2,1	12 51 5,84	4	87,54	+ 2,407	— 0,0322	4347
1286	Ursae maj. . .	6	54 41,7	12 51 28,50	7	88,30	+ 2,652	— 0,0252	4348
1287	Canum ven. . .	6	46 46,4	12 52 6,44	6	87,39	+ 2,751	— 0,0196	4350
1288	36 Comae	5	18 0,2	12 53 29,12	10	86,34	+ 2,972	— 0,0040	4351
1289	37 Comae	5	31 22,7	12 55 0,77	5	86,60	+ 2,879	- 0,0105	4360
1290	38 Comae	6.7	17 43,0	12 55 43,28	9	86,36	+ 2,970	— 0,0037	4362
1291	9 Draconis	6	67 11,4	12 55 45,71	7	88,15	+ 2,306	— 0,0295	4365
1292	78 Ursae maj. . .	6	56 57,6	12 56 0,53	7	87,29	+ 2,575	— 0,0250	4366
1293	Comae	6	21 51,7	12 56 12,12	4	86,36	+ 2,942	— 0,0056	4364
1294	ε Virginis	3.2	11 33,0	12 56 42,14	11	87,27	+ 3,006	— 0,0007	4367
1295	Draconis	6	64 12,1	12 57 29,12	9	88,33	+ 2,886	— 0,0279	4371

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1296	14 Canum ven. . .	5	36 23,2	13 0 35,96	5	87,16	+ 2,815	— 0,0124	4384
1297	Canum ven. . .	6	45 51,4	13 0 55,52	6	87,83	+ 2,711	— 0,0173	4389
1298	39 Comae	6	21 44,6	13 0 59,64	7	86,33	+ 2,932	— 0,0052	4387
1299	40 Comae	6	23 12,4	13 1 1,46	5	86,60	+ 2,922	— 0,0059	4388
1300	41 Comae	5	28 12,9	13 1 54,10	6	86,70	+ 2,881	— 0,0082	4390
1301	Ursae maj. . .	6	62 37,9	13 2 2,15	8	87,62	+ 2,382	— 0,0252	4392
1302	Comae	6	28 8,7	13 2 37,81	8	86,36	+ 2,880	— 0,0081	4393
1303	ϑ Virginis	4.5	— 4 57,1	13 4 15,24	13	86,92	+ 3,105	+ 0,0078	4401
1304	Canum ven. . .	6.7	38 0,5	13 4 34,43	4	86,89	+ 2,782	— 0,0127	4407
1305	α Comae	4.5	18 6,7	13 4 38,35	8	86,34	+ 2,951	— 0,0032	4406
1306	15 Canum ven. . .	5.6	39 7,2	13 4 38,41	5	87,37	+ 2,770	— 0,0132	4408
1307	17 Canum ven. . .	6.5	39 5,0	13 5 0,17	13	88,30	+ 2,769	— 0,0132	4415
1308	Ursae maj. . .	6	57 25,1	13 5 2,30	6	87,27	+ 2,487	— 0,0221	4416
1309	18 Canum ven. . .	7	41 22,7	13 6 29,09	7	87,10	+ 2,736	— 0,0141	4420
1310	43 Comae	4.5	28 26,2	13 6 44,61	13	86,33	+ 2,865	— 0,0078	4421
1311	Virginis	6.7	12 8,5	13 7 4,49	4	86,29	+ 2,990	— 0,0002	4423
1312	Canum ven. . .	5	40 44,1	13 8 43,68	8	86,37	+ 2,732	— 0,0134	4433
1313	19 Canum ven. . .	6	41 26,2	13 10 35,27	6	87,03	+ 2,715	— 0,0135	4438
1314	ε Virginis	6.5	9 59,9	13 11 19,01	6	86,33	+ 3,000	+ 0,0009	4440
1315	Virginis	6	14 15,3	13 11 49,17	6	86,34	+ 2,968	— 0,0010	4444
1316	σ Virginis	5	6 3,0	13 12 2,98	5	86,31	+ 3,029	+ 0,0028	4446
1317	20 Canum ven. . .	5.4	41 9.1	13 12 36,58	33	88.34	+ 2,709	— 0,0130	4451
1318	Canum ven. . .	6	34 40,6	13 13 22,35	5	86,78	+ 2,781	— 0,0100	4453
1319	21 Canum ven. . .	5	50 15,6	13 13 33,97	7	87,25	+ 2,565	— 0,0168	4456
1320	Virginis	6	14 43,6	13 15 57,06	5	86,32	+ 2,958	— 0,0009	4468
1321	Virginis	6	2 39,9	13 16 6,12	4	86,26	+ 3,052	+ 0,0045	4470
1322	64 Virginis	6	5 43,9	13 16 36,94	8	86,37	+ 3,028	+ 0,0032	4472
1323	Canum ven. . .	6	37 36,5	13 18 54,71	6	86,36	+ 2,726	— 0,0106	4479
1324	α Virginis	1	—10 35,2	13 19 23,84	2	88,37	+ 3,157	+ 0,0115	4480
1325	ζ Ursae maj. pr.	2.3	55 30,0	13 19 29,72	32	87,75	+ 2,411	— 0,0169	4484
1326	Ursae maj. . .	6	55 29,8	13 19 30,65	8	87,28	+ 2,411	— 0,0170	4186
1327	g Ursae maj. . .	5	55 33,7	13 20 49,22	8	87,29	+ 2,399	— 0,0166	4493
1328	Draconis	6	63 49,5	13 22 14,38	9	87,31	+ 2,117	— 0,0149	4497
1329	70 Virginis	5	14 22,0	13 23 3,06	8	86,32	+ 2,951	— 0,0005	4499
1330	Gr. 2001	6.5	72 57,8	13 23 19,66	4	88.87	+ 1,521	+ 0,0076	4506

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1331	71 Virginis	6	11 23,3	13 23 46,02	4	86,35	+ 2,976	+ 0,0010	4504
1332	69 H. Ursae maj. .	5.6	60 30,8	13 24 24,96	22	87,68	+ 2,221	— 0,0153	4510
1333	Comae	6	24 48,3	13 25 39,44	8	86,29	+ 2,848	— 0,0046	4513
1334	Ursae min. . .	6	79 12,7	13 26 1,46	9	88,41	+ 0,501	+ 0,1058	4527
1335	Canum ven. . .	6	42 40,3	13 26 29,39	6	86,70	+ 2,618	— 0,0115	4519
1336	ζ Virginis	3.4	—0 2,0	13 29 5,32	25	86,86	+ 3,073	+ 0,0064	4532
1337	17 H. Canum ven. .	5.6	37 44,8	13 29 53,02	6	88,00	+ 2,677	— 0,0092	4536
1338	81 Ursae maj. . .	5.6	55 54,7	13 29 53,53	7	87,29	+ 2,317	— 0,0139	4540
1339	24 Canum ven. . .	5	49 34,7	13 29 57,75	7	87,33	+ 2,472	— 0,0130	4538
1340	Canum ven. . .	6	44 45,6	13 30 33,19	5	87,41	+ 2,562	— 0,0115	4545
1341	25 Canum ven. . .	5	36 51,3	13 32 34,51	4	86,37	+ 2,679	— 0,0085	4552
1342	Virginis	6	11 18,3	13 33 9,14	6	86,25	+ 2,965	+ 0,0016	4559
1343	Ursae maj. . .	6	51 16,5	13 33 18,65	6	87,27	+ 2,412	— 0,0126	4556
1344	Gr. 2029. . . .	6	71 48,1	13 34 32,49	11	88,65	+ 1,442	+ 0,0124	. . . .
1345	82 Ursae maj.	6	53 28,6	13 35 15,20	8	87,34	+ 2,344	+ 0,0124	4564
1346	2 Bootis	6	23 3,2	13 35 50,20	6	86,36	+ 2,841	— 0,0030	4566
1347	83 Ursae maj . . .	6.5	55 14,3	13 36 34,01	7	87,29	+ 2,285	— 0,0124	4568
1348	ο Virginis	5	4 5,7	13 37 31,95	6	86,25	+ 3,030	+ 0,0049	4570
1349	Bootis	6	23 15,3	13 38 33,39	6	86,36	+ 2,833	— 0,0029	4575
1350	Canum ven. . .	6	41 38,4	13 41 33,39	5	87,41	+ 2,568	— 0,0089	4596
1351	3 Bootis	6	26 15,3	13 41 36,98	8	86,37	+ 2,790	— 0,0038	4594
1352	τ Bootis	5.4	18 0,3	13 42 2,23	15	87,07	+ 2,886	— 0,0007	4597
1353	Ursae min. . .	6	78 36,9	13 42 11,69	10	86,40	+ 0,209	+ 0,1238	4614
1354	84 Ursae maj . . .	6	54 58,9	13 42 29,45	7	87,29	+ 2,247	— 0,0105	4605
1355	η Ursae maj . . .	2	49 51,7	13 43 12,40	12	88,20	+ 2,383	— 0,0103	4607
1356	Canum ven. . .	6	42 35,9	13 43 26,46	7	87,95	+ 2,536	— 0,0088	4609
1357	Canum ven. . .	6	31 43,2	13 43 40,97	7	86,68	+ 2,711	— 0,0055	4610
1358	υ Bootis.	4.5	16 20,6	13 44 10,34	7	86,28	+ 2,900	+ 0,0002	4615
1359	ε Bootis	5	21 48,6	13 44 30,77	5	87,42	+ 2,837	— 0,0021	4618
1360	Bootis	6	19 10,6	13 44 51.33	5	86,37	+ 2,867	— 0,0009	4621
1361	Canum ven. . .	5	35 12,7	13 46 17,99	4	86,38	+ 2,650	— 0,0063	4628
1362	Canum ven. . .	6	34 59,9	13 46 56,46	7	86,39	+ 2,651	— 0,0063	4632
1363	7 Bootis	6	18 28,5	13 46 57,60	5	86,25	+ 2,870	—0,0005	4637
1364	ι Draconis	5	65 16,0	13 48 13,22	14	87,76	+ 1,751	— 0,0004	4646
1365	η Bootis	3	18 57,0	13 49 26,88	17	87,04	+ 2,861	— 0,0006	4648

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
1366	86 Ursae maj. . .	6	54 16,2	13 49 48,19	8	87,33	+ 2,216	— 0,0087	4649
1367	Ursae min. . .	6.7	79 32,3	13 50 24,56	10	88,40	— 0,282	+ 0,1784	4659
1368	9 Bootis	5	28 1,9	13 51 32,89	8	86,31	+ 2,740	— 0,0036	4656
1369	Bootis	6	15 11,2	13 53 21,37	5	86,38	+ 2,900	+ 0,0011	4662
1370	10 Bootis	6	22 14,0	13 53 29,75	5	86,32	+ 2,813	— 0,0015	4664
1371	τ Virginis	4	2 4,6	13 56 2,88	22	88,27	+ 3,049	+ 0,0065	4672
1372	11 Bootis	6	27 55,1	13 56 11,22	7	86,78	+ 2,729	— 0,0032	4675
1373	Draconis. . . .	6.7	69 12,5	13 59 25,10	7	87,30	+ 1,320	+ 0,0179	4689
1374	α Draconis. . . .	3.4	64 54,1	14 1 24,70	34	88,48	+ 1,630	+ 0,0056	4696
1375	Bootis	6.5	44 22,6	14 3 32,05	7	87,08	+ 2,401	— 0,0061	4699
1376	13 Bootis	6	49 58,7	14 4 10,82	7	87,30	+ 2,252	— 0,0060	4701
1377	*d* Bootis	5	25 36,8	14 5 22,93	14	86,92	+ 2,739	— 0,0017	4706
1378	Virginis	5.4	2 55,6	14 6 41,72	5	86,40	+ 3,037	+ 0,0065	4713
1379	14 Bootis	6	13 28,5	14 8 47,83	5	86,44	+ 2,902	+ 0,0024	4721
1380	4 Ursae min. . .	5	78 3,9	14 9 16,99	28	89,22	— 0,309	+ 0,1527	4733
1381	15 Bootis	6	10 37,1	14 9 27,70	7	86,88	+ 2,938	+ 0,0034	4724
1382	κ Bootis	4.5	52 18,3	14 9 32,58	7	87,31	+ 2,146	— 0,0045	4726
1383	Bootis	6	42 2,1	14 9 57,34	5	87,80	+ 2,425	— 0,0051	4728
1384	Ursae min. . .	6.5	69 57,0	14 10 1,44	11	87,90	+ 1,104	+ 0,0281	4732
1385	α Bootis	1	19 45,3	14 10 38,91	6	86,38	+ 2,813	+ 0,0004	4729
1386	Bootis	6	19 25,5	14 10 53,89	7	86,59	+ 2,818	+ 0,0005	4731
1387	Bootis	6	53 2,9	14 11 25,63	8	88,25	+ 2,109	— 0,0042	4736
1388	λ Bootis	4	46 35,6	14 12 12,12	5	89,15	+ 2,302	— 0,0050	4741
1389	ι Bootis	4.5	51 52,5	14 12 16,24	2	87,33	+ 2,143	— 0,0044	4742
1390	*A* Bootis	5	36 1,0	14 13 20,77	5	87,77	+ 2,538	— 0,0037	4747
1391	Bootis	6	51 49,0	14 13 26,53	3	87,36	+ 2,138	— 0,0042	4752
1392	18 Bootis	6	13 30,7	14 13 56,81	5	86,36	+ 2,895	+ 0,0027	4751
1393	20 Bootis	5	16 48,7	14 14 32,92	5	86,41	+ 2,848	+ 0,0016	4753
1394	Bootis	6	52 32,4	14 14 40,14	8	87,30	+ 2,105	— 0,0037	4756
1395	Bootis	6	39 18,0	14 15 16,78	4	87,40	+ 2,464	— 0,0041	4758
1396	Bootis	6	8 56,8	14 15 58,06	6	86,33	+ 2,953	+ 0,0043	4766
1397	Virginis	5.6	6 19,2	14 18 42,91	6	86,56	+ 2,988	+ 0,0054	4773
1398	*f* Bootis	5	19 43,3	14 21 20,44	5	86,39	+ 2,795	+ 0,0009	4785
1399	ϑ Bootis	4.3	52 21,6	14 21 27,14	45	88,33	+ 2,069	— 0,0025	4789
1400	φ Virginis	5	—1 44,1	14 22 32,09	19	86,82	+ 3,096	+ 0,0088	4792

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1401	Bootis	6	36 41,3	14 23 43,18	6	86,63	+ 2,488	— 0,0028	4797
1402	*g* Bootis	6	50 20,2	14 24 48,44	8	87,30	+ 2,120	— 0,0025	4804
1403	Bootis	6.7	42 17,6	14 25 16,67	6	87,25	+ 2,352	— 0,0032	4805
1404	ϱ Bootis	4.3	30 51,3	14 27 5,40	8	86,64	+ 2,594	— 0,0016	4808
1405	Bootis	6	27 9,8	14 27 28,19	6	86,41	+ 2,661	— 0,0007	4809
1406	26 Bootis . , . . .	6	22 44,7	14 27 32,59	5	86,33	+ 2,736	+ 0,0005	4810
1407	γ Bootis	3.2	38 47,4	14 27 38,91	13	89,63	+ 2,427	— 0,0027	4812
1408	5 Ursae min. . .	5.4	76 11,1	14 27 45,76	10	88,39	— 0,194	+ 0,1190	4822
1409	Draconis	6	63 40,3	14 28 9,30	9	87,33	+ 1,445	+ 0,0117	4817
1410	Gr. 2125	6	60 42,6	14 28 43,60	11	87,65	+ 1,632	+ 0,0061	. . . .
1411	Bootis	6	37 26,7	14 28 50,59	6	87,42	+ 2,453	— 0,0024	4816
1412	Bootis	6	33 1,0	14 29 30,92	6	86,47	+ 2,546	— 0,0018	4820
1413	σ Bootis	5	30 13,4	14 29 53,46	6	86,34	+ 2,599	— 0,0012	4823
1414	Bootis	6.7	37 6,6	14 30 8,74	7	87,13	+ 2,456	— 0,0023	4825
1415	Bootis	6	49 50,9	14 30 48,97	7	87,38	+ 2,103	— 0,0017	4830
1416	Bootis	6	44 7,0	14 34 4,85	7	87,36	+ 2,265	— 0,0022	4841
1417	33 Bootis	6.5	44 52,8	14 34 44,57	22	88,12	+ 2,240	— 0,0020	4843
1418	Bootis	5.6	54 29,9	14 34 45,93	7	87,31	+ 1,901	+ 0,0010	4845
1419	Bootis	6	14 0,4	14 35 26,80	5	86,34	+ 2,863	+ 0,0045	4846
1420	π Bootis pr. . . .	4.5	16 53,4	14 35 33,35	10	89,31	+ 2,818	+ 0,0025	4847
1421	ζ Bootis med. . .	3.4	14 12,0	14 35 53,72	1	86,34	+ 2,860	+ 0,0033	4849
1422	31 Bootis	5.4	8 38,0	14 36 14,60	7	86,45	+ 2,945	+ 0,0050	4850
1423	32 Bootis	6	12 8,1	14 36 26,44	6	86,63	+ 2,890	+ 0,0040	4853
1424	μ Virginis	4	—5 10,8	14 37 15,75	8	89,55	+ 3,149	+ 0,0104	4855
1425	Bootis	6	37 13,5	14 38 12,60	6	87,42	+ 2,426	— 0,0016	4863
1426	34 Bootis	6	26 59,8	14 38 35,29	5	86,34	+ 2,638	+ 0,0001	4864
1427	Draconis	6	61 43,9	14 39 18,62	8	87,31	+ 1,480	+ 0,0105	4874
1428	Bootis	6.5	40 55,5	14 39 28,46	5	87,43	+ 2,330	— 0,0017	4870
1429	o Bootis	5.4	17 25,8	14 40 6,48	5	86,46	+ 2,802	+ 0,0025	4873
1430	ε^2 Bootis	2.3	27 32,3	14 40 11,03	6	86,46	+ 2,624	0,0000	4876
1431	109 Virginis	4.3	2 21,4	14 40 41,23	25	88,86	+ 3,037	+ 0,0074	4878
1432	Bootis	6	29 4,3	14 45 14,32	6	86,37	+ 2,582	0,0000	4902
1433	*h* Bootis	6	46 34,5	14 45 23,62	7	87,33	+ 2,139	— 0,0005	4903
1434	39 Bootis	6	49 10,4	14 45 57,19	6	87,34	+ 2,047	+ 0,0002	4907
1435	Bootis	6	37 43,4	14 46 9,18	6	86,94	+ 2,387	— 0,0009	4906

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1436	ξ Bootis	4	19 33,5	14 46 18,83	4	86,26	+ 2,757	+ 0,0022	4905
1437	Gr. 2164 . . .	6.5	59 44,5	14 48 38,89	44	88,80	+ 1,534	+ 0,0091	4918
1438	P. XIV. 221 . .	6	14 53,5	14 51 1,81	11	87,12	+ 2,831	+ 0,0035	4926
1439	β Ursae min. . .	2	74 36,3	14 51 2,01	5	88,36	— 0,224	+ 0,1010	4936
1440	1 Serpentis . . .	6	0 16,5	14 51 54,75	15	87,44	+ 3,068	+ 0,0083	4931
1441	Bootis	6	16 49,9	14 52 3,82	5	86,46	+ 2,796	+ 0,0031	4933
1442	Bootis	6	50 4,7	14 52 44,21	8	87,33	+ 1,979	+ 0,0013	4937
1443	Bootis	6	40 4,9	14 55 12,64	5	87,48	+ 2,294	— 0,0002	4942
1444	40 Bootis	5	39 42,1	14 55 23,84	5	87,41	+ 2,304	— 0,0002	4943
1445	2 Serpentis. . . .	6	0 17,7	14 56 10,88	13	87,40	+ 3,068	+ 0,0083	4944
1446	Bootis	6	47 42,7	14 56 53,64	5	87,33	+ 2,047	+ 0,0010	4952
1447	ω Bootis	5.4	25 26,6	14 57 17,40	6	86,43	+ 2,628	+ 0,0013	4953
1448	110 Virginis	5	2 31,4	14 57 20,58	4	86,47	+ 3,030	+ 0,0075	4951
1449	γ Scorpii	3.4	—24 51,0	14 57 37,96	3	86,79	+ 3,506	+ 0,0209	4950
1450	β Bootis	3	40 49,5	14 57 48,22	4	88,45	+ 2,263	0,0000	4958
1451	Draconis. . . .	6	60 38,2	14 58 52,51	8	87,40	+ 1,401	+ 0,0125	4967
1452	Bootis	5.6	45 4,4	14 59 13,42	6	87,42	+ 2,128	+ 0,0006	4965
1453	ψ Bootis	4.5	27 22,6	14 59 43,94	14	86,42	+ 2,584	+ 0,0011	4969
1454	i Bootis	5	48 5,0	15 0 10,09	6	87,33	+ 2,019	+ 0,0015	4974
1455	9 Ursae min. . .	6.7	72 11,7	15 0 18,71	9	88,37	+ 0,125	+ 0,0441	4978
1456	k Bootis	5	48 34,6	15 1 47,27	6	87,45	+ 1,993	+ 0,0018	4980
1457	Draconis. . . .	6	66 20,3	15 2 17,36	7	87,41	+ 0,893	+ 0,0293	4989
1458	c Bootis	5.4	25 17,9	15 2 28,13	5	86,36	+ 2,621	+ 0,0016	4981
1459	Draconis. . . .	5.6	54 58,8	15 3 8,26	7	87,33	+ 1,705	+ 0,0057	4992
1460	b Bootis	6	26 43,4	15 3 38,90	5	86,44	+ 2,589	+ 0,0014	4991
1461	Bootis	6.7	25 31,8	15 3 48,13	5	86,43	+ 2,614	+ 0,0016	4993
1462	Bootis	6.7	38 40,6	15 9 24,29	8	87,43	+ 2,285	+ 0,0008	5026
1463	3 Serpentis. . . .	6.5	5 20,9	15 9 43,36	4	86,44	+ 2,980	+ 0,0065	5024
1464	χ Bootis	5	29 34,4	15 9 53,26	6	86,36	+ 2,513	+ 0,0013	5031
1465	Bootis	6	42 34,9	17 10 11,73	6	87,48	+ 2,168	+ 0,0012	5033
1466	4 Serpentis. . . .	6	0 46,8	15 10 12,89	9	87,08	+ 3,059	+ 0,0081	5030
1467	δ Bootis	3	33 43,5	15 11 4,14	6	86,77	+ 2,412	+ 0,0010	5036
1468	1 H. Ursae min..	5.6	67 45,9	15 13 22,47	24	88,09	+ 0,629	+ 0,0381	5058
1469	Bootis	6	20 58,5	15 13 28,60	5	86,35	+ 2,689	+ 0,0028	5048
1470	5 Serpentis. . . .	5	2 10,9	15 13 41,77	5	86,42	+ 3,034	+ 0,0076	5047

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1471	6 Serpentis . . .	6	1 6,9	15 15 26,04	11	86,91	+ 3,053	+ 0,0079	5059
1472	o Coronae bor.. .	6	30 0,9	15 15 35,49	5	86,46	+ 2,491	+ 0,0015	5061
1473	7 Serpentis. . . .	6.7	12 57,7	15 16 10,56	5	86,35	+ 2,839	+ 0,0046	5067
1474	Bootis	6	52 21,3	15 16 51,19	7	87,34	+ 1,760	+ 0,0052	5071
1475	11 Ursae min. . .	5	72 13,4	15 17 11,29	9	88,08	— 0,088	+ 0,0740	5079
1476	50 Bootis	5.6	33 19,6	15 17 24,30	6	86,49	+ 2,406	+ 0,0014	5072
1477	Bootis	6	39 58,5	15 18 33,23	6	87,45	+ 2,219	+ 0,0015	5076
1478	η Coronae bor.. .	5.6	30 41,1	15 19 39,60	5	86,41	+ 2,468	+ 0,0016	5075
1479	μ Bootis	4.3	37 45,8	15 20 20,11	1	90,46	+ 2,278	+ 0,0015	5084
1480	τ^1 Serpentis. . . .	5.6	15 48,9	15 20 41,23	14	86,83	+ 2,782	+ 0,0039	5085
1481	Draconis	6	63 44,1	15 20 48,19	7	87,36	+ 0,991	+ 0,0229	5091
1482	γ Ursae min. . .	3	72 13,5	15 20 54,63	7	88,15	— 0,133	+ 0,0744	5094
1483	ι Draconis	3	59 21,1	15 22 28,96	8	87,38	+ 1,329	+ 0,0134	5097
1484	10 Serpentis. . . .	6	2 13,5	15 23 4,88	4	86,41	+ 3,032	+ 0,0076	5095
1485	β Coronae bor. .	4.3	29 29,1	15 23 17,67	11	86,80	+ 2,486	+ 0,0019	5098
1486	Draconis	6	61 3,0	15 25 40,57	9	87,38	+ 1,183	+ 0,0168	5115
1487	Draconis	6	62 39,3	15 25 43,40	6	87,40	+ 1,051	+ 0,0205	5116
1488	Bootis	6	48 5,5	15 25 53,14	6	87,46	+ 1,907	+ 0,0033	5113
1489	ν' Bootis	4.5	41 12,5	15 26 58,72	23	87,89	+ 2,153	+ 0,0021	5122
1490	ν'' Bootis	5.4	41 16,4	15 27 50,66	13	87,01	+ 2,148	+ 0,0022	5130
1491	ϑ Coronae bor. .	4	31 43,8	15 28 29,55	6	87,15	+ 2,420	+ 0,0020	5131
1492	Draconis	6	64 34,7	15 29 22,94	8	87,35	+ 0,846	+ 0,0264	5147
1493	δ Serpentis . . .	3.4	10 54,4	15 29 32,80	5	86,34	+ 2,868	+ 0,0052	5135
1494	α Coronae bor. .	2	27 5,1	15 30 1,84	3	88,14	+ 2,530	+ 0,0024	5143
1495	τ^3 Serpentis	6	18 1,4	15 30 33,72	5	86,41	+ 2,727	+ 0,0037	5146
1496	16 Serpentis. . . .	6	10 22,7	15 31 12,46	6	86,47	+ 2,878	+ 0,0054	5150
1497	μ Coronae bor. .	5	39 22,5	15 31 12,70	5	86,52	+ 2,199	+ 0,0021	5155
1498	Bootis	6	43 31,9	15 31 23,69	5	87,42	+ 2,060	+ 0,0040	5157
1499	τ^4 Serpentis . . .	6	16 29,0	15 31 25,18	5	86,41	+ 2,757	+ 0,0040	5153
1500	φ Bootis	5	40 42,7	15 33 52,69	3	87,47	+ 2,148	+ 0,0023	5168
1501	ϑ Ursae min. . .	6.5	77 42,9	15 34 41,49	10	88,57	— 1,873	+ 0,1906	5191
1502	Bootis	6	47 9,6	15 34 44,80	6	87,47	+ 1,911	+ 0,0039	5177
1503	ζ Coronae bor. sq.	4.5	36 59,6	15 35 14,10	3	87,45	+ 2,260	+ 0,0022	5178
1504	Bootis	6.5	50 46,9	15 35 21,59	6	87,37	+ 1,750	+ 0,0056	5181
1505	τ^6 Serpentis	6	16 22,8	15 35 55,66	7	86,37	+ 2,755	+ 0,0041	5180

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1506	χ Serpentis . . .	6	13 12,1	15 36 36,82	5	86,42	+ 2,818	+ 0,0047	5185
1507	ι Serpentis . . .	6	20 1,5	15 36 38,79	6	86,46	+ 2,677	+ 0,0035	5187
1508	τ⁷ Serpentis. . . .	6	18 48,9	15 36 57,78	4	86,54	+ 2,703	+ 0,0046	5189
1509	γ Coronae bor.. .	4.3	26 38,7	15 38 7,43	4	87,46	+ 2,526	+ 0,0027	5192
1510	ψ Serpentis. . . .	6	2 52,1	15 38 29,85	5	86,38	+ 3,018	+ 0,0072	5194
1511	α Serpentis . . .	2.3	6 46,3	15 38 50,98	16	87,26	+ 2,943	+ 0,0062	5196
1512	π Coronae bor. .	6	32 51,8	15 39 39,22	5	86,53	+ 2,366	+ 0,0023	5204
1513	τ⁸ Serpentis . . .	6.5	17 36,6	15 39 42,39	6	86,43	+ 2,725	+ 0,0039	5203
1514	Draconis	6.5	52 42,5	15 39 51,44	7	87,36	+ 1,635	+ 0,0072	5210
1515	λ Serpentis . . .	4.5	7 41,9	15 40 6,28	6	86,37	+ 2,924	+ 0,0060	5214
1516	β Serpentis . . .	3.4	15 46,0	15 41 6,59	13	87,84	+ 2,762	+ 0,0043	5216
1517	κ Serpentis . . .	4	18 28,9	15 43 47,31	3	86,76	+ 2,702	+ 0,0038	5234
1518	μ Serpentis . . .	3.4	—3 5,6	15 43 52,72	4	88,03	+ 3,132	+ 0,0088	5230
1519	Coronae bor. .	6	28 29,7	15 44 2,57	5	86,40	+ 2,471	+ 0,0027	5236
1520	ω Serpentis . . .	6	2 31,9	15 44 44,31	5	86,47	+ 3,023	+ 0,0072	5238
1521	Draconis	5.6	55 42,8	15 44 58,40	6	87,47	+ 1,442	+ 0,0101	5248
1522	δ Coronae bor.. .	4.5	26 24,3	15 44 58,83	5	86,54	+ 2,521	+ 0,0029	5244
1523	12 H. Draconis . .	5.6	62 56,4	15 44 59,52	16	87,46	+ 0,897	+ 0,0224	5249
1524	ε Serpentis . . .	3.4	4 48,6	15 45 19,93	13	87,78	+ 2,979	+ 0,0066	5245
1525	ρ Serpentis . . .	5	21 18,5	15 46 26,14	5	86,41	+ 2,637	+ 0,0035	5252
1526	κ Coronae bor . .	5.4	35 59,9	15 47 5,23	6	86,68	+ 2,260	+ 0,0026	5259
1527	ζ Ursae min. . .	4.5	78 8,0	15 47 59,62	14	88,94	— 2,263	+ 0,2016	5285
1528	χ Herculis	4.5	42 45,6	15 48 52,22	6	87,11	+ 2,034	+ 0,0034	5271
1529	Draconis	6	56 9,1	15 49 43,09	7	87,36	+ 1,393	+ 0,0108	5279
1530	Serpentis . . .	6	20 38,0	15 49 43,75	5	86,35	+ 2,648	+ 0,0036	5273
1531	2 Herculis	6	43 27,5	15 50 57,74	5	87,52	+ 2,001	+ 0,0036	5287
1532	φ Serpentis . . ,	6	14 43,8	15 51 10,03	5	86,43	+ 2,774	+ 0,0045	5293
1533	γ Serpentis . . .	4.3	16 1,3	15 51 22,22	4	86,46	+ 2,747	+ 0,0043	5284
1534	λ Coronae bor. .	6.5	38 15,9	15 51 47,52	7	87,08	+ 2,179	+ 0,0029	5295
1535	4 Herculis	6	42 53,2	15 51 48,38	4	87,47	+ 2,020	+ 0,0038	5298
1536	ε Coronae bor. .	4	27 11,8	15 53 1,99	4	87,42	+ 2,488	+ 0,0030	5302
1537	Draconis	6	59 13,7	15 53 41,24	5	87,43	+ 1,160	+ 0,0150	5307
1538	Coronae bor. .	6	36 57,4	15 54 53,89	5	86,55	+ 2,213	+ 0,0029	5310
1539	Gr. 2296 . . .	5	55 3,6	15 55 10,73	3	89,47	+ 1,436	+ 0,0098	5313
1540	Serpentis . . .	6	4 44,1	15 55 23,49	6	86,41	+ 2,978	+ 0,0065	5309

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1541	Bootis	6	50 11,7	15 55 56,97	5	87,50	+ 1,697	+ 0,0063	5316
1542	τ Herculis	6.5	18 7,4	15 56 17,82	5	86,46	+ 2,697	+ 0,0040	5315
1543	ϱ Coronae bor. .	6.5	33 38,1	15 56 50,33	7	87,46	+ 2,308	+ 0,0029	5319
1544	ι Coronae bor. .	5.4	30 9,5	15 57 2,09	5	86,93	+ 2,405	+ 0,0029	5321
1545	π Serpentis	5.4	23 6,6	15 57 33,52	5	86,53	+ 2,582	+ 0,0034	5322
1546	48 Serpentis . . .	6.7	5 17,4	15 58 19,33	5	86,41	+ 2,966	+ 0,0062	5325
1547	β Scorpii	2	—19 30,2	15 59 2,46	9	86,46	+ 3,482	+ 0,0141	5329
1548	Coronae bor. .	6	36 56,1	15 59 16,74	6	86,89	+ 2,204	+ 0,0030	5336
1549	Draconis	6.7	53 13,3	15 59 17,09	6	87,47	+ 1,526	+ 0,0083	5341
1550	υ Herculis	4.5	46 20,5	15 59 22,21	6	87,46	+ 1,661	+ 0,0047	5338
1551	ϑ Draconis	4.3	58 51,6	15 59 49,96	8	88,06	+ 1,157	+ 0,0145	5348
1552	45 Serpentis. . . .	6	10 11,2	16 2 22,39	11	86,45	+ 2,863	+ 0,0053	5359
1553	46 Serpentis. . . .	6	10 22,5	16 2 51,20	1	86,54	+ 2,859	+ 0,0052	5361
1554	κ Herculis	5.6	17 20,4	16 3 6,95	5	86,50	+ 2,708	+ 0,0041	5367
1555	47 Serpentis . . .	6	8 49,6	16 3 9,82	5	86,49	+ 2,891	+ 0,0055	5366
1556	τ Coronae bor. .	5.4	36 46,2	16 4 56,93	8	87,00	+ 2,197	+ 0,0031	5385
1557	φ Herculis	4	45 13,4	16 5 17,98	15	88,87	+ 1,890	+ 0,0045	5388
1558	Draconis	6.5	68 6,0	16 6 1,47	6	87,55	+ 0,150	+ 0,0406	5406
1559	Herculis	6	16 57,0	16 6 29,95	5	86,41	+ 2,714	+ 0,0042	5392
1560	14 Herculis	6.7	44 6,7	16 6 50,25	7	87,49	+ 1,931	+ 0,0043	5400
1561	Draconis	6	58 13,5	16 6 53,54	8	87,45	+ 1,173	+ 0,0127	5415
1562	10 Herculis	6	23 46,8	16 6 57,15	5	86,42	+ 2,554	+ 0,0034	5399
1563	Coronae bor. . .	6	36 42,6	16 7 46,80	5	86,53	+ 2,193	+ 0,0032	5411
1564	9 Herculis	6	5 18,2	16 7 48,84	5	86,53	+ 2,963	+ 0,0061	5405
1565	Herculis	6.7	42 39,4	16 8 9,18	4	87,46	+ 1,985	+ 0,0040	5417
1566	δ Ophiuchi. . . .	3	—3 24,6	16 8 34,87	9	87,80	+ 3,143	+ 0,0081	5414
1567	σ Coronae bor. . .	6	34 8,2	16 10 33,66	5	86,50	+ 2,267	+ 0,0030	5432
1568	17 Herculis	6	23 23,8	16 11 37,38	5	86,39	+ 2,558	+ 0,0035	5434
1569	υ Coronae bor. . .	6	29 25,3	16 12 20,39	6	86,47	+ 2,400	+ 0,0031	5440
1570	ε Ophiuchi . . .	3.4	—4 25,4	16 12 30,05	16	86,90	+ 3,165	+ 0,0082	5437
1571	19 Ursae min. . .	6.5	76 9,3	16 13 57,70	17	89,44	— 1,781	+ 0,1221	5462
1572	Herculis	6	21 23,9	16 15 18,08	5	86,39	+ 2,602	+ 0,0037	5452
1573	20 Ursae min. . .	6.7	75 29,0	16 15 18,43	6	87,56	— 1,561	+ 0,1116	5475
1574	Draconis	6	60 2,3	16 15 25,11	7	87,41	+ 0,992	+ 0,0161	5459
1575	Herculis	6	49 18,1	16 16 6,78	6	87,47	+ 1,675	+ 0,0062	5461

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C
			° ′	h m s			s	s	
1576	Herculis	6.7	39 58,3	16 16 9,10	5	87,08	+ 2,065	+ 0,0037	5460
1577	Ursae min. . .	6	73 39,8	16 16 22,17	9	87,97	— 1,030	+ 0,0831	5483
1578	τ Herculis	3.4	46 34,5	16 16 26,02	11	88,40	+ 1,802	+ 0,0052	5463
1579	σ Serpentis . . .	5	1 17,3	16 16 30,10	9	86,40	+ 3,046	+ 0,0068	5456
1580	γ Herculis	3.4	19 24,7	16 17 4,04	12	87,77	+ 2,648	+ 0,0039	5466
1581	ξ Coronae bor. . .	5	31 8,8	16 17 48,78	5	86,52	+ 2,344	+ 0,0032	5473
1582	ν¹ Coronae bor. .	5	34 3,5	16 18 13,01	5	86,56	+ 2,256	+ 0,0032	5479
1583	ν² Coronae bor. .	5	33 57,6	16 18 20,61	5	86,56	+ 2,259	+ 0,0032	5480
1584	23 Herculis	6	32 35,4	16 18 43,24	6	86,99	+ 2,300	+ 0,0032	5484
1585	ω Herculis	5	14 17,2	16 20 20,23	12	86,64	+ 2,764	+ 0,0044	5490
1586	η Ursae min. . .	5.6	76 0,5	16 20 43,53	10	88,06	— 1,797	+ 0,1182	5511
1587	Serpentis . . .	6	2 35,8	16 21 17,68	5	86,35	+ 3,017	+ 0,0063	5493
1588	25 Herculis	6.5	37 38,7	16 21 29,16	6	86,44	+ 2,135	+ 0,0035	5496
1589	Draconis	6	52 32,4	16 21 42,49	6	87,50	+ 1,486	+ 0,0080	5499
1590	Gr. 2343. . , .	6.5	55 27,3	16 22 1,04	9	89,36	+ 1,305	+ 0,0103	5502
1591	Draconis	6.5	69 21,8	16 22 3,82	8	87,44	— 0,158	+ 0,0444	5514
1592	Draconis	6	61 56,8	16 22 19,86	5	87,51	+ 0,788	+ 0,0191	5509
1593	η Draconis	3.2	61 45,8	16 22 30,44	14	89,34	+ 0,805	+ 0,0187	5512
1594	g Herculis , . . .	5.6	42 7,4	16 25 1,78	5	87,05	+ 1,966	+ 0,0041	5523
1595	λ Ophiuchi. . . .	4.3	2 13,5	16 25 21,92	17	87,61	+ 3,025	+ 0,0062	5520
1596	β Herculis	2.3	21 43,8	16 25 29,42	3	86,53	+ 2,584	+ 0,0036	5525
1597	Herculis	6	20 43,2	16 25 47,20	5	86,38	+ 2,609	+ 0,0037	5527
1598	Herculis	6	22 25,9	16 26 31,10	6	86,47	+ 2,566	+ 0,0036	5530
1599	κ Herculis	6	5 45,3	16 27 10,86	6	86,47	+ 2,949	+ 0,0056	5531
1600	h Herculis	5.4	11 43,5	16 27 27,45	3	86,53	+ 2,817	+ 0,0047	5532
1601	A Draconis	5	69 0,4	16 28 11,81	9	87,45	— 0,135	+ 0,0410	5545
1602	Herculis	6	10 36,1	16 28 21,01	8	86,39	+ 2,842	+ 0,0048	5537
1603	32 Herculis	6	30 43,8	16 29 11,95	5	86,52	+ 2,339	+ 0,0032	5541
1604	Herculis	6.7	38 19,0	16 29 51,37	5	86,54	+ 2,09[illegible]	+ 0,0036	5546
1605	Draconis	6	50 22,4	16 30 2,78	6	87,47	+ 1,581	+ 0,0067	5549
1606	σ Herculis	4.5	42 39,8	16 30 33,43	28	89,07	+ 1,933	+ 0,0043	5552
1607	Draconis	6	61 3,3	16 30 52,50	5	87,57	+ 0,836	+ 0,0168	5560
1608	ζ Ophiuchi . . .	3.2	–10 20,6	16 31 6,09	3	86,46	+ 3,298	+ 0,0087	5548
1609	Draconis	6	52 27,9	16 31 17,93	7	87,52	+ 1,461	+ 0,0078	5559
1610	33 Herculis	6	7 19,9	16 31 31,06	7	86,38	+ 2,913	+ 0,0052	5558

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1611	Ursae min. . .	6	79 11,9	16 31 52,16	12	88,56	— 3,423	+ 0,1988	5592
1612	Herculis. . . .	6	46 50,2	16 32 58,64	5	86,57	+ 1,749	+ 0,0053	5568
1613	16 Draconis	5.6	53 7,3	16 33 35,36	6	87,47	+ 1,416	+ 0,0082	5574
1614	17 Draconis	6	53 8,7	16 33 37,85	6	87,47	+ 1,414	+ 0,0082	5575
1615	Gr. 2373. . . .	6	77 39,9	16 35 22,91	1	89,54	— 2,629	+ 0,1424	5611
1616	42 Herculis	5.4	49 8,6	16 35 45,68	7	87,48	+ 1,630	+ 0,0061	5596
1617	Draconis. . . .	6.5	56 13,8	16 35 47,23	6	87,43	+ 1,207	+ 0,0105	5599
1618	Draconis. . . .	6.7	63 17,7	16 35 48,53	5	87,51	+ 0,592	+ 0,0184	5601
1619	Herculis	6	25 4,3	16 36 26,94	5	86,43	+ 2,488	+ 0,0034	5597
1620	ζ Herculis	3.2	31 48,1	16 37 8,59	16	86,60	+ 2,297	+ 0,0033	5604
1621	η Herculis	3	39 7,9	16 39 7,52	29	88,33	+ 2,052	+ 0,0037	5617
1622	Herculis	6	36 42,9	16 39 9,00	6	86,50	+ 2,137	+ 0,0038	5615
1623	Herculis	6	34 14,5	16 39 48,26	5	86,46	+ 2,218	+ 0,0034	5619
1624	16 Ophiuchi . . .	6.7	1 13,3	16 39 54,35	10	86,84	+ 3,046	+ 0,0059	5618
1625	*g* Draconis	5.6	64 47,9	16 40 9,46	8	87,44	+ 0,403	+ 0,0232	5628
1626	Herculis	6	15 56,9	16 40 23,66	5	86,41	+ 2,713	+ 0,0040	5620
1627	*i* Herculis	6.5	8 47,0	16 40 33,06	6	86,52	+ 2,878	+ 0,0047	5621
1628	Draconis. . . .	5.6	55 58,5	16 40 43,41	7	87,49	+ 1,216	+ 0,0100	5629
1629	19 Ophiuchi. . . .	6	2 15,8	16 41 37,01	7	86,49	+ 3,023	+ 0,0056	5627
1630	*l* Herculis	6	5 26,7	16 42 21,50	6	86,39	+ 2,952	+ 0,0051	5631
1631	Gr. 2377 . . .	5	56 58,7	16 43 12,79	35	87,98	+ 1,130	+ 0,0108	5643
1632	Herculis	6.7	42 26,1	16 43 48,61	5	86,46	+ 1,917	+ 0,0042	5644
1633	Herculis	6	13 27,2	16 44 30,01	7	86,42	+ 2,770	+ 0,0041	5647
1634	Draconis. . . .	6	55 36,3	16 44 35,97	2	87,46	+ 1,225	+ 0,0095	5658
1635	*k* Herculis	6.5	7 26,3	16 44 58,89	4	86,41	+ 2,907	+ 0,0048	5648
1636	21 Ophiuchi . . .	6	1 24,2	16 45 50,21	8	86,85	+ 3,042	+ 0,0030	5659
1637	52 Herculis	5	46 10,5	16 46 1,06	5	86,95	+ 1,752	+ 0,0050	5667
1638	50 Herculis	6	29 59,6	16 46 21,39	6	86,48	+ 2,340	+ 0,0033	5666
1639	49 Herculis	6	15 9,6	16 47 4,38	31	87,74	+ 2,728	+ 0,0039	5674
1640	51 Herculis	6	24 50,5	16 47 11.76	5	86,38	+ 2,485	+ 0,0033	5677
1641	Ursae min. . .	6.7	77 42,2	16 48 0,43	11	88,56	— 2,761	+ 0,1267	5705
1642	53 Herculis	5	31 53,0	16 48 47,83	5	86,46	+ 2,281	+ 0,0033	5693
1643	ι Ophiuchi. . . .	4.5	10 20,8	16 48 48,20	5	86,40	+ 2,840	+ 0,0044	5692
1644	56 Herculis	6.7	25 54,5	16 50 31,97	6	86,41	+ 2,453	+ 0,0033	5703
1645	54 Herculis	6	18 36,6	16 50 32,17	6	86,40	+ 2,648	+ 0,0036	5702

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C
			° ′	h m s			s	s	
1646	Herculis	6.7	46 43,0	16 51 9,65	7	86,59	+ 1,717	+ 0,0051	5706
1647	κ Ophiuchi. . . .	3.4	9 32,8	16 52 27,70	23	87,24	+ 2,857	+ 0,0044	5708
1648	Draconis. . . .	5.6	60 32,3	16 52 31,92	7	87,52	+ 0,809	+ 0,0051	5717
1649	Draconis	6	62 16,5	16 53 40,60	8	87,58	+ 0,634	+ 0,0160	5728
1650	Draconis. . . .	6	62 32,3	16 55 14,99	9	87,59	+ 0,602	+ 0,0162	5734
1651	h^1 Draconis	5	65 18,2	16 55 25,29	7	87,58	+ 0,280	+ 0,0213	5740
1652	h^2 Draconis	6	65 12,4	16 55 52,62	7	87,58	+ 0,291	+ 0,0210	5745
1653	ε Herculis	3.4	31 5,3	16 56 4,84	9	86,94	+ 2,298	+ 0,0033	5731
1654	Draconis	6.7	56 51,1	16 57 20,45	6	87,52	+ 1,101	+ 0,0096	5752
1655	d Herculis	5	33 43,7	16 57 32,78	8	86,57	+ 2,213	+ 0,0033	5747
1656	Herculis	6	15 6,6	16 57 32,96	6	86,44	+ 2,726	+ 0,0037	5732
1657	Herculis	5	14 15,0	16 58 5,41	5	86,42	+ 2,745	+ 0,0038	5749
1658	Ursae min.. . .	6.7	73 17,6	16 58 27,98	11	88,48	— 1,222	+ 0,1245	5769
1659	Herculis , . . .	6.5	13 45,7	16 58 36,02	5	86,52	+ 2,757	+ 0,0038	5753
1660	Herculis	6	13 43,6	16 58 54,29	7	86,51	+ 2,757	+ 0,0038	5757
1661	60 Herculis	5	12 53,5	17 0 16,64	8	86,82	+ 2,777	+ 0,0038	5765
1662	Herculis	6	43 57,7	17 1 43,95	6	86,58	+ 1,825	+ 0,0042	5775
1663	Herculis	6.7	48 57,3	17 1 54,69	5	87,50	+ 1,586	+ 0,0054	5776
1664	μ Draconis	5.4	54 36,9	17 3 3,40	7	87,55	+ 1,248	+ 0,0077	5785
1665	Herculis	5	36 4,7	17 3 8,14	5	86,46	+ 2,127	+ 0,0033	5788
1666	η Ophiuchi . . .	2.3	—15 35,3	17 4 4,06	2	86,55	+ 3,434	+ 0,0073	5781
1667	Gr. 2415 . . .	6	40 39,6	17 4 11,34	12	86,97	+ 1,958	+ 0,0037	5790
1668	Ophiuchi . . .	6	10 11,0	17 4 29,05	5	86,40	+ 2,840	+ 0,0040	5787
1669	Ursae min. . .	6	75 27,0	17 5 7,97	11	88,56	— 1,931	+ 0,0686	5811
1670	Draconis	6	58 24,7	17 5 23,52	9	87,54	+ 0,961	+ 0,0096	5797
1671	Draconis	6	50 58,9	17 5 35,14	5	87,50	+ 1,470	+ 0,0057	5795
1672	Draconis	6	55 54,5	17 5 41,07	5	87,52	+ 1,153	+ 0,0082	5801
1673	37 Ophiuchi . . .	6	10 43,1	17 7 16,64	5	86,41	+ 2,826	+ 0,0038	5802
1674	ζ Draconis	3	65 51,0	17 8 28,20	23	87,63	+ 0,166	+ 0,0192	5823
1675	α Herculis	var	14 31,0	17 9 37,89	21	86,77	+ 2,735	+ 0,0035	5821
1676	δ Herculis	3	24 58,2	17 10 30,77	7	86,63	+ 2,464	+ 0,0031	5828
1677	π Herculis	3.4	36 56,0	17 11 12,95	34	88,22	+ 2,090	+ 0,0033	5834
1678	Draconis	6	63 0,0	17 11 35,75	5	87,44	+ 0,507	+ 0,0139	5840
1679	υ Herculis	5	33 13,1	17 13 15,81	6	86,46	+ 2,215	+ 0,0031	5842
1680	Ophiuchi. . . .	5	10 59,1	17 13 26,64	5	86,43	+ 2,818	+ 0,0036	5841

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
1681	ε Herculis	5	37 24,4	17 13 52,65	5	86,49	+ 2,071	+ 0,0033	5847
1682	Herculis	6	49 48,5	17 14 0,59	6	87,50	+ 1,522	+ 0,0052	5853
1683	ϑ Ophiuchi. . . .	3.4	—24 53,4	17 15 15,22	6	87,19	+ 3,681	+ 0,0079	5851
1684	Herculis	6	18 10,2	17 15 27,94	5	86,43	+ 2,642	+ 0,0032	5856
1685	70 Herculis	6	24 36,5	17 16 22,34	5	86,43	+ 2,471	+ 0,0030	5860
1686	*w* Herculis	5.6	32 36,6	17 16 32,65	6	86,48	+ 2,232	+ 0,0030	5863
1687	74 Herculis	6.5	46 20,9	17 17 14,71	7	86,57	+ 1,696	+ 0,0043	5871
1688	Draconis	6	71 54,4	17 17 55,80	6	87,51	— 0,951	+ 0,0330	5887
1689	Herculis	5	40 5,0	17 18 7,08	5	86,52	+ 1,966	+ 0,0034	5874
1690	73 Herculis	6	23 3,8	17 19 30,41	5	86,41	+ 2,512	+ 0,0030	5883
1691	ρ Herculis	4	37 14,8	17 19 53,23	5	86,48	+ 2,072	+ 0,0032	5886
1692	Ophiuchi. . . .	6	7 41,6	17 21 0,44	4	86,45	+ 2,895	+ 0,0035	5894
1693	σ Ophiuchi . . .	5	4 14,2	17 21 3,47	5	86,54	+ 2,975	+ 0,0038	5893
1694	Draconis	6	57 6,7	17 21 28,49	6	87,43	+ 1,034	+ 0,0074	5902
1695	Herculis	6	20 10,5	17 22 4,25	5	86,44	+ 2,588	+ 0,0030	5900
1696	Ophiuchi. . . .	5.6	0 25,2	17 23 13,00	8	86,95	+ 3,063	+ 0,0039	5903
1697	*x* Herculis	6.5	48 21,1	17 23 49,19	47	88,16	+ 1,588	+ 0,0044	5911
1698	Draconis	6.5	60 8,4	17 24 16,08	5	87,48	+ 0,772	+ 0,0089	5917
1699	Draconis	6.7	58 44,6	17 24 25,94	6	87,43	+ 0,896	+ 0,0080	5918
1700	Ophiuchi	6	2 48,4	17 25 50,40	5	86,43	+ 3,008	+ 0,0036	5919
1701	λ Herculis	5	26 11,6	17 26 17,53	5	86,44	+ 2,422	+ 0,0028	5922
1702	Herculis	6	38 57,9	17 26 59,81	5	86,48	+ 2,002	+ 0,0031	5929
1703	54 Ophiuchi . . .	6	13 14,2	17 27 18,23	6	86,55	+ 2,761	+ 0,0031	5939
1704	78 Herculis	6	28 29,2	17 27 30,46	5	86,47	+ 2,354	+ 0,0028	5931
1705	β Draconis. . . .	3.2	52 23,0	17 27 56,89	53	88,23	+ 1,354	+ 0,0051	5937
1706	*f* Ophiuchi. . . .	6	9 39,7	17 29 23,37	4	86,46	+ 2,847	+ 0,0032	5940
1707	Herculis	6	41 19,3	17 29 37,99	5	86,48	+ 1,908	+ 0,0033	5944
1708	α Ophiuchi. . . .	2	12 38,4	17 29 49,69	17	86,78	+ 2,775	+ 0,0029	5941
1709	56 Ophiuchi. . . .	6	13 12,6	17 29 58,19	7	86,53	+ 2,761	+ 0,0030	5942
1710	ν¹ Draconis. . . .	5.4	55 15,6	17 30 0,55	13	87,55	+ 1,161	+ 0,0058	5950
1711	ν² Draconis. . . .	5.4	55 14,9	17 30 5,93	12	87,47	+ 1,162	+ 0,0058	5951
1712	*f* Draconis. . . .	5.6	68 12,3	17 32 24,07	27	87,77	— 0,246	+ 0,0153	5972
1713	Herculis	6	30 51,2	17 32 25,60	5	86,47	+ 2,280	+ 0,0028	5962
1714	79 Herculis	6	24 22,5	17 32 59,20	5	86,42	+ 2,471	+ 0,0027	5967
1715	*y* Herculis	6	48 39,0	17 33 45,06	7	87,37	+ 1,564	+ 0,0040	5975

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1716	26 Draconis	6.5	61 57,6	17 33 51,16	4	87,46	+ 0,579	+ 0,0085	5978
1717	Herculis	6	31 15,6	17 35 48,24	5	86,47	+ 2,265	+ 0,0027	5986
1718	ι Herculis	3.4	46 3,9	17 36 21,62	24	89,27	+ 1,692	+ 0,0035	5990
1719	Herculis	6	24 34,0	17 36 34,42	5	86,43	+ 2,465	+ 0,0026	5988
1720	Ophiuchi	6	16 0,2	17 37 2,43	7	86,49	+ 2,691	+ 0,0027	5991
1721	Herculis	6	43 31,5	17 37 17,84	5	86,59	+ 1,809	+ 0,0032	5997
1722	ω Draconis	5	68 48,5	17 37 35,78	33	87,59	— 0,359	+ 0,0139	6006
1723	β Ophiuchi	3	4 36,8	17 38 2,31	7	86,49	+ 2,965	+ 0,0030	5996
1724	84 Herculis	6	24 22,6	17 38 50,77	6	86,43	+ 2,469	+ 0,0026	6005
1725	Herculis	6.7	44 7,9	17 39 50,02	6	86,60	+ 1,780	+ 0,0032	6013
1726	μ Herculis	3.4	27 47,1	17 42 9,31	15	86,66	+ 2,370	+ 0,0025	6021
1727	γ Ophiuchi	4.3	2 44,9	17 42 22,58	53	88,30	+ 3,008	+ 0,0028	6020
1728	ψ Draconis austr.	5.4	72 12,2	17 43 53,66	10	88,45	— 1,082	+ 0,0157	6047
1729	Draconis	6	72 12,7	17 43 55,37	8	87,91	— 1,084	+ 0,0157	6048
1730	Herculis	6	19 17,4	17 44 1,14	5	86,44	+ 2,606	+ 0,0025	6030
1731	87 Herculis	6	25 39,6	17 44 21,54	4	86,47	+ 2,432	+ 0,0225	6033
1732	30 Draconis	5	50 48,4	17 46 26,92	7	87,44	+ 1,436	+ 0,0035	6052
1733	s Herculis	6	48 25,4	17 47 10,71	4	87,50	+ 1,568	+ 0,0032	6056
1734	Herculis	6.7	40 0,4	17 48 30,01	3	86,49	+ 1,952	+ 0,0027	6062
1735	f Herculis	5	40 1,7	17 49 43,21	4	86,50	+ 1,951	+ 0,0027	6068
1736	Ophiuchi	6	0 41,2	17 50 42,13	24	87,57	+ 3,057	+ 0,0024	6069
1737	89 Herculis	6	26 4,1	17 50 59,01	6	86,57	+ 2,419	+ 0,0024	6073
1738	ξ Draconis	3.4	56 53,4	17 51 37,88	25	88,47	+ 1,024	+ 0,0038	6079
1739	ϑ Herculis	4	37 15,9	17 52 28,78	14	87,28	+ 2,056	+ 0,0025	6082
1740	ξ Herculis	4.3	29 15,6	17 53 29,33	2	86,50	+ 2,324	+ 0,0023	6084
1741	γ Draconis	2.3	51 30,1	17 54 3,07	11	87,55	+ 1,392	+ 0,0030	6091
1742	ν Herculis	4.5	30 11,9	17 54 17,64	5	86,50	+ 2,295	+ 0,0023	6087
1743	35 Draconis	5	76 58,6	17 54 22,43	13	88,57	— 2,705	+ 0,0134	6114
1744	Herculis	6	43 25,6	17 54 37,77	5	86,61	+ 1,807	+ 0,0026	6095
1745	66 Ophiuchi	5	4 22,5	17 54 48,95	8	86,49	+ 2,970	+ 0,0022	6089
1746	67 Ophiuchi	4	2 56,2	17 55 8,26	7	88,58	+ 3,004	+ 0,0022	6092
1747	93 Herculis	5	16 45,5	17 55 9,66	4	86,54	+ 2.670	+ 0,0022	6094
1748	Ophiuchi	6	6 16,4	17 55 30,86	5	86,50	+ 2,926	+ 0,0022	6096
1749	68 Ophiuchi	4.5	1 18,5	17 56 10,33	7	87,42	+ 3,042	+ 0,0022	6101
1750	Herculis	6	45 30,4	17 56 47,73	6	86,62	+ 1,712	+ 0,0026	6109

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1751	95 Herculis	4.5	21 35,8	17 56 50,18	6	86,48	+ 2,543	+ 0,0022	6106
1752	ψ^2 Draconis	6	72 0,9	17 57 5,52	5	87,52	— 1,046	+ 0,0059	6122
1753	96 Herculis	5	20 50,0	17 57 40,91	5	86,48	+ 2,564	+ 0,0022	6110
1754	97 Herculis	6	22 55,4	17 57 54,25	4	86,51	+ 2,507	+ 0,0022	6116
1755	p^1 Ophiuchi	4.5	2 31,5	17 59 53,77	6	86,47	+ 3,013	+ 0,0019	6123
1756	Herculis	6	48 27,5	18 0 16,64	5	87,47	+ 1,564	+ 0,0026	6129
1757	98 Herculis	6	22 12,5	18 0 23,92	5	86,46	+ 2,527	+ 0,0021	6134
1758	71 Ophiuchi	5	8 43,2	18 2 2,74	5	86,56	+ 2,868	+ 0,0019	6142
1759	72 Ophiuchi	3.4	9 32,9	18 2 8,09	24	86,76	+ 2,848	+ 0,0019	6143
1760	*b* Herculis	5	80 32,8	18 2 51,08	5	86,60	+ 2,284	+ 0,0022	6147
1761	*o* Herculis	4.3	28 44,9	18 3 15,07	7	87,10	+ 2,339	+ 0,0022	6150
1762	102 Herculis	4.5	20 47,8	18 4 3,27	5	86,60	+ 2,565	+ 0,0020	6157
1763	73 Ophiuchi	6	3 58,5	18 4 5,77	7	86,48	+ 2,980	+ 0,0018	6155
1764	101 Herculis	5	20 1,7	18 4 8,31	4	86,48	+ 2,585	+ 0,0020	6159
1765	Herculis	5	43 26,9	18 4 9,76	5	87,14	+ 1,806	+ 0,0023	6162
1766	*A* Herculis	5	31 22,7	18 7 45,91	5	86,46	+ 2,258	+ 0,0022	6178
1767	Draconis . . . ,	6	56 14,5	18 8 4,96	6	87,48	+ 1,074	+ 0,0018	6184
1768	Draconis	6	54 15,2	18 8 16,23	6	87,52	+ 1,217	+ 0,0019	6185
1769	40 Draconis	5	79 59,1	18 8 16,28	10	88,59	— 4,494	— 0,0192	6206
1770	41 Draconis	5	79 59,3	18 8 22,45	10	88,59	— 4,496	— 0,0195	6208
1771	Lyrae.	6	38 44,6	18 8 24,70	6	86,50	+ 2,001	+ 0,0021	6198
1772	Gr. 2533	5.4	42 7,3	18 12 13,30	22	86,86	+ 1,865	+ 0,0019	6208
1773	Draconis	6.7	56 33,0	18 12 45,53	5	87,48	+ 1,052	+ 0,0012	6216
1774	36 Draconis	5	64 21,6	18 13 15,59	4	87,42	+ 0,292	— 0,0006	6224
1775	Lyrae.	6	40 53,6	18 13 37,53	5	86,54	+ 1,917	+ 0,0020	6218
1776	Ophiuchi. . . .	6	7 12,9	18 13 50,41	5	86,46	+ 2,904	+ 0,0014	6218
1777	105 Herculis	6	24 24,0	18 14 39,09	5	86,49	+ 2,467	+ 0,0019	6223
1778	74 Ophiuchi. . . .	5	3 19,7	18 15 22,59	6	86,53	+ 2,995	+ 0,0012	6227
1779	η Serpentis. . . .	3	— 2 55,6	18 15 37,18	2	87,63	+ 3,141	+ 0,0009	6229
1780	106 Herculis	6	21 54,9	18 15 38,68	7	86,60	+ 2,536	+ 0,0018	6231
1781	37 Draconis	6	68 48,0	18 15 55,57	6	87,53	— 0,351	— 0,0041	6248
1782	$\varkappa$ Lyrae.	5.4	36 0,8	18 16 0,41	5	86,51	+ 2,103	+ 0,0020	6235
1783	108 Herculis	5.6	29 48,4	18 16 42,94	5	86,50	+ 2,309	+ 0,0019	6237
1784	*t* Herculis	5	28 49,1	18 16 43,58	4	86,52	+ 2,339	+ 0,0019	6238
1785	Draconis	6	51 16,0	18 17 21,54	9	87,54	+ 1,409	+ 0,0014	6246

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1786	Herculis	6	23 13,8	17 17 33,42	6	86,60	+ 2,500	+ 0,0018	6241
1787	38 Draconis. . . .	6	68 41,9	17 17 37,55	6	87,53	— 0,346	— 0,0048	6257
1788	Herculis	6	17 46,3	17 17 57,35	5	86,57	+ 2,645	+ 0,0016	6245
1789	Draconis	6	49 40,3	17 18 21,72	5	87,58	+ 1,503	+ 0,0015	6252
1790	Draconis	5	49 3,9	17 18 43,88	6	87,59	+ 1,536	+ 0,0015	6255
1791	Draconis	6	51 14,9	17 18 54,09	5	87,53	+ 1,413	+ 0,0013	6258
1792	109 Herculis	4	21 43,2	17 19 0,59	25	87,09	+ 2,542	+ 0,0017	6251
1793	Draconis	6	67 22,9	17 19 54,48	10	87,59	— 0,124	— 0,0046	6272
1794	μ Lyrae.	5.6	39 26,8	17 20 36,51	5	86,48	+ 1,977	+ 0,0018	6268
1795	*d* Serpentis . . .	6	0 7,9	17 21 34,88	5	86,53	+ 3,070	+ 0,0007	6269
1796	*b* Draconis	5.6	58 44,2	17 22 18,24	17	87,68	+ 0,881	— 0,0003	6289
1797	φ Draconis	4.5	71 16,7	17 22 20,10	3	87,52	— 0,854	— 0,0110	6297
1798	Herculis	6	28 47,6	18 25 2,21	5	86,47	+ 2,487	+ 0,0016	6300
1799	42 Draconis	5	65 29,7	18 25 39,91	4	87,51	+ 0,158	— 0,0049	6316
1800	*d* Draconis	5	56 57,7	18 30 40,66	5	87,50	+ 1,036	— 0,0009	6348
1801	Draconis	5.6	52 16,0	18 31 26,99	5	87,51	+ 1,361	+ 0,0003	6350
1802	α Lyrae.	1	38 40,9	18 33 12,84	33	87,83	+ 2,013	+ 0,0016	6355
1803	Lyrae.	6	39 34,3	18 34 28,53	5	86,48	+ 1,980	+ 0,0015	6357
1804	Gr. 2655. . . .	6	77 27,6	18 35 3,67	2	89,06	— 2,868	— 0,0562	6375
1805	Gr. 2640. . . .	6	65 23,4	18 35 52,39	17	87,62	+ 0,190	— 0,0077	. . . .
1806	Lyrae.	6.7	40 50,1	18 36 0,43	5	86,53	+ 1,931	+ 0,0014	6364
1807	Draconis	6	55 8,7	18 36 22,58	6	87,52	+ 1,177	— 0,0009	6368
1808	Lyrae.	6	38 15,9	18 36 28,55	6	86,50	+ 2,031	+ 0,0015	6365
1809	Draconis	6	60 36,5	18 37 4,27	6	87,55	+ 0,730	— 0,0036	6373
1810	Draconis	6	52 5,6	18 37 21,08	5	87,52	+ 1,379	— 0,0001	6372
1811	4 Aquilae.	5	1 56,9	18 39 16,83	6	86,60	+ 3,028	— 0,0001	6379
1812	Draconis	6	62 38,4	18 39 58,45	6	87,51	+ 0,528	— 0,0058	6393
1813	*c* Draconis	5.6	55 25,7	18 40 13,16	5	87,52	+ 1,163	— 0,0014	6395
1814	ε Lyrae pr	4.5	39 33,3	18 40 41,58	25	87,56	+ 1,986	+ 0,0014	6390
1815	5 Lyrae med. . .	5.4	39 29,9	18 40 44,10	22	87,38	+ 1,988	+ 0,0014	6391
1816	110 Herculis	4	20 26,5	18 40 55,63	10	86,81	+ 2,582	+ 0,0012	6387
1817	ζ^1 Lyrae	4.5	37 29,4	18 40 58,98	5	86,48	+ 2,063	+ 0,0014	6392
1818	ζ^2 Lyrae	4.5	37 28,8	18 41 0,89	5	86,48	+ 2,064	+ 0,0014	6394
1819	111 Herculis	4.5	18 3,6	18 41 9,77	5	86,58	+ 2,644	+ 0,0010	6397
1820	Lyrae.	6	41 19,4	18 42 42,11	6	86,53	+ 1,918	+ 0,0012	6404

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1821	Draconis. . . .	6.7	60 55,9	18 43 0,46	8	87,59	+ 0,710	— 0,0049	6410
1822	Draconis. . . .	6	52 52,0	18 44 15,60	5	87,51	+ 1,340	— 0,0008	6419
1823	Draconis. . . .	6	49 18,6	18 44 39,36	6	87,55	+ 1,547	+ 0,0001	6421
1824	Draconis. . . .	6	48 38,5	18 45 22,10	7	87,55	+ 1,584	+ 0,0002	6428
1825	ν^1 Lyrae.	6	32 41,2	18 45 40,36	5	86,49	+ 2,232	+ 0,0014	6426
1826	ν^2 Lyrae.	5.6	32 25,5	18 45 46,65	6	86,51	+ 2,240	+ 0,0014	6427
1827	β Lyrae.	var	33 14,1	18 46 1,14	17	86,58	+ 2,214	+ 0,0015	6429
1828	112 Herculis	5	21 17,6	18 47 34,55	5	86,56	+ 2,563	+ 0,0011	6438
1829	Draconis. . . .	6	73 57,5	18 48 31,09	6	87,67	— 1,472	— 0,0418	6469
1830	Draconis. . . .	6	52 49,9	18 49 7,22	5	87,63	+ 1,350	— 0,0011	6452
1831	o Draconis	5.4	59 15,2	18 49 34,68	28	88,40	+ 0,878	— 0,0046	6463
1832	δ^1 Lyrae.	5.6	36 50,1	18 49 53,03	5	86,47	+ 2,095	+ 0,0013	6456
1833	50 Draconis. . . .	6	75 18,2	18 49 55,33	6	87,69	— 1,904	— 0,0538	6478
1834	62 Serpentis	6	6 28,7	18 50 5,68	5	86,54	+ 2,924	— 0,0001	6451
1835	113 Herculis	4.5	22 30,4	18 50 6,26	6	86,52	+ 2,532	+ 0,0011	6458
1836	Draconis	6	50 34,4	18 50 30,13	6	87,56	+ 1,486	— 0,0005	6470
1837	δ^2 Lyrae.	5	36 45,6	18 50 39,53	5	86,52	+ 2,098	+ 0,0013	6466
1838	ϑ Serpentis pr. .	4.5	4 3,7	18 50 45,06	6	86,62	+ 2,980	— 0,0004	6460
1839	Serpentis sq. .	5	4 3,6	18 50 46,46	6	86,62	+ 2,980	— 0,0004	6462
1840	Lyrae.	6	33 49,7	18 50 50,67	5	86,56	+ 2,199	+ 0,0014	6468
1841	Lyrae.	6	41 27,7	18 51 20,86	5	86,63	+ 1,921	+ 0,0010	6473
1842	64 Serpentis. . . .	6	2 23,5	18 51 44,71	4	86,52	+ 3,018	— 0,0006	6471
1843	Draconis. . . .	6	57 20,8	18 51 51,90	7	87,58	+ 1,039	— 0,0035	6477
1844	Draconis. . . .	6	48 43,3	18 51 53,10	8	87,56	+ 1,588	— 0,0001	6476
1845	Lyrae.	6	32 45,6	18 51 54,22	5	86,47	+ 2,235	+ 0,0014	6480
1846	R Lyrae.	var	43 48,1	18 51 59,21	2	88,65	+ 1,823	+ 0,0008	6475
1847	10 Aquilae.	6	13 45,6	18 53 43,95	6	86,52	+ 2,754	+ 0,0005	6482
1848	11 Aquilae.	5	13 28,6	18 54 1,93	5	88,56	+ 2,761	+ 0,0004	6483
1849	ε Aquilae.	4	14 55,2	18 54 37,83	24	88,32	+ 2,726	+ 0,0005	6487
1850	γ Lyrae.	3.4	32 32,3	18 54 49,70	9	86,90	+ 2,244	+ 0,0013	6491
1851	48 Draconis. . . .	6	57 40,1	18 54 53,42	6	87,51	+ 1,021	— 0,0040	6496
1852	Lyrae.	6	40 31,7	18 55 10,69	5	86,58	+ 1,963	+ 0,0010	6493
1853	Lyrae.	6	39 3,9	18 55 30,15	5	86,49	+ 2,019	+ 0,0012	6495
1854	Draconis. . . .	6.7	58 4,4	18 55 39,66	6	87,55	+ 0,990	— 0,0043	6500
1855	υ Draconis. . . .	5	71 9,0	18 55 44,62	13	87,68	— 0,728	— 0,0296	6510

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1856	λ Lyrae.	5.6	31 59,5	18 55 51,83	5	86,41	+ 2,262	+ 0,0013	6497
1857	Draconis	6.7	62 14,9	18 56 10,87	9	87,62	+ 0,608	— 0,0084	6508
1858	Lyrae.	6	47 52,7	18 58 6,03	6	87,57	+ 1,641	— 0,0001	6516
1859	16 Lyrae.	5	46 46,7	18 58 19,72	6	86,65	+ 1,696	+ 0,0002	6520
1860	49 Draconis	6	55 30,0	18 58 32,75	6	87,52	+ 1,191	— 0,0029	6522
1861	Draconis	6	52 6,1	18 59 31,85	5	87,54	+ 1,413	— 0,0014	6530
1862	ζ Aquilae.	3	13 42,0	19 0 21,26	22	87,06	+ 2,758	+ 0,0003	6528
1863	λ Aquilae.	3	—5 2,8	19 0 24,66	2	86,61	+ 3,186	— 0,0023	6526
1864	Lyrae.	6	31 34,8	19 0 46,37	5	86,47	+ 2,278	+ 0,0013	6534
1865	Lyrae.	6.5	28 27,3	19 1 15,85	5	86,60	+ 2,375	+ 0,0012	6547
1866	18 Aquilae.	5	10 54,1	19 1 47,89	8	86,58	+ 2,824	0,0000	6543
1867	Draconis	6	61 55,8	19 2 16,80	9	87,56	+ 0,658	— 0,0090	6555
1868	51 Draconis	6.5	53 13,7	19 2 26,85	5	87,54	+ 1,350	— 0,0020	6551
1869	Draconis	6	76 58,6	19 2 34,16	7	87,67	— 2,457	— 0,0891	6568
1870	π Sagittarii. . . .	3	-21 11,9	19 3 13,27	4	86,51	+ 3,571	— 0,0058	6548
1871	17 Lyrae	5.6	32 19,7	19 3 16,01	5	86,52	+ 2,259	+ 0,0013	6553
1872	ι Lyrae.	5	35 55,7	19 3 22,62	22	87,07	+ 2,141	+ 0,0012	6556
1873	19 Aquilae.	5.6	5 54,1	19 3 36,64	5	86,52	+ 2,940	— 0,0007	6552
1874	19 Lyrae.	6	31 6,0	19 7 32,94	5	86,48	+ 2,301	+ 0,0012	6571
1875	Vulpeculae. . .	6	21 22,2	19 7 53,63	6	86,51	+ 2,572	+ 0,0008	6574
1876	21 Aquilae.	6.5	2 6,4	19 8 9,95	5	86,53	+ 3,026	— 0,0013	6572
1877	Cygni pr. . . .	6	49 37,8	19 9 14,13	4	87,54	+ 1,571	— 0,0009	6579[1]
1878	Cygni sq. . . .	6.5	49 37,8	19 9 14,77	4	87,54	+ 1,571	— 0,0009	6579[2]
1879	35 Draconis	6.7	65 47,6	19 9 21,02	7	87,60	+ 0,234	— 0,0174	6586
1880	53 Draconis	6.5	56 40,3	19 9 35,71	9	87,88	+ 1,133	— 0,0045	6583
1881	η Lyrae.	4.5	38 57,4	19 10 0,82	5	86,50	+ 2,042	+ 0,0010	6581
1882	Vulpeculae. . .	6	21 2,4	19 10 32,98	12	86,54	+ 2,583	+ 0,0007	6582
1883	22 Aquilae.	6	4 38,5	19 11 4,39	5	86,53	+ 2,969	— 0,0011	6585
1884	54 Draconis	5.6	57 30,9	19 11 57,36	7	87,65	+ 1,075	— 0,0054	6601
1885	Lyrae.	6.5	40 10, 0	19 12 4,53	5	86,61	+ 1,999	+ 0,0009	6593
1886	Cygni.	6	49 52,6	19 12 27,20	6	87,60	+ 1,565	— 0,0011	6603
1887	δ Draconis	3	67 28,1	19 12 31,63	6	87,67	+ 0,010	— 0,0229	6612
1888	ϑ Lyrae	4.5	37 56,3	19 12 32,91	12	87,76	+ 2,082	+ 0,0010	6599
1889	ω Aquilae	6.5	11 28,8	19 12 39,19	11	86,60	+ 2,816	— 0,0003	6595
1890	23 Aquilae.	6	0 53,1	19 12 56,70	4	86,59	+ 3,058	— 0,0018	6597

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1891	2 Vulpeculae. . .	6	22 49,7	19 13 3,38	5	86,52	+ 2,538	+ 0,0008	6602
1892	59 Draconis	6.5	76 22,6	19 13 11,87	7	87,67	— 2,165	— 0,0929	6625
1893	24 Aquilae.	6	0 8,4	19 13 13,35	8	86,82	+ 3,069	— 0,0019	6600
1894	*A* Aquilae.	6	12 10,3	19 14 31,38	5	86,51	+ 2,799	— 0,0002	6615
1895	κ Cygni	4	53 9,9	19 14 33,61	23	88,28	+ 1,381	— 0,0026	6623
1896	Lyrae.	6	40 9,4	19 15 17,52	5	86,51	+ 2,004	+ 0,0009	6624
1897	Cygni.	6	49 21,9	19 15 41,79	6	87,57	+ 1,599	— 0,0010	6626
1898	Cygni.	6.7	54 10,3	19 17 10,69	8	87,64	+ 1,325	— 0,0038	6635
1899	ι Draconis	5.4	73 9,1	19 17 40,00	18	88,16	— 1,091	— 0,0565	6650
1900	Draconis	6	57 26,2	19 18 14,96	7	87,61	+ 1,100	— 0,0057	6640
1901	8 Vulpeculae. . .	5.6	26 3,1	19 18 20,57	5	86,60	+ 2,457	+ 0,0010	6637
1902	2 Sagittae	6	16 43,4	19 19 25,62	5	86,55	+ 2,695	+ 0,0002	6642
1903	*b* Aquilae.	5.6	11 42,6	19 19 43,29	6	86,58	+ 2,812	— 0,0004	6644
1904	2 Cygni.	5	29 24,4	19 19 47,34	5	86,60	+ 2,364	+ 0,0011	6648
1905	δ Aquilae.	3.4	2 53,8	19 19 57,07	37	87,94	+ 3,009	— 0,0017	6646
1906	π Draconis	5	65 30,2	19 20 6,18	8	87,64	+ 0,316	— 0,0189	6662
1907	Cygni.	6	43 10,4	19 20 27,95	6	87,40	+ 1,895	+ 0,0005	6656
1908	4 Vulpeculae. . .	5	19 35,0	19 20 39,07	7	86,69	+ 2,626	+ 0,0005	6654
1909	Vulpeculae. . .	6.5	24 42,9	19 20 52,72	5	86,52	+ 2,495	+ 0,0009	6657
1910	ν Aquilae.	5	0 7,2	19 20 53,46	6	86,97	+ 3,070	— 0,0023	6653
1911	4 Cygni.	5	36 5,9	19 22 11,50	6	86,60	+ 2,160	+ 0,0011	6667
1912	*c* Aquilae.	6.5	1 43,6	19 23 27,39	5	86,54	+ 3,035	— 0,0021	6670
1913	α Vulpeculae. . .	4.5	24 26,5	19 24 7,69	5	86,52	+ 2,505	+ 0,0009	6674
1914	8 Vulpeculae. . .	5.6	24 32,5	19 24 21,61	5	86,56	+ 2,503	+ 0,0009	6676
1915	ι^1 Cygni.	6	52 5,8	19 24 44,43	4	87,56	+ 1,472	— 0,0024	6687
1916	Draconis	6	76 20,5	19 25 27,48	6	87,67	— 2,051	— 0,1049	6702
1917	β Cygni.	3	27 43,7	19 26 17,10	14	86,79	+ 2,419	+ 0,0010	6690
1918	ι^2 Cygni.	4.5	51 29,7	19 26 56,01	30	87,82	+ 1,512	— 0,0021	6697
1919	Vulpeculae. . .	6	20 41,7	19 27 15,86	6	86,55	+ 2,604	+ 0,0005	6695
1920	8 Cygni.	5.4	34 13,1	19 27 41.07	7	86,69	+ 2,229	+ 0,0012	6698
1921	Gr. 2900. . . .	6.7	79 22,9	19 28 20,14	33	88,87	— 3,535	— 0,1976	. . . .
1922	μ Aquilae.	5.4	7 8,8	19 28 42,94	7	86,61	+ 2,917	— 0,0013	6701
1923	Draconis	6	58 21,9	19 29 18,59	7	87,63	+ 1,065	— 0,0075	6712
1824	9 Vulpeculae. . .	5	19 32,0	19 29 45,03	5	86,53	+ 2,634	+ 0,0004	6709
1925	Cygni.	6	38 31,3	19 29 46,61	8	86,65	+ 2,089	+ 0,0010	6711

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C
			° ′	h m s			s	s	
1926	9 Cygni.	6	29 13,2	19 30 28,54	5	86,56	+ 2,382	+ 0,0011	6714
1927	Cygni.	6	49 1,4	19 30 39,90	6	87,56	+ 1,652	— 0,0011	6717
1928	Cygni.	6	42 10,3	19 31 6,06	7	87,39	+ 1,956	+ 0,0006	6718
1929	Cygni.	6	43 42,2	19 31 15,28	6	87,62	+ 1,895	+ 0,0008	6720
1930	Cygni.	6	51 0,1	19 31 28,94	5	87,68	+ 1,551	— 0,0019	6723
1931	Cygni.	6	47 55,5	19 31 32,15	6	87,69	+ 1,708	— 0,0007	6721
1932	11 Cygni.	6	36 42,1	19 31 51,19	6	86,71	+ 2,155	+ 0,0011	6722
1933	ε Sagittae.	6	16 13,0	19 32 18,62	5	86,54	+ 2,715	0,0000	6724
1934	σ Draconis	5.6	69 28,4	19 32 33,81	6	87,74	— 0,214	— 0,0370	6735
1935	Cygni.	7	49 59,5	19 32 59,06	6	87,66	+ 1,609	— 0,0015	6730
1936	Cygni.	5.6	43 27,6	19 33 2,45	8	87,02	+ 1,908	+ 0,0004	6728
1937	Cygni.	6	44 27,1	19 33 13,49	5	87,62	+ 1,868	+ 0,0002	6731
1938	ϑ Cygni.	5.4	49 58,0	19 33 29,52	23	88,32	+ 1,612	— 0,0015	6734
1939	Draconis	5.6	63 11,4	19 33 36,28	8	87,68	+ 0,645	— 0,0154	6737
1940	σ Aquilae	5	5 8,8	19 33 45,92	5	86,56	+ 2,962	— 0,0018	6729
1941	Cygni.	5.6	49 1,5	19 34 53,55	6	87,60	+ 1,663	— 0,0011	6741
1942	φ Cygni.	5	29 54,0	19 35 1,94	8	86,61	+ 2,369	+ 0,0012	6740
1943	α Sagittae	4.5	17 45,7	19 35 10,74	5	86,53	+ 2,681	+ 0,0002	6739
1944	Draconis	6	71 22,7	19 35 31,22	6	87,69	— 0,555	— 0,0502	6752
1945	14 Cygni.	6	42 33,8	19 35 51,67	6	86,68	+ 1,951	+ 0,0006	6745
1946	β Sagittae.	4.5	17 13,3	19 36 6,47	5	86,56	+ 2,694	+ 0,0001	6744
1947	Cygni.	6	54 42,9	19 36 12,79	7	87,55	+ 1,347	— 0,0043	6748
1948	χ Aquilae.	6	11 34,1	19 37 25,47	6	86,52	+ 2,823	— 0,0008	6749
1949	Cygni.	6.5	45 15,8	19 37 26,56	7	87,45	+ 1,843	0,0000	6754
1950	c Cygni.	6.5	50 16,2	19 38 53,54	6	87,57	+ 1,611	— 0,0017	6763
1951	Cygni.	6.7	50 15,8	19 38 56,38	6	87,54	+ 1,612	— 0,0017	6764
1952	10 Vulpeculae. . .	6	25 30,5	19 39 8,50	5	86,56	+ 2,493	+ 0,0009	6758
1953	Cygni.	6	38 24,6	19 39 18,51	5	86,68	+ 2,110	+ 0,0011	6765
1954	Vulpeculae. . .	6	26 52,4	19 39 25,57	6	86,62	+ 2,458	+ 0,0010	6762
1955	Cygni.	6	41 30,5	19 40 4,86	5	87,63	+ 2,000	+ 0,0008	6769
1956	15 Cygni.	5.6	37 5,3	19 40 18,60	21	88,25	+ 2,157	+ 0,0012	6771
1957	γ Aquilae.	3	10 20,7	19 41 1,80	15	87,07	+ 2,852	— 0,0010	6772
1958	Cygni.	5	57 45,3	19 41 5,82	6	87,57	+ 1,156	— 0,0073	6780
1959	δ Cygni.	3.2	44 51,7	19 41 32,25	27	87,67	+ 1,870	+ 0,0001	6779
1960	Cygni.	6.7	34 44,6	19 41 45,84	7	87,06	+ 2,285	+ 0,0013	6777

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
1961	χ Cygni.	5.6	33 28,3	19 42 15,08	5	86,62	+ 2,275	+ 0,0013	6784
1962	δ Sagittae	4	18 15,8	19 42 28,96	9	86,86	+ 2,675	+ 0,0001	6783
1963	π Aquilae.	6	11 32,6	19 43 31,04	5	86,52	+ 2,827	— 0,0009	6789
1964	ζ Sagittae	5	18 52,0	19 44 5,68	5	86,56	+ 2,662	+ 0,0002	6794
1965	Cygni.	6	47 38,1	19 44 13,98	5	87,53	+ 1,756	— 0,0006	6799
1966	Draconis.	6	69 4,1	19 44 27,82	6	87,67	— 0,066	— 0,0377	6808
1967	Cygni.	6	38 26,0	19 44 33,98	8	86,66	+ 2,122	+ 0,0011	6806
1968	Cygni.	var	33 9,7	19 44 38,85	7	86,59	+ 2,288	+ 0,0013	6800
1969	α Aquilae.	1.2	8 34,7	19 45 24,90	11	87,94	+ 2,892	— 0,0014	6802
1970	ο Aquilae.	6.5	10 8,5	19 45 45,41	6	86,52	+ 2,858	— 0,0012	6805
1971	Draconis. . . .	6	59 8,6	19 46 17,97	6	87,62	+ 1,071	— 0,0092	6818
1972	12 Vulpeculae. . .	5	22 19,9	19 46 19,91	5	86,52	+ 2,581	+ 0,0006	6810
1973	19 Cygni.	6	38 26,4	19 46 40,17	5	86,65	+ 2,124	+ 0,0012	6813
1974	Cygni.	6	40 19,2	19 46 50,80	6	86,93	+ 2,059	+ 0,0010	6817
1975	η Aquilae.	var	0 43,4	19 46 52,13	9	86,73	+ 3,057	— 0,0032	6811
1976	d Cygni.	5.6	52 42,6	19 47 52,09	6	87,60	+ 1,508	— 0,0030	6824
1977	ε Draconis. . . .	4.3	69 59,3	19 48 32,53	19	87,85	— 0,194	— 0,0441	6836
1978	Draconis. . . .	6	60 55,5	19 48 40,37	7	87,68	+ 0,933	— 0,0121	6834
1979	13 Vulpeculae. . .	5.4	23 47,6	19 48 47,17	5	86,58	+ 2,548	+ 0,0008	6827
1980	Cygni.	6	47 38,9	19 48 52,77	6	87,59	+ 1,768	— 0,0006	6830
1981	ξ Aquilae.	5	8 10,6	19 48 55,00	6	86,53	+ 2,902	— 0,0016	6825
1982	58 Aquilae.	6	— 0 0,8	19 49 6,72	5	86,56	+ 3,073	— 0,0034	6826
1983	β Aquilae.	4	6 7,9	19 49 54,59	16	86,80	+ 2,945	— 0,0020	6833
1984	10 Sagittae	6	16 20,6	19 51 1,50	4	86,53	+ 2,726	0,0000	6839
1985	φ Aquilae.	5.6	11 7,9	19 51 1,67	6	86,52	+ 2,840	— 0,0010	6838
1986	23 Cygni.	5.6	57 14,1	19 51 1,95	6	87,63	+ 1,234	— 0,0069	6847
1987	Draconis. . . .	5.6	59 25,0	19 51 37,29	5	87,66	+ 1,074	— 0,0097	6852
1988	22 Cygni.	5.6	38 11,6	19 51 55,88	7	86,66	+ 2,144	+ 0,0013	6849
1989	η Cygni.	4.5	34 47,5	19 52 10,75	6	86,62	+ 2,258	+ 0,0014	6851
1990	11 Sagittae	6	16 29,6	19 52 45,68	6	86,56	+ 2,724	— 0,0001	6853
1991	ψ Cygni.	5.6	52 8,8	19 52 47,16	19	88,55	+ 1,556	— 0,0026	6856
1992	Draconis. . . .	6	60 31,9	19 52 55,92	6	87,72	+ 0,988	— 0,0115	6861
1993	Cephei	6	57 57,6	19 53 11,16	6	87,71	+ 1,192	— 0,0078	6863
1994	Cygni.	6.5	40 4,3	19 53 24,67	6	87,30	+ 2,083	+ 0,0011	6857
1995	Cygni.	6	38 9,7	19 53 32,61	6	86,68	+ 2,148	+ 0,0013	6860

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
1996	Cygni. . . . . :	6	50 36,4	19 53 44,69	6	87,67	+ 1,641	— 0,0017	6865
1997	Cephei	6.5	58 33,2	19 53 49,40	7	87,71	+ 1,151	— 0,0086	6867
1998	γ Sagittae.	4.3	19 11,6	19 53 51,92	19	87,50	+ 2,663	+ 0,0003	6858
1999	14 Vulpeculae. . .	6.5	22 48,1	19 54 27,41	2	86,65	+ 2,579	+ 0,0007	6866
2000	13 Sagittae	6	17 13,0	19 55 5,26	5	86,58	+ 2,709	0,0000	6868
2001	Cygni.	6	45 28,3	19 55 53,22	8	87,37	+ 1,884	+ 0,0002	6876
2002	25 Cygni.	6.5	36 44,5	19 55 53,24	7	86,65	+ 2,200	+ 0,0014	6875
2003	Cygni.	6	51 45,3	19 56 20,45	5	87,53	+ 1,590	— 0,0023	6881
2004	15 Vulpeculae. . .	5	27 27,0	19 56 34,25	5	86,52	+ 2,466	+ 0,0012	6879
2005	Vulpeculae. . .	5	24 29,7	19 57 5,08	6	86,53	+ 2,541	+ 0,0009	6882
2006	16 Vulpeculae. . .	5	24 37,8	19 57 21,47	5	86,55	+ 2,538	+ 0,0009	6883
2007	ε Cygni.	6.5	49 47,9	19 58 14,94	7	87,59	+ 1,697	— 0,0013	6895
2008	14 Sagittae	6	15 43,4	19 58 28,01	5	86,61	+ 2,745	— 0,0003	6890
2009	τ Aquilae.	5.6	6 58,1	19 58 45,90	6	86,59	+ 2,931	— 0,0020	6893
2010	15 Sagittae	6	16 46,4	19 59 9,82	6	86,53	+ 2,723	— 0,0001	6897
2011	η Sagittae	5.6	19 40,6	20 0 16,83	5	86,51	+ 2,659	+ 0,0003	6901
2012	ε Draconis	6.5	64 30,8	20 0 18,60	6	87,66	+ 0,646	— 0,0209	6905
2013	Cygni.	6	51 31,4	20 2 7,84	5	86,54	+ 1,624	— 0,0021	6918
2014	17 Vulpeculae. . .	5.6	23 17,8	20 2 9,84	5	86,51	+ 2,577	+ 0,0008	6912
2015	b^1 Cygni	6.5	35 40,2	20 2 16,69	5	86,55	+ 2,246	+ 0,0016	6915
2016	ρ Draconis	5	67 33,6	20 2 19,50	6	87,73	+ 0,286	— 0,0342	6926
2017	69 Draconis	6.7	76 10,5	20 2 41,40	11	88,17	— 1,600	— 0,1283	6936
2018	Cygni.	6	56 1,4	20 2 51,46	6	87,67	+ 1,369	— 0,0056	6924
2019	Cygni.	6.5	52 50,4	20 3 20,01	7	87,63	+ 1,558	— 0,0029	6928
2020	Draconis	6	63 34,4	20 3 21,73	8	87,70	+ 0,764	— 0,0183	6930
2021	66 Draconis	6	61 40,6	20 3 47,70	6	87,65	+ 0,945	— 0,0139	6932
2022	b^2 Cygni.	5	36 31,0	20 5 20,55	5	86,55	+ 2,227	+ 0,0017	6937
2023	ϑ Aquilae.	3	—1 8,8	20 5 37,72	14	87,91	+ 3,095	— 0,0042	6934
2024	18 Vulpeculae. . .	6	26 34,7	20 5 58,14	5	86,52	+ 2,502	+ 0,0013	6940
2025	19 Vulpeculae. . .	6	26 28,9	20 7 12,19	5	86,52	+ 2,507	+ 0,0013	6943
2026	20 Vulpeculae. . .	6	26 9,0	20 7 23,95	5	86,55	+ 2.515	+ 0,0012	6944
2027	ρ Aquilae.	5	14 51,8	20 9 11,18	5	86,57	+ 2,773	— 0,0005	6952
2028	Cygni.	6	51 7,9	20 9 28,19	6	87,63	+ 1,672	— 0,0016	6959
2029	21 Vulpeculae. . .	6.5	28 21,7	20 9 43,40	5	86,52	+ 2,463	+ 0,0015	6957
2030	68 Draconis. . . .	6	61 44,7	20 9 46,72	8	87,68	+ 0,973	— 0,0140	6970

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2031	o^1 Cygni.	5	46 29,0	20 9 50,57	6	87,60	+ 1,885	+ 0,0003	6962
2032	Cygni.	6.7	48 2,7	20 10 0,68	6	87,63	+ 2,019	+ 0,0013	6963
2033	o^1 sq. Cygni . .	4.5	46 24,5	20 10 10,10	18	89,08	+ 1,889	+ 0,0004	6965
2034	23 Vulpeculae. . .	5	27 28,6	20 10 12,67	7	86,73	+ 2,488	+ 0,0014	6973
2035	b^3 Cygni.	5	36 28,2	20 10 24,91	5	86,57	+ 2,240	+ 0,0018	6967
2036	Vulpeculae. . .	5	25 15,4	20 10 36,25	5	86,64	+ 2,542	+ 0,0012	6966
2037	22 Vulpeculae. . .	6	23 10,4	20 10 45,16	5	86,62	+ 2,591	+ 0,0009	6968
2038	33 Cygni.	4.5	56 13,9	20 10 50,47	4	87,58	— 1,390	— 0,0056	6976
2039	Draconis . . . ,	6	60 18,2	20 11 26,36	7	87,72	— 1,104	— 0,0112	6980
2040	18 Sagittae	6	21 15,7	20 11 29,74	5	87,02	+ 2,636	+ 0,0007	6975
2041	32 Cygni.	4.5	47 22,6	20 12 4,32	6	87,66	+ 1,855	+ 0,0002	6983
2042	24 Vulpeculae. . .	6.5	24 19,9	20 12 4,62	15	86,67	+ 2,566	+ 0,0011	6979
2043	Cygni.	6	49 53,6	20 12 31,46	6	87,63	+ 1,74 ;	— 0,0009	6985
2044	$\varkappa$ Cephei	4.5	77 22,8	20 12 34,91	18	88,42	+ 1,927	— 0,1651	7005
2045	Cygni.	6	40 1,5	20 13 0,43	6	87,26	+ 2,134	+ 0,0017	6986
2046	34 Cygni.	5	37 41,5	20 13 43,96	5	86,56	+ 2,211	+ 0,0019	6990
2047	Cygni.	6.7	40 23,3	20 14 13,19	8	86,79	+ 2,125	+ 0,0017	6996
2048	36 Cygni.	6.5	36 39,4	20 14 21,46	6	86,58	+ 2,244	+ 0,0019	6997
2049	35 Cygni.	5.6	33 38,4	20 14 25,66	5	86,53	+ 2,303	+ 0,0018	6998
2050	Draconis	6	66 29,9	20 14 26,14	6	87,62	+ 0,528	— 0,0284	7017
2051	Cygni.	6	38 39,6	20 14 57,34	7	86,90	+ 2,183	+ 0,0019	7001
2052	Cygni.	6	39 3,4	20 16 16,00	6	86,95	+ 2,174	+ 0,0018	7008
2053	25 Vulpeculae. . .	6	24 5,7	20 17 19,77	5	86,52	+ 2,579	+ 0,0011	7013
2054	Aquilae.	6.5	4 59,5	20 17 43,69	6	86,62	+ 2,976	— 0,0027	7014
2055	γ Cygni.	2.3	39 54,3	20 18 16,89	50	87,59	+ 2,152	+ 0,0019	7022
2056	Cygni	6	40 40,5	20 18 51,13	7	87,47	+ 2,128	+ 0,0012	7027
2057	39 Cygni.	5	31 50,1	20 19 28,15	6	86,53	+ 2,392	+ 0,0020	7029
2058	Draconis	6	68 31,7	20 19 36,65	7	87,71	+ 0,285	— 0,0384	7037
2059	Cygni.	6	54 19,1	20 20 10,84	8	87,59	+ 1,548	— 0,0034	7035
2060	Cygni.	6	42 14,7	20 21 36,04	4	86,64	+ 2,083	+ 0,0019	7041
2061	Cygni.	6	40 2,5	20 22 6,27	5	86,55	+ 2,158	+ 0,0020	7048
2062	Cygni.	6	54 19,4	20 22 41,51	6	87,59	+ 1,560	— 0,0032	7055
2063	Cephei	6	59 14,4	20 22 48,24	8	87,67	+ 1,248	— 0,0090	7060
2064	40 Cygni.	6	38 4,8	20 23 29,87	6	86,59	+ 2,224	+ 0,0022	7061
2065	ω^1 Cygni.	5	49 1,1	20 23 40,59	6	87,60	+ 1,826	+ 0,0001	7062

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2066	Cephei.	6	56 16,6	20 23 44,06	6	87,66	+ 1,451	— 0,0050	7064
2067	41 Cygni.	4.5	30 0,1	20 24 54,07	5	86,56	+ 2,450	+ 0,0019	7067
2068	1 Delphini. . . .	6	10 31,7	20 25 1,95	5	86,54	+ 2,872	— 0,0014	7065
2069	42 Cygni	6	36 5,3	20 25 8,58	4	86,59	+ 2,287	+ 0,0023	7073
2070	Cygni.	6.7	45 33,2	20 26 21,49	6	87,61	+ 1,978	+ 0,0014	7083
2071	ω² Cygni.	5	48 34,9	20 26 39,14	6	87,62	+ 1,857	+ 0,0004	7085
2072	Cephei.	6	55 42,0	20 26 42,26	7	87,71	+ 1,501	— 0,0042	7086
2073	44 Cygni.	6	36 33,9	20 26 48,68	6	86,58	+ 2,277	+ 0,0024	7084
2074	ϑ Cephei	4	62 37,5	20 27 44,09	39	88,39	+ 1,009	— 0,0153	7098
2075	ω³ Cygni.	5	48 50,9	20 27 55,23	7	87,64	+ 1,851	+ 0,0004	7091
2076	ε Delphini. . . .	4	10 55,8	20 27 57,46	23	87,23	+ 2,866	— 0,0013	7088
2077	η Delphini. . . .	6.5	12 39,1	20 28 44,89	7	86,66	+ 2,834	— 0,0008	7094
2078	Cygni.	6	42 49,0	20 29 2,63	5	87,40	+ 2,087	+ 0,0021	7100
2079	Cephei.	6	56 24,4	20 29 5,21	6	87,69	+ 1,471	— 0,0048	7105
2080	Cygni	6	41 5,8	20 29 5,30	5	86,58	+ 2,145	+ 0,0023	7101
2081	47 Cygni.	6	34 52,4	20 29 37,55	6	86,58	+ 2,332	+ 0,0025	7103
2082	ζ Delphini. . . .	5.4	14 17,7	20 30 9,90	5	86,53	+ 2,802	— 0,0004	7107
2083	Cygni.	6	46 18,0	20 30 18,76	6	87,60	+ 1,963	+ 0,0014	7112
2084	Gr. 3241	6	72 9,5	20 30 28,88	9	87,78	— 0,217	— 0,0676	7124
2085	Cygni..	6.7	40 43,2	20 30 38,11	6	87,15	+ 2,162	+ 0,0024	7114
2086	Cygni.	6	41 30,6	20 31 22,70	6	87,10	+ 2,138	+ 0,0024	7119
2087	Draconis. . . .	6.7	70 9,3	20 32 11,22	7	87,70	+ 0,155	— 0,0490	7144
2088	27 Vulpeculae. . .	6.5	26 4,8	20 32 23,21	6	86,64	+ 2,558	+ 0,0018	7126
2089	β Delphini	3.4	14 12,8	20 32 23,38	8	88,47	+ 2,806	— 0,0012	7121
2090	ι Delphini. . . .	6	10 59,6	20 32 33,40	5	86,56	+ 2,868	— 0,0012	7125
2091	73 Draconis	5.6	74 37,7	20 32 57,22	4	88,25	— 0,734	— 0,1027	7156
2092	ϑ Delphini. . . .	6	12 55,8	20 33 32,43	8	87,39	+ 2,832	— 0,0007	7137
2093	29 Vulpeculae. . .	5	20 48,9	20 33 36,61	7	86,94	+ 2,674	+ 0,0009	7140
2094	28 Vulpeculae. . .	5.6	23 43,8	20 33 44,38	6	87,82	+ 2,612	+ 0,0015	7143
2095	1 Aquarii.	5	0 6,0	20 33 46,70	7	86,93	+ 3,071	— 0,0044	7138
2096	κ Delphini. . . .	5	9 41,9	20 33 47,24	3	86,95	+ 2,894	— 0,0015	7141
2097	Cygni.	6	52 33,3	20 34 5,33	6	87,58	+ 1,705	— 0,0012	7153
2098	Cygni. , ...	6	29 56,9	20 34 27,90	7	86,90	+ 2,471	+ 0,0023	7152
2099	α Delphini. . . .	4.3	15 31,5	20 34 31,69	2	87,16	+ 2,782	— 0,0001	7149
2100	Cygni.	6	40 11,4	20 35 31,84	7	87,47	+ 2,193	+ 0,0027	7158

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2101	10 Delphini....	6	14 11,5	20 36 7,19	5	86,55	+ 2,810	— 0,0004	7160
2102	Cephei.....	6	55 37,0	20 36 9,43	7	87,68	+ 1,555	— 0,0035	7166
2103	49 Cygni......	6	31 55,0	20 36 35,56	6	86,60	+ 2,427	+ 0,0026	7164
2104	α Cygni......	2.1	44 53,2	20 37 40,94	30	88,20	+ 2,044	+ 0,0022	7171
2105	Cephei.....	6	60 6,4	20 37 57,71	7	87,70	+ 2,278	— 0,0092	7176
2106	Cygni......	6	41 19,4	20 37 58,11	6	86,78	+ 2,165	+ 0,0027	7174
2107	δ Delphini....	4	14 40,8	20 38 19,40	12	87,34	+ 2,802	— 0,0002	7173
2108	51 Cygni	6.5	49 56,7	20 38 49,20	6	87,67	+ 1,849	+ 0,0007	7182
2109	30 Vulpeculae...	6.5	24 52,6	20 40 6,88	5	86,63	+ 2,598	+ 0,0019	7188
2110	Cephei.....	6	60 12,3	20 40 18,89	6	87,71	+ 1,286	— 0,0092	7193
2111	Cygni	6	46 53,9	20 40 58,29	5	87,55	+ 1,982	+ 0,0019	7198
2112	52 Cygni......	4.5	30 19,1	20 41 7,30	7	87,11	+ 2,476	+ 0,0026	7194
2113	ε Aquarii.....	4,3	—9 53,9	20 41 43,20	12	86,56	+ 3,250	— 0,0084	7196
2114	ε Cygni......	3.2	33 33,5	20 41 45,55	11	86,78	+ 2,398	+ 0,0030	7204
2115	4 Cephei.....	6.5	66 15,4	20 41 48,49	7	87,76	+ 0,760	— 0,0258	7211
2116	13 Delphini....	6	5 36,3	20 42 21,42	6	86,65	+ 2,973	— 0,0027	7206
2117	6 H. Cephei...	5.4	57 11,1	20 42 37,26	8	87,99	+ 1,500	— 0,0046	7215
2118	η Cephei.....	4.3	61 24,7	20 43 3,07	7	87,81	+ 1,215	— 0,0112	7220
2119	λ Cygni......	5.4	36 5,2	20 43 7,43	8	87,90	+ 2,335	+ 0,0032	7213
2120	Cygni......	6.7	52 35,7	20 43 9,90	6	87,67	+ 1,749	— 0,0043	7218
2121	Cygni......	6	45 10,6	20 43 54,54	5	87,57	+ 2,056	+ 0,0026	7219
2122	55 Cygni......	6.5	45 42,4	20 45 11,49	6	87,62	+ 2,043	+ 0,0026	7233
2123	Cygni......	6	50 22,5	20 46 8,04	6	87,66	+ 1,864	+ 0,0011	7243
2124	56 Cygni	5.6	43 38,7	20 46 10,50	5	87,01	+ 2,118	+ 0,0030	7241
2125	31 Vulpeculae...	5	26 41,1	20 47 25,20	5	86,60	+ 2,572	+ 0,0024	7246
2126	57 Cygni......	5.6	43 58,3	20 49 21,38	5	87,42	+ 2,119	+ 0,0032	7253
2127	Cygni......	6	44 45,9	20 49 28,11	6	87,65	+ 2,093	+ 0,0031	7254
2128	32 Vulpeculae...	5.6	27 38,4	20 49 52,33	8	87,56	+ 2,556	+ 0,0026	7256
2129	Equulei....	5	4 6,7	20 50 10,19	8	86,94	+ 3,002	— 0,0032	7255
2130	Cygni	6	40 17,1	20 50 15,80	8	87,27	+ 2,238	+ 0,0036	7260
2131	16 Delphini....	6.5	12 8,9	20 50 23,69	6	87,44	+ 2,861	— 0,0007	7257
2132	17 Delphini....	6.5	13 18,1	20 50 24,23	6	87,98	+ 2,840	— 0,0004	7258
2133	Equulei	6	3 46,3	20 52 18,22	7	87,65	+ 3,008	— 0,0033	7269
2134	Br. 2749....	6.5	80 8,4	20 52 33,83	7	88,20	— 2,539	— 0,3140	7299
2135	Cygni......	6	44 30,1	20 52 42,01	7	87,94	+ 2,114	+ 0,0034	7273

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2136	Cygni.	6	50 18,4	20 52 56,06	7	87,99	+ 1,899	+ 0,0017	7278
2137	ν Cygni.	4	40 44,6	20 53 4,32	4	87,65	+ 2,234	+ 0,0038	7277
2138	18 Delphini	6.5	10 24,9	20 53 8,05	5	87,01	+ 2,894	— 0,0013	7271
2139	Cephei	5	56 27,8	20 53 20,57	7	87,76	+ 1,605	— 0,0026	7281
2140	33 Vulpeculae. . .	6.5	21 54,1	20 53 21,33	5	86,62	+ 2,682	+ 0,0016	7275
2141	1 Equulei	6	3 52,3	20 53 34,72	6	87,19	+ 3,007	— 0,0032	7276
2142	Cygni.	6	50 2,1	20 54 58,64	6	87,66	+ 1,920	+ 0,0020	7294
2143	Cygni.	6	39 49,3	20 55 43,12	5	86,60	+ 2,270	+ 0,0040	7297
2144	Draconis. . . .	6	75 30,0	20 56 1,62	9	87,80	— 0,645	— 0,1169	7311
2145	f^1 Cygni	5.6	47 5,5	20 56 5,12	6	87,61	+ 2,038	+ 0,0031	7301
2146	2 Equulei	6	6 44,9	20 56 47,08	5	86,63	+ 2,959	— 0,0023	7302
2147	60 Cygni.	6	45 43,4	20 57 20,57	6	87,60	+ 2,092	+ 0,0036	7306
2148	Cygni.	6	39 4,5	20 58 7,92	5	86,57	+ 2,299	+ 0,0042	7313
2149	Cygni.	6	44 21,4	20 58 28,38	6	87,63	+ 2,142	+ 0,0039	7317
2150	3 Equulei	6	5 4,0	20 59 5,97	5	86,68	+ 2,988	— 0,0028	7318
2151	Cygni.	6	41 11,6	20 59 45,10	5	87,60	+ 2,244	+ 0,0043	7326
2152	4 Equulei	6	5 31,4	20 59 59,64	6	87,01	+ 2,981	— 0,0027	7324
2153	Cygni.	6	52 50,9	21 0 26,06	8	87,65	+ 1,827	+ 0,0026	7332
2154	ξ Cygni.	4	43 29,3	21 0 55,85	26	88,17	+ 2,179	+ 0,0042	7333
2155	61 Cygni pr. . . .	6.5	38 12,5	21 1 57,18	41	88,15	+ 2,335	+ 0,0044	7336
2156	61 Cygni sq. . . .	6.7	38 12,3	21 1 58,51	7	87,11	+ 2,335	+ 0,0044	7337
2157	f^2 Cygni.	5.6	47 12,4	21 2 48,76	5	87,61	+ 2,064	+ 0,0038	7345
2158	ν Aquarii.	4.5	—11 49,0	21 3 36,12	3	87,68	+ 3,267	— 0,0097	7344
2159	γ Equulei.	5.4	9 41,3	21 4 59,53	5	86,63	+ 2,915	— 0,0012	7350
2160	Draconis. . . .	6	70 59,5	21 5 43,78	6	87,75	+ 0,398	— 0,0501	7363
2161	Cygni.	6	53 6,8	21 6 51,57	6	87,63	+ 1,851	+ 0,0020	7365
2162	Br. 2777	6.5	77 40,8	21 7 41,30	21	88,73	— 1,108	— 0,1747	7381
2163	ζ Cygni.	3	29 46,6	21 8 15,23	15	87,00	+ 2,551	+ 0,0039	7368
2164	Gr. 3415 . . .	6.5	59 32,1	21 9 0,22	28	87,88	+ 1,530	— 0,0041	7377
2165	Cygni.	6.7	36 10,8	21 9 1,16	4	86,58	+ 2,409	+ 0,0048	7373
2166	δ Equulei	5.4	9 33,7	21 9 7,43	6	87,47	+ 2,920	— 0,0012	7372
2167	Cephei	6	59 38,6	21 9 59,29	9	87,63	+ 1,530	— 0,0041	7387
2168	α Equulei	4	4 47,6	21 10 19,47	16	87,47	+ 2,997	— 0,0028	7380
2169	τ Cygni.	4	37 34,6	21 10 23,94	6	88,02	+ 2,379	+ 0,0050	7385
2170	σ Cygni.	4.5	38 56,0	21 13 5,69	4	86,58	+ 2,354	+ 0,0053	7398

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2171	ν Cygni.	4.5	34 26,1	21 13 23,64	4	86,62	+ 2,463	+ 0,0049	7399
2172	Cephei	5.6	55 20,1	21 13 56,90	8	87,66	+ 1,792	+ 0,0014	7401
2173	*A* Cygni.	6	43 29,0	21 14 21,09	7	87,50	+ 2,234	+ 0,0055	7402
2174	9 Equulei.	6	6 53,3	21 15 38,30	5	86,64	+ 2,966	— 0,0020	7405
2175	Cygni.	5.6	49 2,7	21 15 41,67	6	87,65	+ 2,060	+ 0,0047	7411
2176	α Cephei	3.2	62 7,2	21 15 57,22	3	88,29	+ 1,414	— 0,0072	7416
2177	34 Vulpeculae. . .	6	23 23,6	21 16 5,93	5	86,62	+ 2,693	+ 0,0030	7410
2178	Cephei	6	58 9,5	21 16 13,13	7	87,77	+ 1,662	— 0,0010	7417
2179	Draconis	6	76 33,0	21 16 53,60	10	88,61	— 0,577	— 0,1332	7438
2180	1 Pegasi	4.5	19 20,0	21 16 59,90	14	88,37	+ 2,766	+ 0,0020	7418
2181	6 Cephei	6	64 24,3	21 17 5,28	6	87,83	+ 1,252	— 0,0128	7428
2182	β Equulei	5	6 20,5	21 17 26,01	5	86,65	+ 2,976	— 0,0021	7421
2183	Cephei	6	60 17,3	21 17 43,94	6	87,79	+ 1,549	— 0,0035	7430
2184	Cygni.	6.5	48 54,9	21 18 11,22	6	87,67	+ 2,078	+ 0,0051	7431
2185	Vulpeculae. . .	6	23 48,1	21 19 1,46	5	86,62	+ 2,692	+ 0,0032	7437
2186	Vulpeculae. . .	6	25 42,1	21 19 41,05	5	86,61	+ 2,658	+ 0,0035	7444
2187	Cephei	6	63 45,3	21 20 8,24	6	87,80	+ 1,331	— 0,0100	7449
2188	Cygni.	6	51 11,0	21 20 17,01	7	87,70	+ 2,006	+ 0,0047	7448
2189	ζ Capricorni . . .	4.5	—22 53,3	21 20 23,26	1	87,60	+ 3,435	— 0,0166	7445
2190	69 Cygni.	6	36 11,5	21 21 17,37	7	86,66	+ 2,448	+ 0,0057	7453
2191	35 Vulpeculae. . .	6.5	27 7,8	21 22 49,21	4	86,58	+ 2,639	+ 0,0042	*7461
2192	70 Cygni.	6.5	36 38,3	21 22 52,26	5	86,88	+ 2,443	+ 0,0059	7462
2193	Cephei , ...	6.7	59 16,3	21 24 23,12	10	87,77	+ 1,660	— 0,0007	7476
2194	2 Pegasi	5	23 9,4	21 24 57,91	5	86,59	+ 2,714	+ 0,0033	7474
2195	Cygni.	6	43 51,4	21 25 4,89	6	87,31	+ 2,269	+ 0,0065	7477
2196	*g* Cygni.	5	46 3,3	21 25 23,35	3	88,30	+ 2,206	+ 0,0065	7480
2197	7 Cephei	6	66 19,7	21 25 38,62	9	87,25	+ 1,170	— 0,0163	7482
2198	β Aquarii	3	—6 3,3	21 25 46,19	3	87,02	+ 3,161	— 0,0071	7478
2199	Cygni.	6	52 28,4	21 26 40,53	6	87,77	+ 1,993	+ 0,0051	7483
2200	β Cephei	3	70 4,7	21 27 14.38	5	88,36	+ 0,792	— 0,0349	7498
2201	Cygni.	6	51 42,5	21 27 34,63	5	87,73	+ 2,027	+ 0,0055	7488
2202	Cygni.	6	52 8,1	21 27 45,71	8	87,66	+ 2,012	+ 0,0054	7489
2203	Cephei	6	59 58,5	21 27 58,04	6	87,76	+ 1,648	— 0,0008	7495
2204	Draconis . . . ,	5.6	75 55,2	21 28 56,29	8	88,69	— 0,192	— 0,1088	7509
2205	Cephei	6	70 20,2	21 29 34,28	9	88,12	+ 0,789	— 0,0256	7508

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C
			° '	h m s			s	s	
2206	ϱ Cygni.	4.5	45 6,3	21 29 50,63	6	87,60	+ 2,255	+ 0,0071	7503
2207	72 Cygni.	5	38 2,5	21 30 16,97	6	87,17	+ 2,437	+ 0,0068	7505
2208	Cygni.	6.7	51 12,5	21 30 39,97	6	87,62	+ 2,064	+ 0,0062	7512
2209	3 Pegasi	6	6 7,5	21 32 14,80	6	86,63	+ 2,986	— 0,0019	7519
2210	74 Cygni.	5	39 55,2	21 32 32,39	16	87,52	+ 2,401	+ 0,0071	7521
2211	5 Pegasi	6.5	18 49,5	21 32 36,59	6	87,45	+ 2,799	+ 0,0024	7520
2212	d Aquarii.	5.6	1 45,0	21 33 58,39	6	87,07	+ 3,048	— 0,0036	7527
2213	Cephei	6	53 32,8	21 33 59,02	6	87,77	+ 1,996	+ 0,0059	7530
2214	Cephei	6	61 48,1	21 34 14,86	6	87,79	+ 1,591	— 0,0021	7533
2215	9 Cephei	5.6	61 35,2	21 34 58,08	6	87,79	+ 1,611	— 0,0015	7542
2216	Cygni.	6	49 11,0	21 35 13,13	6	87,65	+ 2,164	+ 0,0074	7548
2217	13 H. Cephei . . .	6	56 59,5	21 35 32,83	18	88,40	+ 1,860	+ 0,0040	7545
2218	75 Cygni.	6.5	42 46,5	21 35 52,07	5	87,05	+ 2,345	+ 0,0078	7544
2219	26 Aquarii.	6	0 47,1	21 36 33,57	4	86,61	+ 3,062	— 0,0040	7546
2220	7 Pegasi	6.5	5 10,7	21 36 45,29	6	86,67	+ 3,002	— 0,0021	7547
2221	Cephei	6	54 22,3	21 37 4,69	7	88,07	+ 1,983	+ 0,0060	7555
2222	76 Cygni.	6	40 18,3	21 37 8,79	7	87,36	+ 2,411	+ 0,0077	7551
2223	77 Cygni	6	40 34,5	21 37 57,42	6	87,65	+ 2,407	+ 0,0078	7559
2224	π^1 Cygni. . , . . .	5.4	50 41,3	21 38 11,37	8	87,78	+ 2,126	+ 0,0076	7560
2225	Cygni.	5.6	40 39,1	21 38 41,20	7	87,35	+ 2,409	+ 0,0079	7565
2226	ε Pegasi	2.3	9 22,3	21 38 47,06	15	88,07	+ 2,945	— 0,0005	7561
2227	79 Cygni.	5.6	37 46,8	21 38 52,77	5	87,50	+ 2,474	+ 0,0076	7566
2228	μ Cygni.	4.5	28 14,7	21 39 13,38	6	87,63	+ 2,658	+ 0,0054	7568
2229	9 Pegasi	5	16 50,8	21 39 18,16	7	87,22	+ 2,839	+ 0,0021	7567
2230	κ Pegasi	4	25 28,4	21 39 39,80	3	87,05	+ 2,712	+ 0,0046	7571
2231	Cephei	6.5	58 16,5	21 40 8,46	6	87,69	+ 1,833	+ 0,0040	7582
2232	11 Cephei	5	70 48,3	21 40 18,47	18	88,53	+ 0,874	— 0,0336	7588
2233	12 Pegasi	6.5	22 26,5	21 41 0,69	7	89,07	+ 2,758	+ 0,0040	7585
2234	Cygni.	6	51 45,7	21 41 20,16	7	87,70	+ 2,107	+ 0,0078	7589
2235	27 Aquarii.	6.5	2 10,7	21 41 39,36	5	86,62	+ 3,044	— 0,0032	7587
2236	78 Draconis	6	71 49,0	21 41 43,64	7	88,22	+ 0,764	— 0,0408	7597
2237	Cygni.	6	42 33,1	21 41 54,45	6	87,19	+ 2,377	+ 0,0084	7593
2238	ν Cephei	5	60 36,8	21 42 16,50	7	88,01	+ 1,730	+ 0,0019	7595
2239	π^2 Cygni.	4.5	48 48,0	21 42 43,78	22	89,24	+ 2,212	+ 0,0086	7598
2240	Cygni.	6	38 26,7	21 43 45,33	6	86,76	+ 2,478	+ 0,0082	7602

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Process. annua	Variaz. secolare	N. del B. A C.
			° ′	h m s			s	s	
2241	12 Cephei	6	60 10,9	21 44 10,54	8	87,71	+ 1,769	+ 0,0030	7605
2242	13 Pegasi	6	16 46,5	21 44 54,49	6	86,61	+ 2,848	+ 0,0023	7606
2243	14 Pegasi	5	29 39,7	21 44 58,78	5	86,64	+ 2,649	+ 0,0062	7607
2244	Cephei	6.7	69 38,5	21 45 4,64	10	88,28	+ 1,072	— 0,0235	7610
2245	Cephei	6	64 39,5	21 45 28,98	7	87,78	+ 1,509	— 0,0043	7611
2246	Cephei	6	52 11,0	21 46 8,52	6	87,59	+ 2,123	+ 0,0086	7612
2247	Cygni	6	39 1,3	21 46 31,92	5	86,86	+ 2,477	+ 0,0086	7614
2248	Cephei	6.7	66 16,9	21 46 35,25	6	87,95	+ 1,399	— 0,0084	7621
2249	15 Pegasi.	6.5	28 16,7	21 47 35,34	5	86,62	+ 2,680	+ 0,0061	7623
2250	16 Pegasi	5.6	25 24,5	21 48 3,43	29	87,29	+ 2,727	+ 0,0053	7627
2251	Cephei	6	55 41,6	21 49 24,64	7	87,70	+ 2,016	+ 0,0079	7636
2252	Cephei	6	53 24,7	21 51 4,97	7	87,64	+ 2,112	+ 0,0092	7642
2253	μ Cephei	6	56 5,4	21 51 11,33	7	87,77	+ 2,013	+ 0,0081	7643
2254	79 Draconis	6.7	73 10,9	21 51 29,62	10	88,28	+ 0,721	— 0,0474	7654
2255	17 Pegasi	6.5	11 33,3	21 51 34,45	5	86,60	+ 2,927	+ 0,0008	7641
2256	Cephei	6	52 43,3	21 51 39,05	6	87,65	+ 2,140	+ 0,0095	7646
2257	Cephei	6	61 1,2	21 52 3,10	6	87,81	+ 1,794	+ 0,0043	7651
2258	Cephei	6.5	63 6,1	21 53 33,29	8	87,68	+ 1,692	+ 0,0017	7658
2259	28 Aquarii.	6	0 4,6	21 54 27,33	6	87,07	+ 3,072	— 0,0038	7660
2260	18 Pegasi	6	6 11,4	21 54 38,25	4	86,63	+ 2,997	— 0,0012	7659
2261	19 Pegasi	6	7 43,7	21 55 41,63	5	87,03	+ 2,979	— 0,0006	7662
2262	20 Pegasi	6.5	12 35,6	21 55 43,84	23	87,95	+ 2,918	+ 0,0013	7664
2263	Cephei	6	79 47,1	21 56 2,23	9	88,62	— 0,745	— 0,2134	7678
2264	16 Cephei	5.6	72 39,4	21 57 40,47	7	87,83	+ 0,895	— 0,0373	7686
2265	21 Pegasi	6	10 51,3	21 57 55,17	5	86.61	+ 2,942	+ 0,0008	7674
2266	Cygni.	6	42 17,0	21 58 13,34	5	86,76	+ 2,456	+ 0,0105	7679
2267	14 Cephei	6	57 27,2	21 58 22,78	10	88,09	+ 2,012	+ 0,0092	7683
2268	Cygni.	6	44 7,2	21 58 30,38	5	87,59	+ 2,417	+ 0,0108	7681
2269	ν Pegasi	5	4 31,3	22 0 7,92	5	86,62	+ 3,020	— 0,0017	7689
2270	α Aquarii.	3	—0 51,2	22 0 8,03	9	88,94	+ 3,082	— 0,0041	7688
2271	15 Cephei	6	59 16,9	22 0 18,82	6	87,79	+ 1,950	+ 0,0085	7696
2272	Cygni.	6	46 42,0	22 0 34,94	6	87,85	+ 2,366	+ 0,0114	7695
2273	18 Cephei	5	62 35,1	22 0 35,21	8	88,14	+ 1,790	+ 0,0051	7699
2274	23 Pegasi	6.5	28 25,8	22 0 35,70	5	86,67	+ 2,712	+ 0,0070	7693
2275	ξ Cephei	5	64 5,5	22 0 36,31	8	88,70	+ 1,703	+ 0,0026	7700

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2276	Cephei	6	59 20,0	22 0 37,64	6	87,79	+ 1,950	+ 0,0085	7698
2277	Lacertae	6.5	44 28,7	22 1 34,73	5	86,61	+ 2,424	+ 0,0113	7705
2278	20 Cephei	6.5	62 14,9	22 1 39,84	29	88,47	+ 1,818	+ 0,0059	7707
2279	25 Pegasi	6	21 10,1	22 1 40,36	5	86,64	+ 2,819	+ 0,0048	7712
2280	19 Cephei	6.5	61 44,7	22 1 45,40	6	87,82	+ 1,845	+ 0,0066	7708
2281	ι Pegasi	4	24 48,5	22 1 53,30	3	87,27	+ 2,768	+ 0,0060	7706
2282	Lacertae	6	47 23,7	22 4 20,12	7	88,84	+ 2,370	+ 0,0121	7727
2283	27 Pegasi	6.5	32 38,1	22 4 21,19	3	87,37	+ 2,659	+ 0,0088	7721
2284	ϑ Pegasi	3.4	5 39,4	22 4 39,03	7	87,46	+ 3,009	— 0,0011	7723
2285	Cephei	6	58 45,0	22 4 52,01	6	87,75	+ 2,012	+ 0,0102	7736
2286	π Pegasi	4.5	32 38,3	22 5 6,13	9	86,90	+ 2,661	+ 0,0089	7731
2287	28 Pegasi	6	20 26,2	22 5 18,18	5	86,92	+ 2,834	+ 0,0046	7733
2288	Lacertae	6	42 29,3	22 6 29,30	5	87,64	+ 2,490	+ 0,0117	7743
2289	Pegasi	6	15 29,9	22 6 32,53	5	86,67	+ 2,896	+ 0,0030	7742
2290	Lacertae	5.6	50 16,8	22 6 53,36	6	87,76	+ 2,310	+ 0,0128	7746
2291	ζ Cephei	3.4	57 39,5	22 7 2,21	12	88,75	+ 2,073	+ 0,0114	7749
2292	24 Cephei	4.5	71 48,0	22 7 41,37	1	88,32	+ 1,159	— 0,0231	7758
2293	λ Cephei	6.5	58 52,3	22 7 46,54	9	88,39	+ 2,031	+ 0,0110	7755
2294	Cephei	6	56 17,5	22 7 50,45	7	88,11	+ 2,130	+ 0,0122	7754
2295	Cephei	6	71 34,2	22 8 5,86	8	88,71	+ 1,191	— 0,0205	7761
2296	Cephei	6	69 35,4	22 8 8,19	8	88,83	+ 1,388	— 0,0096	7760
2297	Cephei	6	60 12,9	22 8 23,65	6	88,09	+ 1,979	+ 0,0103	7759
2298	Pegasi	6	28 3,8	22 8 36,26	5	86,66	+ 2,739	+ 0,0077	7757
2299	Cephei	6	62 44,9	22 8 56,98	8	88,40	+ 1,863	+ 0,0079	7766
2300	Lacertae	5	39 10,1	22 9 9,36	5	86,69	+ 2,566	+ 0,0112	7765
2301	Lacertae	6	42 24,5	22 10 7,13	5	86,97	+ 2,509	+ 0,0121	7770
2302	ε Cephei	5.4	56 29,7	22 10 58,99	6	87,67	+ 2,147	+ 0,0130	7778
2303	1 Lacertae	5.4	37 12,1	22 11 10,45	5	86,69	+ 2,609	+ 0,0109	7777
2304	Cephei	5.4	52 6,3	22 14 22,87	6	87,65	+ 2,308	+ 0,0143	7787
2305	25 Cephei	6	62 15,2	22 14 37,34	6	87,83	+ 1,945	+ 0,0107	7789
2306	30 Pegasi	5.6	5 14,2	22 14 55,45	5	86,66	+ 3,018	— 0,0009	7788
2307	γ Aquarii.	3.4	—1 56,5	22 15 58,49	3	88,70	+ 3,092	— 0,0042	7795
2308	Cephei	6.7	56 21,9	22 16 4,13	6	87,83	+ 2,192	+ 0,0144	7799
2309	31 Pegasi	5.4	11 39,1	22 16 6,19	12	87,40	+ 2,952	+ 0,0019	7796
2310	32 Pegasi	5	27 46,6	22 16 14,65	6	86,68	+ 2,764	+ 0,0082	7798

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2311	2 Lacertae	5.4	45 59,0	22 16 28,91	7	87,68	+ 2,469	+ 0,0139	7800
2312	Lacertae	6	43 11,4	22 17 19,62	8	87,70	+ 2,529	+ 0,0134	7803
2313	Cephei	5.6	56 43,7	22 18 56,76	9	88,39	+ 2,203	+ 0,0151	7812
2314	Cephei	6	55 24,4	22 18 59,12	5	88,24	+ 2,245	+ 0,0153	7813
2315	3 Lacertae	4.5	51 40,7	22 19 14,09	18	88,48	+ 2,352	+ 0,0154	7815
2316	π Aquarii.	5.4	0 49,2	22 19 39,52	5	86,66	+ 3,064	— 0,0027	7814
2317	4 Lacertae	5	48 55,1	22 20 3,40	7	87,73	+ 2,425	+ 0,0151	7820
2318	Lacertae	6	49 50,5	22 20 50,29	9	88,09	+ 2,409	+ 0,0155	7825
2319	34 Pegasi	6	3 49,9	22 21 1,45	7	86,73	+ 3,035	— 0,0013	7823
2320	Cephei	6	62 46,1	22 22 6,10	6	88,16	+ 1,996	+ 0,0133	7829
2321	35 Pegasi	6.5	4 8,6	22 22 17,47	6	86,63	+ 3,032	— 0,0011	7827
2322	37 Pegasi	6.5	3 52,4	22 24 24,33	5	86,62	+ 3,036	— 0,0011	7838
2323	5 Lacertae	5	47 8,6	22 24 56,75	6	87,63	+ 2,492	+ 0,0157	7845
2324	38 Pegasi	6.5	32 0,6	22 25 0,02	5	87,67	+ 2,736	+ 0,0104	7843
2325	Cephei	6	53 41,0	22 25 3,86	6	87,70	+ 2,340	+ 0,0169	7846
2326	δ Cephei	var	57 51,1	22 25 5,26	28	88,27	+ 2,216	+ 0,0168	7848
2327	6 Lacertae	5	42 33,6	22 25 44,44	5	86,81	+ 2,582	+ 0,0144	7850
2328	28 Cephei	6.5	78 18,5	22 25 52,62	11	88,71	+ 0,513	— 0,0893	7857
2329	7 Lacertae	4	49 43,0	22 26 45,52	14	88,14	+ 2,448	+ 0,0166	7855
2330	39 Pegasi	6	19 39,8	22 27 16,47	6	86,62	+ 2,884	+ 0,0058	7856
2331	Lacertae	6	39 12,8	22 27 34,68	5	86,67	+ 2,644	+ 0,0135	7858
2332	ϱ Cephei	6.5	78 15,6	22 28 54,29	11	88,71	+ 0,583	— 0,0839	7874
2333	Cephei	6	56 3,3	22 29 24,63	6	87,76	+ 2,308	+ 0,0182	7871
2334	η Aquarii.	4.8	—0 41,1	22 29 42,20	26	87,25	+ 3,079	— 0,0031	7868
2335	Cephei	6.7	61 12,6	22 29 56,24	7	87,85	+ 2,141	+ 0,0170	7875
2336	Cephei	5.6	75 39,6	22 30 20,59	6	88,57	+ 1,079	— 0,0340	7881
2337	8 Lacertae	6	39 3,9	22 30 58,69	5	87,67	+ 2,662	+ 0,0138	7880
2338	Lacertae	6	49 30,1	22 31 19,26	6	87,67	+ 2,482	+ 0,0175	7882
2339	9 Lacertae	5	58 58,6	22 32 51,23	6	87,72	+ 2,460	+ 0,0180	7888
2340	31 Cephei	5.6	73 4,3	22 33 3,15	11	88,77	+ 1,446	— 0,0073	7896
2341	40 Pegasi	6	18 57,2	22 33 33,18	7	86,63	+ 2,903	+ 0,0059	7893
2342	10 Lacertae	5	38 28,7	22 34 19,52	15	87,36	+ 2,684	+ 0,0142	7901
2343	41 Pegasi	6	19 6,5	22 34 27,25	3	86,66	+ 2,903	+ 0,0061	7900
2344	30 Cephei	5.6	63 0,8	22 34 44,82	12	88,32	+ 2,118	+ 0,0186	7902
2345	Cephei	6.7	74 48,0	22 34 51,44	8	88,74	+ 1,286	— 0,0084	7907

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2346	11 Lacertae	5	43 42,1	22 35 41,47	6	87,80	+ 2,613	+ 0,0164	7906
2347	ζ Pegasi	3.4	10 15,4	22 35 58,57	6	89,79	+ 2,986	+ 0,0023	7908
2348	Pegasi.	6	13 56,5	22 36 31,41	3	86,64	+ 2,954	+ 0,0040	7912
2349	12 Lacertae	6	39 39,1	22 36 33,18	6	87,54	+ 2,678	+ 0,0149	7915
2350	o Pegasi	5	28 44,0	22 36 35,61	7	86,89	+ 2,812	+ 0,0104	7914
2351	Lacertae	6	40 58,3	22 36 41,13	6	87,53	+ 2,660	+ 0,0154	7917
2352	η Pegasi	3	29 38,8	22 37 50,79	14	87,47	+ 2,806	+ 0,0109	7923
2353	Lacertae	6	38 53,4	22 39 7,50	1	86,69	+ 2,700	+ 0,0150	7931
2354	13 Lacertae	6	41 14,5	22 39 11,13	31	88,90	+ 2,668	+ 0,0160	7932
2355	45 Pegasi	6	18 47,2	22 40 7,07	5	86,63	+ 2,917	+ 0,0064	7937
2356	ξ Pegasi	5 4	11 36,5	22 40 11,69	6	86,69	+ 2,980	+ 0,0032	7943
2357	λ Pegasi	4	22 59,2	22 41 13,95	9	87,39	+ 2,881	+ 0,0083	7945
2358	Lacertae	5.6	43 58,0	22 41 17,46	8	87,18	+ 2,638	+ 0,0174	7948
2359	Cephei	6.7	57 54,2	22 43 1,07	5	87,77	+ 2,370	+ 0,0226	7953
2360	μ Pegasi.	4	24 1,2	22 44 41,61	12	86,80	+ 2,880	+ 0,0090	7958
2361	Cephei	5	55 19,2	22 45 13,90	6	87,86	+ 2,453	+ 0,0226	7961
2362	Cephei	6.7	67 59,2	22 45 16,40	7	88,51	+ 2,013	+ 0,0278	7963
2363	14 Lacertae	6	41 22,3	22 45 24,13	6	86,70	+ 2,696	+ 0,0169	7962
2364	ι Cephei	3.4	65 37,3	22 45 45,88	19	88,95	+ 2,134	+ 0,0227	7967
2365	σ Pegasi	5	9 15,0	22 46 49,45	5	86,56	+ 3,004	+ 0,0025	7971
2366	15 Lacertae	6	42 43,6	22 47 4,40	5	87,72	+ 2,686	+ 0,0178	7972
2367	Cephei	6	61 6,7	22 47 4,91	9	85,33	+ 2,314	+ 0,0244	7973
2368	Pegasi	6	16 15,5	22 47 37,38	5	86,69	+ 2,952	+ 0,0057	7975
2369	Lacertae	6	39 35,0	22 48 9,87	7	87,15	+ 2,732	+ 0,0165	7978
2370	Lacertae	6	44 9,9	22 48 44,85	6	87,86	+ 2,675	+ 0,0188	7983
2371	Lacertae	6	39 47,2	22 49 4,32	7	86,99	+ 2,733	+ 0,0167	7984
2372	1 Piscium	6.7	0 28,7	22 49 21,90	5	86,72	+ 3,069	— 0,0017	7985
2373	ρ Pegasi	5	8 13,8	22 49 41,40	7	86,73	+ 3,014	+ 0,0021	7988
2374	16 Lacertae	6	41 1,0	22 51 22,38	6	86,69	+ 2,729	+ 0,0177	7994
2375	Piscium	6.7	3 13,3	22 51 56,72	5	86,64	+ 3,050	— 0,0001	7996
2376	51 Pegasi	6.5	20 10,7	22 52 3,71	6	86,76	+ 2,929	+ 0,0078	7997
2377	Lacertae	6.7	48 5,8	22 52 12,84	7	87,77	+ 2,638	+ 0,0213	7999
2378	52 Pegasi	6	11 8,5	22 53 41,63	7	86,77	+ 2,997	+ 0,0037	8003
2379	Cephei	6.7	72 32,7	22 54 21,84	9	88,62	+ 1,871	+ 0,0188	8015
2380	Cephei	6	59 13,5	22 54 38,72	7	87,84	+ 2,441	+ 0,0270	8013

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2381	2 Piscium	6	0 22,5	22 54 49,19	6	86,69	+ 3,070	— 0,0014	8005
2382	*o* Andromedae . .	3.4	41 44,1	22 56 51,60	34	88,24	+ 2,741	+ 0,0188	8023
2383	2 Andromedae . .	6	42 10,0	22 57 32,50	6	87,73	+ 2,747	+ 0,0192	8028
2384	*β* Piscium	5.4	3 13,7	22 58 16,72	6	86,69	+ 3,052	+ 0,0002	8031
2385	*β* Pegasi	var	27 29,2	22 58 26,48	5	86,96	+ 2,888	+ 0,0118	8032
2386	3 Andromedae . .	6	49 27,2	22 59 14,76	6	87,74	+ 2,663	+ 0,0235	8036
2387	*α* Pegasi	2	14 36,8	22 59 16,88	11	87,48	+ 2,981	+ 0,0057	8034
2388	55 Pegasi	5	8 48,9	23 1 27,74	6	86,69	+ 3,020	+ 0,0031	8051
2389	56 Pegasi	5	24 52,5	23 1 45,25	6	86,73	+ 2,917	+ 0,0108	8052
2390	1 Cassiopejae . .	5	58 49,5	23 1 57,83	6	87,91	+ 2,519	+ 0,0296	8054
2391	4 Andromedae . .	6	45 47,6	23 2 37,54	6	87,40	+ 2,732	+ 0,0221	8058
2392	5 Andromedae . .	6.7	48 41,8	23 2 45,69	6	87,81	+ 2,696	+ 0,0238	8059
2393	*A* Piscium.	6	1 31,8	23 3 2,89	6	86,93	+ 3,064	— 0,0004	8060
2394	57 Pegasi	5.6	8 4,9	23 3 58,35	5	86,69	+ 3,027	+ 0,0027	8070
2395	*π* Cephei	5.4	74 47,6	23 4 23,96	27	88,75	+ 1,891	+ 0,0242	8074
2396	58 Pegasi	5.6	9 13,6	23 4 29,10	5	86,69	+ 3,020	+ 0,0038	8071
2397	59 Pegasi	5	8 7,4	23 6 10,94	5	86,71	+ 3,028	+ 0,0030	8078
2398	60 Pegasi	6	26 15,2	23 6 29,07	7	86,68	+ 2,920	+ 0,0121	8079
2399	7 Andromedae . .	5	48 48,3	23 7 30,56	6	87,39	+ 2,726	+ 0,0249	8082
2400	Br. 3077. . . .	6	56 33,7	23 7 58,92	35	88,90	+ 2,616	+ 0,0303	8083
2401	61 Pegasi	6	27 38,9	23 10 23,97	5	86,68	+ 2,922	+ 0,0130	8097
2402	Cephei	6	73 37,9	23 10 42,70	8	88,67	+ 2,101	+ 0,0363	8104
2403	Cephei	6	70 17,3	23 11 23,35	5	88,74	+ 2,287	+ 0,0393	8106
2404	*γ* Piscium	4	2 40,9	23 11 27,62	31	88,11	+ 3,059	+ 0,0005	8105
2405	Cassiopejae .	6	52 37,2	23 11 41,53	5	87,37	+ 2,706	+ 0,0285	8107
2406	Andromedae . .	6	44 33,9	23 12 6,31	6	87,74	+ 2,800	+ 0,0230	8110
2407	8 Andromedae . .	5.6	48 24,8	23 12 38,66	6	88,70	+ 2,763	+ 0,0257	8114
2408	Andromedae . .	6	44 53,3	23 12 46,29	6	87,89	+ 2,800	+ 0,0234	8115
2409	9 Andromedae . .	6	41 10,4	23 13 10,31	7	88,27	+ 2,835	+ 0,0210	8118
2410	Andromedae . .	6	44 32,1	23 13 51,44	6	87,77	+ 2,809	+ 0,0233	8120
2411	Cephei	6	73 5,3	23 13 54,81	8	88,82	+ 2,194	+ 0,0461	8122
2412	*o* Cephei	5.6	67 30,6	23 14 6,59	7	88,90	+ 2,430	+ 0,0407	8124
2413	11 Andromedae . .	6	48 1,3	23 14 22,37	9	88,27	+ 2,779	+ 0,0258	8125
2414	Andromedae . .	6	47 46,7	23 14 31,73	5	88,59	+ 2,782	+ 0,0257	8126
2415	10 Andromedae . .	6	41 28,5	23 14 38,23	8	87,89	+ 2,840	+ 0,0215	8128

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2416	*b* Piscium.	5.6	4 46,8	23 14 44,32	6	86,54	+ 3,051	+ 0,0017	8127
2417	*τ* Pegasi	5.4	23 8,3	23 15 11,52	12	87,68	+ 2,961	+ 0,0111	8131
2418	Andromedae . .	6.7	43 30,9	23 15 31,85	6	88,48	+ 2,828	+ 0,0229	8135
2419	12 Andromedae . .	6	37 34,9	23 15 34,68	6	87,68	+ 2,874	+ 0,0192	8136
2420	64 Pegasi	6	31 12,6	23 16 32,79	8	86,78	+ 2,920	+ 0,0155	8141
2421	66 Pegasi	6.5	11 42,7	23 17 31,62	5	86,50	+ 3,021	+ 0,0054	8149
2422	Cassiopejae . .	6.7	59 31,8	23 17 38,30	8	88,36	+ 2,655	+ 0,0360	8153
2423	Cassiopejae . .	6	56 55,9	23 19 7,77	7	87,84	+ 2,708	+ 0,0342	8158
2424	67 Pegasi	6	31 46,9	23 19 27,74	5	86,82	+ 2,927	+ 0,0162	8159
2425	*υ* Pegasi.	5.4	22 47,9	23 19 53,18	6	87,09	+ 2,975	+ 0,0113	8160
2426	4 Cassiopejae . .	6.5	61 40,7	23 19 57,14	6	88,28	+ 2,641	+ 0,0391	8162
2427	*κ* Piscium	5.6	0 39,2	23 21 17,55	12	87,22	+ 3,070	0,0000	8169
2428	9 Piscium	6	0 31,1	23 21 36,74	6	86,80	+ 3,070	0,0000	8170
2429	Cephei	6	70 4,8	23 21 37,98	7	88,78	+ 2,458	+ 0,0487	8173
2430	13 Andromedae . .	6	42 18,4	23 21 49,29	6	87,79	+ 2,871	+ 0,0231	8171
2431	*ϑ* Piscium.	4.5	5 46,5	23 22 23,29	5	86,57	+ 3,050	+ 0,0028	8177
2432	Cephei	6	69 45,3	23 22 37,74	7	88,70	+ 2,484	+ 0,0494	8180
2433	70 Pegasi	5	12 9,2	23 23 35,50	6	86,74	+ 3,027	+ 0,0061	8182
2434	Cassiopejae . .	5	57 56,6	23 24 57,08	6	87,78	+ 2,747	+ 0,0372	8188
2435	14 Andromedae . .	6	38 37,9	23 25 52,76	9	86,70	+ 2,914	+ 0,0212	8195
2436	72 Pegasi	6.5	30 43,1	23 28 29,69	3	87,17	+ 2,964	+ 0,0165	8206
2437	73 Pegasi	6	32 53,3	23 29 11,89	6	86,80	+ 2,957	+ 0,0179	8211
2438	15 Andromedae . .	6	39 37,8	23 29 14,65	6	87,27	+ 2,924	+ 0,0224	8212
2439	Cephei	6	71 2,0	23 30 12,71	7	88,83	+ 2,568	+ 0,0583	8217
2440	16 Piscium	6	1 29,5	23 30 46,55	5	86,52	+ 3,068	+ 0,0011	8218
2441	Andromedae . .	6.7	43 49,2	23 32 9,49	6	87,48	+ 2,917	+ 0,0260	8223
2442	*λ* Andromedae . .	4	45 51,7	23 32 10,87	1	87,75	+ 2,906	+ 0,0276	8224
2443	75 Pegasi	6.5	17 47,5	23 32 23,50	6	86,69	+ 3,021	+ 0,0096	8227
2444	*ι* Andromedae . .	4	42 39,5	23 32 44,54	4	88,26	+ 2,926	+ 0,0252	8229
2445	18 Andromedae . .	6.5	49 51,7	23 33 48,64	5	87,80	+ 2,892	+ 0,0316	8231
2446	*ι* Piscium	4.5	5 1,8	23 34 17,44	5	86,41	+ 3,059	+ 0,0030	8233
2447	*γ* Cephei	3.4	77 1,1	23 34 50,16	4	89,10	+ 2,437	+ 0,0762	8238
2448	*κ* Andromedae . .	4.5	43 43,5	23 34 59,45	6	88,63	+ 2,933	+ 0,0264	8237
2449	*λ* Piscium	5	1 10,5	23 36 26,02	5	86,52	+ 3,070	+ 0,0011	8243
2450	Andromedae . .	6.7	44 22,9	23 36 50,04	4	87,78	+ 2,941	+ 0,0272	8245

Catalogo delle Ascensioni Rette Medie pel 1890,0 di 2483 Stelle.

Numero	NOME DELLE STELLE	Grandezza	Declinaz. media approssim. 1890,0	AR media 1890,0	Num. delle osserv.	Epoca media	Precess. annua	Variaz. secolare	N. del B. A. C.
			° ′	h m s			s	s	
2451	ω² Aquarii.	4.5	−15 9,2	23 37 1,17	1	85,88	+ 3,109	— 0,0077	8246
2452	76 Pegasi	6.7	15 43,5	23 37 8,77	7	87,28	+ 3,035	+ 0,0087	8248
2453	77 Pegasi	6.5	9 43,3	23 37 46,40	4	86,81	+ 3,050	+ 0,0057	8250
2454	78 Pegasi	5	28 45,1	23 38 27,52	6	87,26	+ 3,004	+ 0,0163	8256
2455	ψ Andromedae . .	5	45 48,6	23 40 35,03	5	87,70	+ 2,956	+ 0,0292	8261
2456	19 Piscium.	6	2 52,6	23 40 46,26	5	86,50	+ 3,067	+ 0,0022	8262
2457	ι Cassiopejae . .	5	58 2,3	23 41 40,76	6	87,84	+ 2,901	+ 0,0434	8268
2458	41 H. Cephei . . .	6.5	67 11,7	23 42 39,03	8	89,38	+ 2,832	+ 0,0604	8273
2459	Cassiopejae . .	6.7	64 15,9	23 43 19,64	8	88,57	+ 2,871	+ 0,0547	8277
2460	6 Cassiopejae . .	6	61 36,2	23 43 28,80	6	87,87	+ 2,894	+ 0,0498	8279
2461	Cassiopejae . .	6	58 21,1	23 43 47,68	7	88,11	+ 2,919	+ 0,0446	8282
2462	21 Piscium	6	0 27,9	23 43 49,58	6	86,53	+ 3,072	+ 0,0012	8281
2463	79 Pegasi	6	28 13,8	23 44 5,41	7	86,58	+ 3,023	+ 0,0165	8284
2464	Cassiopejae. . .	6	51 0,6	23 44 52,69	6	87,72	+ 2,963	+ 0,0353	8289
2465	22 Piscium	6.7	2 19,1	23 46 19,99	8	86,64	+ 3,069	+ 0,0023	8295
2466	φ Pegasi.	6.5	18 30,6	23 46 53,47	30	88,28	+ 3,047	+ 0,0110	8299
2467	82 Pegasi	6.5	10 20,1	23 47 0,42	7	86,45	+ 3,059	+ 0,0066	8300
2468	ρ Cassiopejae. . .	5.4	56 53,2	23 48 53,32	21	88,21	+ 2,973	+ 0,0441	8310
2469	Cephei	6.7	73 47,9	23 49 29,13	7	88,54	+ 2,862	+ 0,0901	8314
2470	26 Piscium	6	6 27,6	23 49 30,15	6	86,26	+ 3,066	+ 0,0047	8312
2471	Cassiopejae. . .	6	55 5,6	23 51 36,11	6	87,80	+ 3,002	+ 0,0423	8322
2472	ψ Pegasi	5	24 31,8	23 52 9,27	8	86,80	+ 3,052	+ 0,0149	8324
2473	Cassiopejae. . .	6	49 49,6	23 52 32,90	6	87,71	+ 3,021	+ 0,0357	8326
2474	σ Cassiopejae. . .	5	55 8,6	23 53 25,85	8	87,78	+ 3,017	+ 0,0429	8330
2475	ω Piscium.	4	6 15,3	23 53 39,70	35	87,77	+ 3,068	+ 0,0047	8331
2476	Cassiopejae. . .	6.7	60 36,6	23 56 0,35	6	87,84	+ 3,031	+ 0,0533	8344
2477	Andromedae . .	6	41 45,3	23 56 6,40	5	86,98	+ 3,052	+ 0,0280	8345
2478	85 Pegasi	6	26 30,0	23 56 25,29	6	86,75	+ 3,062	+ 0,0165	8350
2479	c¹ Piscium	6.7	8 20,7	23 56 46,12	6	86,40	+ 3,070	+ 0,0061	8353
2480	c² Piscium	6	7 52,5	23 56 52,37	6	86,54	+ 3,070	+ 0,0058	8354
2481	Cassiopejae. . .	6.7	65 29,2	23 56 58,18	8	88,43	+ 3,033	+ 0,0656	8355
2482	9 Cassiopejae. . .	6	61 40,5	23 58 33,95	6	87,81	+ 3,057	+ 0,0567	8359
2483	Cassiopejae. . .	6	60 42,1	23 59 25,23	8	87,81	+ 3,066	+ 0,0549	8366

ERRATA - CORRIGE

Num. e nome delle stelle		*Errori*	*Correzioni*
314	48 H. Cephei . . .	Decl. app. $77^{\circ}\ 19',6$	Decl. app. $77^{\circ}\ 19',8$
1345	82 Ursae maj . . .	Var. sec. $+\ 0^{s},0124$	Var. sec. $-\ 0^{s}.0124$
1478	η Coronae bor . .	AR med. $15^{h}\ 19^{m}\ 39^{s}.60$	AR med. $15^{h}\ 18^{m}\ 39^{s},60$
1731	87 Herculis	Var. sec. $+\ 0^{s},0225$	Var. sec. $+\ 0^{s}.0025$
1948	χ Aquilae . . . . ,	AR med. $19^{h}\ 37^{m}\ 25^{s},47$	AR med. $19^{h}\ 37^{m}\ 23^{s},47$
2038	33 Cygni	Prec. annua $-\ 1^{s},390$	Prec. annua $+\ 1^{s},390$
2039	Draconis	Prec. annua $-\ 1^{s},104$	Prec. annua $+\ 1^{s},104$
2043	Cygni	Prec. annua $+\ 1^{s},74$	Prec. annua $+\ 1^{s},743$
2044	κ Cephei	Prec. annua $+\ 1^{s},927$	Prec, annua $-\ 1^{s},927$

RELAZIONE

letta dal Corrisp. G. B. Favero, relatore, a nome anche del Socio F. Brioschi, nella seduta del 6 maggio 1894, sulla Memoria dell'ing. L. Perozzo, intitolata: *Calcolo dell'utilità economica delle ferrovie.*

« Il sig. ing. Luigi Perozzo, nella Memoria che ha per titolo: *Calcolo dell'utilità economica delle ferrovie*, si propone un doppio scopo: primieramente di generalizzare le formole già studiate da altri autori e che servono a rappresentare quantitativamente l'utilità economica dei mezzi di trasporto in genere, ed in secondo luogo di considerare alcuni casi particolari delle formole stesse, applicandole ad una delle principali reti ferroviarie italiane, cioè alla rete Adriatica e determinando per questa le costanti da cui le formole sono accompagnate, per poterne dedurre il valore della rispettiva utilità economica, e stabilire quindi la differenza fra l'utilità economica così determinata e quella che si avrebbe se i trasporti si facessero mediante le strade ordinarie.

« I concetti a cui il lavoro dell'Autore s' informa sono quelli del dott. E. Sax, concetti che presero poi forma analitica nei lavori del Launhardt e del Lill. Il Perozzo tratta però l'argomento da un punto di vista più generale, e sviluppa col mezzo dell'analisi l'influenza che una variazione delle tariffe deve necessariamente avere nella variazione dell'utilità economica; e stabilisce quindi le equazioni che servono a determinare le modificazioni da apportarsi alle costanti relative al prezzo del trasporto per ottenere il massimo aumento di una data utilità economica. Dopo questo esame delle formole generali, l'Autore passa ad individuare le funzioni esprimenti l'intensità del traffico, il prezzo di vendita e la spesa di trasporto, seguendo in ciò il Launhardt e specialmente il Lill, e servendosi in modo speciale di una delle funzioni proposte da quest'ultimo per esprimere l' intensità del traffico.

« Mediante un opportuno calcolo alle differenze, egli deduce poi il valore delle costanti, espresso mediante i dati d'osservazione di una rete esistente, e ne fa l'applicazione alla rete Adriatica.

« Considerando l'importanza che le applicazioni del calcolo agli studî economici hanno raggiunto in questi ultimi tempi, e costituendo il lavoro del Perozzo non solo un ampliamento di tali studî nella questione da lui svolta, ma anche una prima e pregevole applicazione ad una delle nostre principali reti ferroviarie, la Commissione propone all'Accademia che la Memoria del sig. ing. Luigi Perozzo, sopra citata, sia stampata in esteso negli Atti dell'Accademia ».

Calcolo dell'utilità economica dei mezzi di trasporto ed in particolare delle ferrovie.

Memoria dell'ing. LUIGI PEROZZO.

I. Considerazioni intorno l'utilità economica dei trasporti.

L'utilità economica dei mezzi di trasporto è definita nei trattati generali di economia politica e nelle opere speciali dell'economia dei trasporti [1]. La possibilità di produrre in determinati punti od in zone di un paese abitato, beni economici con minori sforzi di quelli necessarî in altri punti od in altre zone, dà origine alla convenienza economica del trasporto di beni o merci, la quale ha un limite naturale nella differenza tra il massimo prezzo delle merci, conseguibile nel luogo di consumo, ed il minimo costo nel luogo di produzione.

Lo sviluppo dei mezzi di trasporto, ossia dal punto di vista economico, la progressiva diminuzione del costo dei trasporti, aumenta a sua volta la possibilità di produrre più economicamente nei luoghi dotati di favorevoli condizioni naturali, e forniti di speciali mezzi produttivi, per l'ingrandimento del campo di spaccio della merce, e per la conseguente diminuzione delle spese di produzione sopra ogni unità di merci prodotta.

Il concetto dell'utilità economica dei mezzi di trasporto per le merci, si estende per analogia ai trasporti di persone.

Nella classe dei commercianti l'utilità economica del trasporto dei commessi viaggiatori, dei sensali, dei custodi di bestiame e simili è evidente ed ha una perfetta analogia con quella considerata per le merci. In quella degli uomini d'affari, industriali, banchieri, nelle classi operaie e specialmente nelle agricole che emigrano periodicamente per i lavori campestri, nei professionisti, avvocati, medici, ingegneri che devono recarsi a trattare pratiche della loro professione in località differenti da quella della loro residenza, ed infine per gli amministratori di enti morali, o di amministrazioni pubbliche che sono obbligati a trattare altrove gli affari importanti della loro azienda, l'utilità economica dei trasporti è pure manifesta.

Per le altre classi sociali, si consideri che l'economia politica riguarda ora i beni immateriali come sorgenti di utilità, quali sono le lezioni di un professore, ed assimila le soddisfazioni che si ricavano dalla contemplazione di un'opera d'arte, dalla udizione di un'opera musicale, di un dramma e via dicendo, ai vantaggi che procura il consumo di beni materiali. La facilità dei trasporti offerta ai viaggiatori propriamente detti, cioè ai *touristes*, porgendo il modo di vedere, con lieve disagio,

[1] V. ad es. Lampertico, *Il Commercio*. Treves, Milano, 1878.

gli originali delle opere d'arte, procura quindi una maggiore soddisfazione di quella che si ricaverebbe leggendo libri, guide o descrizioni. I viaggi fatti a scopo di interessi famigliari possono pure considerarsi come equivalenti agli accennati per regolare pendenze domestiche, successioni od altre, o per procurare soddisfazioni morali quali sono le visite ai propri cari.

Definito così il fenomeno dell'utilità economica dei mezzi di trasporto delle merci e delle persone qualitativamente, poche considerazioni rimarrebbero a fare se non venisse in aiuto l'analisi quantitativa. Il dott. Emilio Sax, nel brano riportato dal prof. Bodio nel suo studio intitolato: *Di alcuni indici del movimento economico in Italia* (1), ha però fatto progredire col linguaggio ordinario le deduzioni di questo concetto nell'ordine quantitativo, senza addentrarsi tuttavia nelle formole colle quali si può valutare l'economia anzidetta (2).

Alcuni economisti hanno stimato l'utilità economica delle ferrovie, moltiplicando la differenza tra le tariffe dei trasporti sulle vie ordinarie e quelle per le vie ferrate per il totale numero delle unità di traffico (viaggiatori-chilometro o tonnellate-chilometro) indicato dalle statistiche ferroviarie (3). Ma questo metodo di valutazione conduce ad un risultato troppo elevato, da tre a sei volte il prodotto lordo sulle ferrovie, per le merci (4), poichè il traffico su queste vie è certamente ben maggiore di quello che si avrebbe sulle strade ordinarie, che percorressero la stessa rete ferroviaria, quando non vi fossero altri mezzi di comunicazione. L'accrescimento del traffico dovuto alle ferrovie dipende quindi in massima parte dalla diminuzione delle tariffe, e non si conserverebbe certamente se si ritornasse all'antico sistema di mezzi di trasporto.

In Francia, l'ingegnere Considère, nella sua opera *Utilité des chemins de fer d'intérêt local* (Paris, V^ve Dunod, 1892) espone alcuni concetti sul rapporto fra l'uti-

(1) V. Atti della R. Acc. dei Lincei. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. VI, parte 1ª, tip. Salviucci. Anno 1889.

(2) Il Sax dice nella sua monografia: *Die Stellung der Verkehrsmittel in der Volkswirthsschaft*, a pag. 503 della seconda edizione del Handbuch der politischen Oekonomie (V. anche la traduzione italiana compresa nella Biblioteca dell'economista, vol. XI, serie 3ª, pag. 598). « Se supponendo uguali in tutti i punti di un dato territorio le condizioni da cui dipende lo smercio di un prodotto, noi ci raffiguriamo il mercato di un prodotto come un circolo, di cui il luogo di produzione è il centro ed il raggio è dato dalla distanza, fino alla quale la trasportabilità del prodotto arriva (e questa distanza è in ragione inversa della tariffa dei trasporti), troveremo che, crescendo la medesima, l'estensione del mercato, ossia la smerciabilità di un prodotto, aumenterà colla stessa ragione, secondo cui aumenta la superficie di un circolo all'allungarsi del suo raggio. Cioè il mercato di un prodotto cresce in ragione del quadrato della sua trasportabilità ».

Il prof. Bodio osserva giustamente a sua volta che nessuna rete di comunicazione realizza perfettamente il supposto sistema di circoli concentrici a raggi distribuiti uniformemente, e bisogna supporre inoltre l'uniformità degli elementi demografici ed economici, perchè si possa manifestare interamente l'influenza del fattore che si considera.

(3) V. A. De Foville. *La transformation des moyens de transport et ses conséquences économiques et sociales*. Paris, Guillaumin, 1880, 1 vol. A pag. 47 dell'opera citata il De Foville fa il computo per i viaggiatori e trova il vantaggio economico di questa classe di trasporti fatti sulle ferrovie rispetto a quelli che avverrebbero sulle strade ordinarie, pari ad una volta e mezzo il prodotto lordo ferroviario.

(4) V. opera citata nella nota precedente a pag. 71.

lità economica e il prodotto lordo, e dopo avere stabilita una progressione aritmetica retta decrescente come legge di densità del traffico, conclude che l'economia totale procurata al pubblico annualmente dalle ferrovie è al massimo uguale alla metà del loro prodotto lordo. Questa conclusione peccherebbe per difetto, poichè, come si vedrà in appresso, tale economia risulta, secondo le analisi più sottili inspirate alle ricerche degli economisti tedeschi, sensibilmente superiore al prodotto lordo.

L'ing. Leone Leygue nella sua opera *Chemins de fer - Notions générales et économiques* (Paris, librairie Polytechnique 1892) accenna come il Dupuit, il Michel, il De Freycinet, il Varroy ed il Krantz abbiano seguito nei loro calcoli dell'utilità economica delle ferrovie il sistema adottato dal De Foville, ed espone un altro metodo. Egli valuta ad una somma fissa per ogni tonnellata di merce trasportata sulla ferrovia il vantaggio economico del trasporto (1). Per i viaggiatori determina in L. 0,07 per chilometro l'economia diretta della spesa di trasporto, ed ammette che soltanto per $^3/_7$ del numero totale dei viaggi si possa valutare il vantaggio anzidetto, ritenendo che gli altri $^4/_7$ dei viaggi siano per gite di piacere, o per affari commerciali: dei primi egli crede trascurabile l'utilità, dei secondi opina avere già stimato il valore col computo dianzi indicato per le merci. Questo sistema torna a stimare l'utilità economica per i viaggiatori pari ad una metà del prodotto lordo e per le merci pari al triplo del prodotto lordo rispettivo. La prima stima è assai probabilmente inferiore al vero, la seconda pare troppo elevata.

In Germania il dott. W. Launhardt dell'Hannover noto scrittore di economia matematica (2), ha tentato il calcolo dell'utilità economica delle ferrovie, e ne ha ricavato alcune proposizioni riguardanti le tariffe dei trasporti più convenienti per la economia pubblica (3). Egli ha fondato i suoi calcoli dapprima nell'ipotesi assai semplice di una distribuzione dei trasporti crescente in ragione diretta delle distanze.

In Austria il sig. Edoardo Lill ispettore della Nordwestbahn austriaca ha fatto successivamente studî sperimentali sulla densità del traffico dei viaggiatori, ed ha trovato che essa segue una legge opposta, la quale, anzi riesce prossima a quella della ragione inversa ai quadrati delle distanze percorse (4).

L'Autore di questa Memoria avendo richiesto ed ottenuto dalle Società ferroviarie Adriatica e Mediterranea, mercè il cortese intervento del Direttore generale della Statistica, prof. L. Bodio, le osservazioni del traffico nel 1889 per zone di percorrenza dei viaggiatori e delle merci, rilevò per le merci una distribuzione dei trasporti decrescente rispetto alle distanze, come avviene per i viaggiatori.

Nella presente Memoria si indicano alcune formole generali sull'utilità economica dei mezzi di trasporto, strade ordinarie, ferrovie e canali navigabili, senza restrizioni sull'ipotesi della densità del traffico; si accennano poi le trattazioni fatte dal dott. Launhardt da prima, ed in appresso dal Lill, e si svolgono infine formole approssimate per le applicazioni ai dati della statistica ferroviaria.

(1) Egli determina questa somma fissa prendendo il 7,5 % del valore medio delle tonnellate di merce registrate nelle statistiche francesi del Commercio internazionale, cioè di L. 330.

(2) V. *Die mathematische Begründung der Volkswirthschaftslehre*. Leipzig 1885.

(3) V. *Theorie der Tarifbildung der Eisenbahnen*. Berlin, bei Spinger, 1890.

(4) *Das Reisegesetz und seine Anwendung auf den Eisenbahnenverkehr* von, C. Lill. Wien 1891 bei Spielhagen und Schuvick.

II. Formole per la valutazione dell'utilità economica dei trasporti.

Indichiamo con $\varphi(x, a_i)$ la funzione che rappresenta la legge di densità del traffico alla distanza x, cioè il numero di unità di traffico e precisamente il numero dei viaggiatori, o dei capi di bestiame, o delle tonnellate di merce, trasportati alla distanza x. Il sistema di costanti che si esprime succintamente con a_i ed esplicitamente coi simboli $a_1, \ldots a_i, \ldots a_m$ caratterizza colla forma della funzione φ la legge analitica della densità dei trasporti. Queste costanti sono alla loro volta collegate alle costanti topografiche, demografiche ed economiche del paese per il quale sono tracciate le vie di trasporto che si considerano.

Sia $\theta(x, b_i)$ la funzione che dà la legge dei prezzi di una merce alla distanza x per unità di peso della merce, dove b_i rappresenta un sistema di costanti $b_1, \ldots b_i, \ldots b_n$ che caratterizzano colla forma della funzione θ la legge analitica dei prezzi della derrata che si considera alla distanza x. Nel caso dei viaggiatori la $\theta(x, b_i)$ rappresenta il vantaggio che ha un viaggiatore nel recarsi alla distanza x. Queste costanti b_i sono certamente funzioni delle a_i, ed inoltre dipendono dalle condizioni della concorrenza economica nel paese considerato, cioè dal numero dei luoghi di produzione, come pure dall'agiatezza economica della regione attraversata dalle vie di trasporto.

Sia $\Psi(x, c_i)$ il costo del trasporto per unità di peso, o per viaggiatore, alla distanza x, dove c_i indica un sistema di costanti $c_1, \ldots c_i, \ldots c_p$ le quali colla forma della funzione Ψ specificano la legge analitica della tariffa dei trasporti considerata nel caso più generale, e cioè sia per la tariffa costante, sia per le tariffe differenziali riguardo alle distanze (1).

Indichiamo inoltre con p il costo sul luogo di produzione dell'unità di merce. La funzione p dipenderà dai sistemi di costanti indicati colle lettere a_i, b_i, c_i: cioè sarà

$$p = f(a_i; b_i; c_i)$$

Per i viaggiatori supporremo $p = 0$ poichè nella $\theta(x_1, b_i)$ consideriamo il vantaggio assoluto del viaggio, soltanto al lordo delle spese di trasporto.

L'utilità economica del trasporto alla distanza x sopra un sistema di vie di comu-

(1) Se la tariffa differenziale dei trasporti, come succede per le merci a piccola velocità (V. ad es. la tabella n. 2 per i trasporti della serie B della tariffa speciale n. 55 delle reti Adriatica e Mediterranea, valida per i carichi a vagone completo di derrate alimentari, attuata con decreto ministeriale 30 aprile 1886) fosse differenziata anche per il numero dei vagoni da trasportarsi annualmente, si dovrebbe considerare una funzione analitica della forma

$$\psi(x, c_{ij}, j)$$

dove c_{ij} rappresenta il sistema di costanti:

$$c_{1j},\ c_{2j}, \ldots c_{ij}, \ldots c_{pj} \ldots$$

corrispondenti al numero massimo j di vagoni trasportati per la spedizione che si considera nell'intervallo di un anno. Noi non faremo uso che del primo tipo della forma della Ψ.

nicazione, per il quale ci varremo delle lettere dianzi indicate coll'aggiunta del numero 1 al piede ed a destra dei simboli di funzione, sarà espressa da

$$\varphi_1(x)\left[\theta_1(x)-p_1-\Phi_1(x)\right]$$

e per tutti i trasporti fatti dalle distanze infime alla distanza x_1 da

$$U_1=\int_0^{x_1}\varphi_1(x)\left\{\theta_1(x)-p_1-\Phi_1(x)\right\}dx \tag{1}$$

Con x_1 si indica il limite massimo sino al quale vi è convenienza economica per il trasporto delle merci o delle persone; esso soddisfa l'equazione:

$$\theta_1(x_1)-p_1-\Phi_1(x_1)=0 \tag{2}$$

Se il sistema di strade o di vie di comunicazione considerato surroga un sistema di mezzi di comunicazione più costoso, o se avviene un ribasso di tariffe di trasporti, e consideriamo l'utilità economica assoluta U_2 dell'antico mezzo di trasporto, o del traffico fatto colla antica tariffa, valendoci degli stessi simboli, ma applicando l'indice 2 ai simboli delle funzioni avremo analogamente:

$$U_2=\int_0^{x_2}\varphi_2(x)\left[\theta_2(x)-p_2-\Phi_2(x)\right]dx \tag{3}$$

Dei due limiti massimi delle distanze dei trasporti, x_1 e x_2, dipendenti dalle tariffe, x_1 sarà certamente il maggiore e per tutti i valori di x inferiori ad x_1 sarà soddisfatta l'ineguaglianza

$$\varphi_1(x)\left[\theta_1(x)-p_1-\Phi_1(x)\right]>\varphi_2(x)\left[\theta_2(x)-p_2-\Phi_2(x)\right]$$

quando lo siano le seguenti:

$$\theta_1(x)>\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\theta_2(x)$$

$$p_1\leqq p_2\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

$$\Phi_1(x)\leqq\Phi_2(x)\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

allora la prima utilità sarà certamente superiore alla seconda e l'utilità commerciale delle prime vie sulle seconde, o proveniente dal cambiamento della tariffa, sarà espressa dalla differenza:

$$U=U_1-U_2$$

Le Società ferroviarie a loro volta debbono ricavare un profitto netto dai trasporti per pagare gli interessi dei capitali investiti nell'azienda ferroviaria. Indichiamo a tal fine con $f_1(x)$ la spesa di esercizio per l'unità di merci alla distanza x. La tariffa $\Phi_1(x)$ esprime l'introito per l'unità di merce alla distanza x, perciò

$$\Phi_1(x)-f_1(x)$$

sarà l'espressione del guadagno netto per l'unità di merce trasportata alla distanza x. Se moltiplichiamo la differenza precedente per la densità del traffico $\varphi(x)$ e per dx ed integriamo fra i limiti 0 ed x_1 si ha il profitto netto G_1, cioè

$$(4) \qquad G_1 = \int_0^{x_1} \varphi_1(x) \Big[\Psi_1(x) - f_1(x) \Big] dx .$$

Il guadagno complessivo del commercio e dell'azienda ferroviaria è formato dalle somme $U_1 + G_1$ ed esso è espresso da

$$(4') \qquad \int_0^{x_1} \varphi_1(x) \Big[\theta_1(x) - p_1 - f_1(x) \Big] dx$$

Nella formola trovata

$$U_1 = \int_0^{x_1} \varphi_1(x) \Big[\theta_1(x) - p_1 - \Psi_1(x) \Big] dx$$

è da notare che le due funzioni p_1 e $\theta_1(x)$ non sono fra loro indipendenti; la prima rappresenta il prezzo della merce sul luogo di produzione, vale a dire a distanza nulla, mentre la seconda rappresenta il prezzo alla distanza x dal luogo di produzione: è quindi evidente che la p_1 si otterrà dalla $\theta_1(x)$ quando in questa si ponga $x = 0$ cioè $p_1 = \theta_1(o)$ allora:

$$(1') \qquad U_1 = \int_0^{x_1} \varphi_1(x) \Big[\theta_1(x) - \theta_1(o) - \Psi_1(x) \Big] dx$$

L'integrale può essere spezzato in tre:

$$(1'') \qquad U_1 = \int_0^{x_1} \varphi_1(x)\, \theta_1(x)\, dx - \theta_1(o) \int_0^{x_1} \varphi_1(x)\, dx - \int_0^{x_1} \varphi_1(x)\, \Psi_1(x)\, dx$$

e più concisamente $U_1 = P_1 - P_0 - s$ dove P_1 indica il valore complessivo delle derrate trasportate al luogo di arrivo, P_0 il valore di esse nella stazione di partenza ed s la spesa di trasporto.

L'utilità finora considerata si riferisce ad un unico centro di produzione; se noi immaginiamo per un dato punto due assi coordinati fissi, è chiaro che le funzioni φ_1 e θ_1 dipenderanno anche dalle coordinate del centro di produzione.

Indichiamo con x_i, y_i le coordinate di uno qualunque dei centri produttivi che diremo i, e con ρ_i la distanza limite dei trasporti fatti dal centro i, con r_i la distanza del percorso stradale misurata dal punto i: l'utilità economica dei trasporti effettuati dal punto i sia rappresentata col simbolo U_i, avremo

$$(1''') \qquad U_i = \int_0^{\rho_i} \varphi_1(r) \Big[\theta_i(r) - \theta_i(o) - \Psi_i(r) \Big] dr$$

L'utilità totale dei mezzi di trasporto per riguardo a tutti i centri di produzione, ossia alle stazioni d'invio delle merci collocate in una data regione, rete ferroviaria, od in uno Stato, si ha facendo la somma di tutte le utilità parziali, cioè:

$$(1^{IV}) \qquad U = \Sigma_i \int_0^{\rho_i} \varphi_i(r) \left[\theta_i(r) - \theta_i(o) - \Psi_i(r) \right] dr$$

avremo ancora:

$$(1^{V}) \qquad U = \Sigma P_{1,i} - \Sigma P_{0,i} - S$$

dove $\Sigma P_{1,i}$ è la somma dei valori delle derrate nei luoghi nei quali sono giunte per il mezzo di trasporto considerato, $\Sigma P_{0,i}$ è la somma dei valori delle derrate trasportate nei luoghi dai quali sono state spedite ed S è la spesa totale dei trasporti.

Questa formola semplicissima e quasi intuitiva, può prestarsi al calcolo diretto dell'utilità economica commerciale delle ferrovie, raggruppando le stazioni ferroviarie in gruppi od in regioni, per le quali i prezzi medî o normali delle merci principali non siano molto differenti, e disponendo di statistiche dei prezzi o di medie annuali dei prezzi delle principali derrate nei luoghi considerati.

III. Variazioni dell'utilità commerciale dei trasporti in riguardo al cambiamento delle tariffe.

Per studiare l'influenza del cambiamento delle tariffe sul valore dell'utilità economica dei mezzi di trasporto, conviene prendere in esame la formola precedente (I^{IV}).

In questa formola le costanti che caratterizzano la norma della tariffa $\Psi(r)$ figurano esplicitamente nella stessa funzione ed implicitamente nel limite superiore dell'integrale corrispondente al centro i di produzione, poichè esso è dato dall'equazione (2) che si può scrivere sotto la forma

$$(2') \qquad \theta_i(\rho_i) - \theta_i(o) - \Psi(\rho_i) = 0$$

La $\theta_i(x)$ cioè la norma dei prezzi delle derrate, si può supporre in uno studio di prima approssimazione come indipendente dalle variazioni della tariffa dei trasporti. Non vi è dubbio però che in ricerche analitiche d'un ordine più elevato di approssimazione, converrà scegliere uno sviluppo della funzione che contenga le costanti della Ψ, cioè le $c_{i,h}$, ed altre costanti indipendenti da queste, per variazioni non molto notevoli delle $c_{i,h}$.

Per la $\varphi(x)$ analogamente si possono fare due svolgimenti distinti. In uno, si può ricorrere soltanto alle statistiche ferroviarie di un dato periodo a tariffe costanti e ricavare le costanti $a_{i,h}$ che si possono considerare come indipendenti dalle $c_{i,h}$. In un altro, più conveniente per gli scopi della ricerca, converrà porre in evidenza le costanti della tariffa. Accenniamo i due modi di calcolare la φ. La quantità totale dei trasporti effettuati, cioè il numero delle tonnellate di merce (e rispettivamente

il numero dei viaggiatori) che indicheremo con Q, ed il rispettivo tonnellaggio chilometrico (o percorso) che indicheremo con T, sono sempre cogniti e dati dalle statistiche ferroviarie.

Coi simboli adoperati in questa memoria essi possono rappresentarsi così:

$$Q = \Sigma \int_0^{\rho_i} \varphi_i(r)\, dr \tag{5}$$

$$T = \Sigma \int_0^{\rho_i} r\, \varphi_i(r)\, dr \tag{6}$$

Queste due formole non permetterebbero di calcolare che due costanti della $\varphi(x)$ quando ne fosse fissata la forma analitica, e le esprimerebbero in funzione della distanza limite ρ_i e quindi in funzione implicita delle costanti della tariffa C.

Per una prima ricerca si possono aggiungere a queste due equazioni quelle più numerose date dalle recenti ed accurate statistiche del traffico per zone o distanze cognite, per es. di 25 in 25 Cm. Si ha quindi la seguente serie di equazioni di condizione per determinare le costanti della funzione φ:

$$Q_{r_e, r_{e+1}} = \Sigma \int_{r_e}^{r_{e+1}} \varphi_i(r)\, dr \tag{5'}$$

$$T_{r_e, r_{e+1}} = \Sigma \int_{r_e}^{r_{e+1}} r\, \varphi_i(r)\, dr \tag{6'}$$

Detto n il numero delle zone nelle quali è diviso il movimento del traffico ferroviario, si hanno quindi $2n$ equazioni di questo tipo. Ora n è d'ordinario abbastanza grande: anche prendendo le prime zone di 25 in 25 Cm. fino ai 100 Cm., e poi di 50 in 50 Cm. fino ai 500 Cm., e poi di 100 in 100 fino a 1,000 Cm., e facendone una sola da 1,000 Cm. in poi, si hanno 18 zone e quindi 36 equazioni (1).

Il materiale statistico così preparato permetterebbe ricerche analitiche assai estese. Importa notare che la statistica del traffico per zone a distanze definite, indica già approssimativamente il valore di ρ cioè della distanza limite. Una determinazione più rigorosa si ha quando è stabilita la funzione φ mediante il traffico delle zone che contengono la più gran parte dei trasporti, ad es. per quelle fino a 1,000 Cm. per le reti italiane, e si ricava ρ dalla equazione (5) o (6) o da tutte e due col metodo

(1) L'ultima zona indefinita può dar luogo a calcoli utili per le ricerche economiche, anche senza introdurre la distanza limite ρ. Basta infatti che φ abbia una forma analitica tale che $\int_{r_m}^{\infty} \varphi(x)\, dx$ sia finito. Le forme esponenziali, e le algebriche frazionarie a denominatori contenenti i fattori $a_0 + a_k x$ elevati ad un grado maggiore di uno, servono allo scopo.

dei minimi quadrati, mediante la notizia del traffico totale sulle reti ferroviarie osservate. Trovata la distanza limite dei trasporti per tal modo, si ricava dalla equazione (2^{I}) la differenza $\theta(\varrho) - \theta(o)$, conoscendo $\Psi(\varrho)$.

Se $\theta(x)$ è cognito per via diretta, cioè per le statistiche dei mercati, si ha così un controllo ed un indizio dell'accordo delle varie ipotesi colle statistiche ferroviarie. Se $\theta(x)$ non è cognito, ma si suppone costante, si ha un valore pure costante della differenza $\theta(\varrho) - \theta(o)$. E questo procedimento ha servito finora nelle applicazioni fatte, specialmente per il calcolo dell'utilità economica del trasporto dei viaggiatori.

Ritornando alla determinazione di $\varphi(x)$, si può a priori stabilire qualche ipotesi che metta in evidenza il legame della densità dei trasporti colle tariffe ferroviarie.

Se si suppone ad es. che debba essere la densità $\varphi(\varrho) = 0$, si può stabilire a priori la forma $\varphi(x) = (\varrho - x)\,\varphi_1(x)$ nella quale $\varphi_1(x)$ esprime una funzione che dovrebbe avere sempre valori positivi per tutti i valori di x da o a ϱ. Si potrebbe anche stabilire $\varphi(x) = (\varrho - x)^2\,\varphi_2(x)$, se la curva della densità si supponesse tangente all'asse delle distanze approssimandosi alla distanza limite.

Questi svolgimenti hanno però l'inconveniente d'introdurre la distanza limite in forma esplicita nella φ, e, salvo casi molto semplici, che si vedranno in appresso nelle applicazioni, conducono ad equazioni più complesse ed a calcoli assai prolissi.

Ritornando al concetto della funzione φ calcolata colla statistica del traffico per zone definite, e non contenente quindi esplicitamente le costanti della tariffa nella sua forma analitica, l'utilità commerciale non varia per la formola (1^{III}) che per i cambiamenti della tariffa e per il conseguente mutamento della distanza limite ϱ_i.

Il senso della variazione non è dubbio. L'utilità massima commerciale si avrebbe quando il costo dei trasporti fosse eguale a zero, e per ϱ_i infinito. Per qualunque tariffa si può ammettere che sia sempre l'utilità commerciale crescente col diminuire delle basi della tariffa. La formola (1^{IV}) ci dà infatti, nella ipotesi che sia $\varphi_i(\varrho)$ o nullo,

$$\delta U = -\Sigma_i \int_0^{\varrho_i} \varphi_i(r)\,\delta\,\Psi_i(r)\,dr$$

Se la tariffa dipende da una sola costante non vi è quindi luogo ad alcuna ricerca analitica per la determinazione della norma di tariffa più conveniente per l'economia pubblica, diminuendo la costante, ossia il prezzo unitario dei trasporti, cresce l'utilità commerciale.

Ma se la tariffa dipende da due o più costanti, sorge la ricerca delle variazioni delle costanti che soddisfanno ad una delle seguenti condizioni: 1° produrre una determinata variazione dell'utilità commerciale; 2° rendere massima l'utilità commerciale pur ricavando un introito ferroviario pari alle spese dell'esercizio, o superiore ad esse di un'aliquota fissa, o di una somma costante assegnata; 3° rendere massima l'utilità complessiva, cioè quella commerciale e quella dell'azienda ferroviaria.

Per lo studio dei vari casi accennati giova considerare le tariffe differenziali in vigore nei trasporti dei passeggieri in taluni Stati anche per i biglietti dei viaggi ordinari, ed in quasi tutti per i biglietti di andata e ritorno, i circolari, quelli

di abbonamento e per le merci, sia a grande od a piccola velocità, per ogni merce o per speciali classi di merci.

Con queste tariffe il prezzo di trasporto dell'unità di traffico alla distanza r si può rappresentare con la formula d'interpolazione

$$\varphi_{i,j}(r) = \Sigma\, C_{i,j l}\, r^l$$

dove l'indice i corrisponde alla località nella quale si applica la tariffa e l'indice j alla qualità dei trasporti, viaggiatori, o merci delle varie classi.

Per semplificare ancora la trattazione degli anzidetti problemi, si supponga una tariffa unica per tutta la rete ferroviaria, prescindendo cioè dalle tariffe locali, ciò che torna a considerare il movimento ferroviario come se avvenisse con una tariffa media tra le tariffe locali e la tariffa generale. La tariffa media così concepita può calcolarsi anche colle tariffe in vigore in un dato periodo d'osservazione, applicandovi pesi proporzionali alle quantità trasportate col regime delle varie tariffe e si rappresenterebbe colla funzione

$$\varphi_j(r) = \Sigma\, C_{j,l}\, r^l$$

Infine se si considera una sola qualità di trasporti, allora si può sopprimere l'indice j e scrivere

$$\varphi(r) = \Sigma\, C_l\, r^l$$

la norma della tariffa differenziale.

Il prezzo effettivo dei trasporti dell'unità di traffico, viaggiatore o tonnellata di merce alla distanza r si può a sua volta rappresentare con una espressione analoga a quella della tariffa, mutando le costanti, e cosi scriveremo

$$f(r) = \Sigma\, g_l\, r^l$$

Avvertasi inoltre che

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} = \Sigma\, l c_l\, r^{l-1}$$

e

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} = \Sigma\, l g_l\, r^{l-1}$$

rappresentano rispettivamente i prezzi di tariffa per unità di trasporto e per unità di distanza, contata dal punto distante di r unità di lunghezza dal luogo di partenza o di spedizione, e che queste quantità devono essere decrescenti col crescere di r, avremo dunque le due equazioni di condizioni

$$\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r} < 0$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r} < 0$$

ossia:

$$\Sigma^l (l-1)\, C_l\, r^{l-2} < 0$$

e

$$\Sigma^l (l-1)\, g_l\, r^{l-2} < 0$$

Ciò posto consideriamo il 3° dei casi accennati e riscriviamo l'espressione già data dell'utilità complessiva di tutti i trasporti e dell'azienda ferroviaria

$$V_1 = U_1 + G_1 = \int_0^{\rho} \varphi(x) \Big[\theta(x) - \theta(0) - f(x) \Big] dx$$

ricordando che è:

$$\theta(\varrho) - \theta(o) - \Sigma C_l \varrho^l = 0$$

Per avere in una prima soluzione il numero minimo di equazioni di condizione tra le costanti delle ϱ, θ, f e ψ, poniamo come fu già accennato,

$$\varphi(x) = (\varrho - x) \varphi_1(x)$$

nella quale $\varphi_1(x)$ non è più necessariamente uguale a 0 per $x = \varrho$, ma è sempre positiva per $x \leqq \varrho$, e si suppone indipendente dalle costanti C_l.

Fatta la sostituzione della forma data alla $\varphi(x)$ nel valore di V_1, si ha:

$$V_1 = \int_0 (\varrho - x) \varphi_1(x) \Big[\theta(x) - \theta(0) - f(x) \Big] dx$$

e poichè V_1 non contiene che la ϱ esplicitamente, basterà considerare la derivata di V_1 per rispetto a ϱ per avere la condizione di massima.

Ora è

$$\frac{\partial V_1}{\partial \varrho} = \int_0^{\rho} \varphi_1(x) \Big[\theta(x) - \theta(0) - f(x) \Big] dx$$

e ci basterà porre questo integrale eguale a zero per avere il corrispondente valore di ϱ. Ma l'integrale anzidetto si può spezzare in due parti, una che diremo I_1 e l'altra I_2. La prima corrisponderà al valore dell'integrale stesso per $\varrho = \varrho$ essendo $\theta(\varrho_1) - \theta(0) - f(\varrho_1) = 0$. Essa è positiva poichè sono positive le quantità $\varphi_1(x)$, $\theta(x)$ e $f(x)$, e per $\varrho < \varrho_1$ ammettiamo $\theta(\varrho_1) - \theta(0) - f(\varrho_1) > 0$, ciò che è lecito se ϱ_1 è la minima radice positiva dell'equazione che la determina, supponendo $\theta(\varrho)$ una funzione algebrica continua di ϱ. La seconda parte dell'integrale corrispondente ai valori da ϱ_1 a ϱ sarà quindi negativa, e perciò si scorge che deve essere per $\varrho > \varrho_1$

$$\theta(\varrho) - \theta(0) - f(\varrho) < 0.$$

Ma poichè ϱ è dato dall'equazione

$$\theta(\varrho) - \theta(0) - \psi(\varrho) = 0$$

si scorge che alla distanza limite la tariffa dovrebbe essere inferiore alla spesa d'esercizio.

Non vi è dubbio d'altronde che il valore trovato per ϱ dall'equazione $\frac{\partial V_1}{\partial \rho} = 0$

corrisponda ad un massimo di V_1 anzichè ad un minimo, poichè la seconda derivata di V_1 è negativa per quel valore di ϱ. Si ha infatti

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho^2} = \varphi(\varrho)\left[\theta(\varrho) - \theta(0) - f(\varrho)\right]$$

ed il fattore di $\varphi_1(\varrho)$ è negativo, mentre si ammette che $\varphi_1(\varrho)$ sia sempre positivo.

Riassumendo le cose dette, apparisce quindi che il massimo dell'utilità commerciale si avrebbe con tariffe nulle ed il massimo dell' utilità totale cioè del commercio e dell' azienda ferroviaria si avrebbe con tariffe, che, almeno per le grandi distanze, sono inferiori alle spese di esercizio. Questo caso trova la sua applicazione in Ungheria nelle tariffe dei viaggiatori dove $\psi(r)$ é costante per $r > 225$ chilometri, ed è quindi inferiore alla reale spesa d'esercizio per i percorsi da Brassò a Rutka di 927 chilometri, da Budapest a Brassò di 716 chilometri, e da Budapest a Fiume di 615 chilometri [1].

Però può parere ardita la riforma delle tariffe che conduce a questo massimo, che diremo assoluto, dell' utilità totale dei trasporti ferroviari, e crediamo che sia più pratica la ricerca di massimi relativi ponendo la condizione che sia sempre $\varphi(\varrho)$ maggiore od almeno eguale a $f(\varrho)$ alla distanza limite dei trasporti.

Volendo procedere a gradi nella riforma delle tariffe, accenniamo un metodo speciale, che ci pare conveniente in parecchi casi.

Colle statistiche del traffico e colla norma del costo dell'esercizio per unità di traffico alle varie distanze, si può sempre calcolare l' utilità commerciale o totale colle formole accennate, almeno approssimativamente.

Riprendiamo a considerare il caso già trattato dell'utilità totale dei trasporti.

L'espressione di V data nelle pagine precedenti conduce per il noto teorema di Taylor alla seguente espressione della variazione dell'utilità per lievi aumenti della distanza limite ϱ:

$$\delta V = A\delta\varrho + \tfrac{1}{2} B\delta\varrho^2 + \tfrac{1}{6} C\delta\varrho^3$$

ponendo

$$A = \int_0^\varrho \varphi_1(x)\left[\theta(x) - \theta(0) - f(x)\right] dx$$
$$B = \varphi_1(\varrho)\left[\theta(\varrho) - \theta(0) - f(\varrho)\right]$$
$$C = \frac{\partial B}{\partial \varrho}.$$

e trascurando i termini contenenti potenze di $d\varrho$ con esponenti maggiori di 3.

(1) V. Relazione al Consiglio delle tariffe delle strade ferrate sul quesito XXXVII « Di alcune riforme da introdursi nelle Tariffe e nel servizio dei viaggiatori » del prof. Luigi Bodio (Roma - Tip. Naz., 1895) pag. 19 e 42. — Per il percorso da Brassò a Rutka il prezzo pagato dal viaggiatore equivale ad una tariffa chilometrica costante di centesimi 2,70 per la prima classe, 2,00 per la seconda ed 1,35 per la terza classe, certamente inferiori al costo medio dell' esercizio per viaggiatore-chilometro che è di circa 4 centesimi in Italia e non potrà essere inferiore a 3 centesimi in Ungheria.

Le quantità A, B, C hanno un valore cognito almeno approssimativamente per un dato sistema di tariffe applicato ad una rete ferroviaria esistente. Rimane quindi δV funzione della sola variabile $\delta\varrho$. Ora importa notare che A è sempre positivo, B parimenti, C può essere negativo.

Infatti $\theta(\varrho)$ ossia il prezzo delle merci alla distanza ϱ tende rapidamente ad un limite fisso, mentre $f(\varrho)$ cresce sempre con ϱ; è quindi possibile che sia $\theta'(\varrho) < f'(\varrho)$ ed allora si comprende come possa essere negativo C, poichè sviluppando la formola $\frac{\partial B}{\partial \varrho}$ si ha:

$$C = \varphi'_1(\varrho)\left[\theta(\varrho) - \theta(0) - f(\varrho)\right] + \varphi_1(\varrho)\Big(\theta'(\varrho) - f'(\varrho)\Big).$$

In tal caso δV è suscettibile di un massimo relativo che si ottiene facendo la derivata di δV per rispetto a $\delta\varrho$ e ponendola eguale a zero. Avremo quindi l' equazione

$$\text{(1)} \qquad A(\varrho) + \delta\varrho\, B(\varrho) + \tfrac{1}{2}\,\delta\varrho^2\, C(\varrho) = 0$$

la quale per la premessa fatta sul valore di C ha una radice positiva che diciamo $\delta\varrho$. Se questa risulta minore di 1, ed anzi tale che lo sviluppo di δV in funzione di $\delta\varrho$ si possa arrestare al terzo termine, avremo una soluzione utile per il quesito che ci siamo proposti,

In tale ipotesi si trova per questo valore di $\delta\varrho$ che diremo $\delta_1\varrho$

$$\delta V'_1 = \tfrac{2}{3}\,\delta_1\varrho\,\Big(A(\varrho) + \tfrac{1}{4}\,\delta_1\varrho\, B(\varrho)\Big)$$

Per accertarsi che questo valore di $\delta V_1'$ è realmente un massimo, consideriamo la 2ª derivata di δV_1 rispetto a $\delta\varrho$.

Essa è

$$B(\varrho) + \delta\varrho\, C(\varrho)$$

e per l' equazione determinatrice di $\delta_1\varrho$ diviene

$$-\frac{2A(\varrho)}{\delta_1\varrho} - B(\varrho)$$

ossia è certamente negativa, abbiamo quindi ottenuto sicuramente un massimo relativo di δV nelle ipotesi fatte,

Il valore positivo trovato per $\delta\varrho$ che rende δV_1 un massimo, stabilisce un'equazione di condizione tra le variazioni delle costanti della tariffa esistente, che permettono di conseguire il massimo relativo di δV. Chiamando γ_l la variazione della costante c_l della tariffa in uso che si suppone essere già della forma $\varphi(r) = \Sigma\, c_i\, r^i$, avremo infatti dalla equazione determinatrice di ϱ

$$\text{(2)} \qquad \delta_1\varrho = \Sigma\, \frac{\varrho^l}{\theta'_1(\varrho) - \Sigma\, l c_l\, \varrho^{l-1}}\,\gamma_l$$

supponendo che siano trascurabili i termini in γ_l^2 nelle potenze superiori di γ_l. Per ricavare altre equazioni fra le γ_l stabiliamo che il sistema di variazioni delle costanti

c_i della tariffa debba essere tale che la somma dei loro quadrati sia un minimo. Avremo dunque coi simboli adoperati $\Sigma \gamma_i^2 =$ minimo.

Per l'equazione di condizione precedente possiamo considerare $n-1$ variabili dipendenti, sceglieremo $\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_{n-1}$, ed una indipendente da esse che sarà γ_0. Deriviamo l'equazione precedente per rispetto a γ_i, avremo

$$\gamma_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma_i} + \gamma_i = 0 \tag{3}$$

Ma per l'equazione (2) che scriveremo sotto la forma più concisa

$$\delta_1 \varrho - \sum_0^{n-1} h_i(\varrho)\, \gamma_i = 0 \tag{2'}$$

avremo

$$h_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma_i} + h_i = 0 \tag{4}$$

e quindi ricavando $\frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma_i}$ e sostituendo nella (3) si ha:

$$h_i(\varrho)\, \gamma_i = \frac{\gamma_0}{h_0} h_i^2 \tag{5}$$

Sostituendo nella (2') si trae

$$\gamma_0 = \frac{h_0\, \delta_1 \varrho}{\sum_0^{n-1} h_i^2(\varrho)} \tag{6}$$

che combinata colla (5) dà altre $n-1$ equazioni

$$\gamma_i = h_i \frac{\delta_1 \varrho}{\sum_0^{n-1} h_i^2(\varrho)}$$

Il valore minimo della somma dei quadrati di γ è quindi uguale a

$$\frac{\delta_1 \varrho}{\sum_0^{n-1} h_i^2(\varrho)}$$

La soluzione ottenuta è possibile se i γ_i per tal modo calcolati sono tutti minori di 1 e risultano così piccoli da essere trascurabili i loro quadrati; in caso contrario si potrebbe stabilire un'equazione più approssimata svolgendo $\delta\varrho$ in funzione di γ_i, γ_i^2, cioè trascurando i termini contenenti le potenze di γ_i superiori alla seconda, e ponendo nuovamente la condizione che la somma dei quadrati di γ_i risultasse ancora un minimo.

I limiti consentiti a questa Memoria non ci permettono di trattenerci maggiormente su questi svolgimenti che sono assai facili ad effettuare nei varî casi che si possono presentare in pratica, e terminiamo con ciò le considerazioni d'ordine generale sul calcolo dell'utilità dei trasporti.

IV. Trasformazione delle equazioni generali nelle ipotesi di Launhardt e di Lill.

Dalle formole generali accennate si traggono agevolmente quelle convenienti ai casi speciali, contemplati dal dott. Launhardt e dal sig. E. Lill.

Il Launhardt supponeva nelle sue prime ricerche: 1° densità del traffico variabile in ragione crescente della distanza, cioè esprimibile con ar dove a è una costante;

2° il prezzo di vendita della merce e quello di produzione costanti, quindi $\theta_i(r) - \theta_i(o) = b$, dove b è una costante;

3° la tariffa dei trasporti proporzionale alla distanza percorsa, cioè

$$\Psi(c_i, r) = c_1 r \text{ (1)}$$

L'utilità del trasporto di una unità di merce alla distanza r è esprimibile con $b - cr$, essa è nulla per $\varrho = \frac{b}{c}$.

La quantità di merce trasportata dalle minime distanze alla distanza limite $\frac{b}{c}$ è espressa da

$$Q = \int_0^{\frac{b}{c}} a\, r\, dr = a \frac{b^2}{2c^2}$$

Il tonnellaggio chilometrico è rappresentato da

$$T = \int_0^{\frac{b}{c}} ar \times rdr = \frac{ab^3}{3c^3}$$

L'utilità commerciale del mezzo di trasporto è quindi indicata da

$$U = a \int_0^{\frac{b}{c}} r(b - cr)\, dr = \frac{1}{6} a \frac{b^3}{c^2} = \frac{1}{2} T c = \frac{1}{2} P$$

dicendo P il prodotto lordo dell'esercizio ferroviario per la qualità dei trasporti considerati.

Se cambiamo strada, ovvero mutiamo tariffa, si avrebbe analogamente:

$$U_1 = \frac{1}{6} a \frac{b^3}{c_1^2}$$

L'utilità differenziale dei nuovi mezzi di trasporto, o delle nuove tariffe, è dunque data da

$$U = u_1 - u = \frac{ab^3}{6c_1^2} - \frac{ab^3}{6c^2} = \frac{1}{2} T_1 c_1 \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2} P_1 \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2}\right)$$

dicendo P_1 il prodotto lordo del traffico che si considera colla tariffa c_1.

(1) Il Launhardt nelle sue ricerche sulla tariffa più conveniente economicamente ha anche tenuto conto del diritto fisso per ogni trasporto, ed in tal caso è $\Psi(c_i, r) = c_0 + c_1 r$.

Se i trasporti non si spingono alla distanza limite, ma soltanto ad una frazione m di esso, cioè fino alla distanza $\frac{1}{m}\frac{b}{c}$, la formola dell'utilità si modifica così:

$$U = \frac{1}{2} T_1 c_1 \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2}\right)(3m - 2)$$

Il Lill per i suoi studî sperimentali sulla densità del traffico ferroviario dei viaggiatori in Austria, ha trovato che quella densità può essere rappresentata con sufficiente approssimazione da un'iperbole del terzo grado della forma:

$$\varphi(x) = \frac{a}{x^2}$$

Egli ha anche tentata una dimostrazione a priori della validità di questa rappresentazione. La curva del Lill è assintotica verso l'asse delle ascisse e non dà luogo alla considerazione della distanza limite finita, che è importante per il calcolo dell'utilità economica.

Per esprimere con una stessa formola la legge della densità del traffico dei viaggiatori e delle merci in modo conveniente per le applicazioni economiche, proponiamo una formola consimile, ma con due o tre costanti, e precisamente le seguenti che rappresentano ancora iperboli di terzo grado:

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{(a_2 + x)^2} - a_3$$

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{a_2 + (x - a_3)^2} - a_4$$

La prima curva presenta un andamento decrescente per i valori di x crescenti da o a ϱ e taglia l'asse delle ascisse x ad una distanza massima ϱ data dall'equazione:

$$a_3 = \frac{a_1}{(a_2 + \varrho)^2}$$

Le seconda curva presenta un andamento dapprima crescente se le tre costanti a_1, a_2, a_3 sono positive; tocca un massimo per $x = a_3$ e poi decresce sino a zero per l'ascissa massima ϱ tale che sia;

$$\frac{a_1}{a_2 + (a_3 - \varrho)^2} = a_4 .$$

Come abbiamo già detto, la statistica ferroviaria da modo di ricavare le costanti a_i quando si abbiano tre o quattro osservazioni del traffico eseguito a varie distanze. Svolgiamo le formole opportune per l'ipotesi che le zone nelle quali sono state fatte le osservazioni del traffico siano eguali in lunghezza.

Dicendo $\varDelta$ l'intervallo uniforme delle zone e chiamando i^{ma} la zona compresa fra i limiti di distanze $(i - 1)\varDelta$ ed $i\varDelta$, detta Q_i la quantità di merce trasportata fra quei limiti, avremo, coi noti procedimenti d'integrazione, per le due forme della curva tipica considerate, le espressioni

$$Q_i = a_1 \frac{\varDelta}{i(i-1)\varDelta^2 + a_2(2i-1)\varDelta + a_2^2} - a_3 \varDelta .$$

e rispettivamente

$$Q_i = \frac{a_1}{\sqrt{a_2}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta \sqrt{a_2}}{a_2 + i(i-1)\Delta^2 - a_3(2i-1)\Delta + a_3^2} - a_4 \Delta .$$

Fatto nella prima equazione:

$$a_1 = a'_1 \Delta \ldots a_2 = a'_2 \Delta \ldots a_2 = \frac{a'_3}{\Delta}$$

e nella seconda:

$$a_1 = a'_1 \Delta \ldots a_2 = a'_2 \Delta^2 \ldots a_3 = a'_3 \Delta \ldots a_3 = \frac{a'_4}{\Delta}$$

le due espressioni precedenti divengono:

$$Q_i = \frac{a'_1}{i(i-1) + a'_2(2i-1) + a'_2{}^2} - a'_3$$

$$Q_i = \frac{a'_1}{\sqrt{a'_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a'_2}}{a'_2 + i(i-1) - a'_3(2_i - 1) + a'_3{}^2} - a'_4$$

Alla determinazione delle costanti bastano tre valori di Q_i per la prima espressione e quattro per la seconda. Dalle osservazioni però fatte per l'anno 1889, del traffico delle merci a piccola velocità sulla rete Adriatica, si ha un numero molto maggiore di valori per Q_i. Per utilizzarli tutti in qualche modo, si può ricorrere al metodo dei minimi quadrati, con qualche avvertenza perchè le costanti non sono tutte di primo grado nella prima espressione di Q_i e non figurano nelle quantità Q_i in funzioni algebriche nella seconda ipotesi.

Si dovrebbe quindi in quest'ultimo caso determinare:

1° un sistema approssimativo dei valori delle costanti a_i;

2° le correzioni ai valori approssimati, avendo cura di svolgere in serie le espressioni frazionarie e quindi le trigonometriche inverse dei valori di Q_i, e tenere soltanto i termini di primo grado nelle correzioni stesse.

Per semplicità di calcolo si possono invece aggruppare i dati statistici in numero esuberante por la determinazione delle costanti in tre o quattro grandi gruppi, tanti cioè quante sono le costanti da determinare, comprendendo in ciascuno un medesimo numero di zone elementari indicate nel quadro statistico. Accenniamo le formole pratiche per il calcolo delle costanti a_1, a_2 ed a_3 nel primo dei casi considerati.

Poniamo come di consueto:

$$Q_{i+1} - Q_i = \delta Q_i \;.\;.\;.\;.\;.\; \delta Q_{i+1} - \delta Q_i = \delta^2 Q_i$$

L'espressione di Q_i per la prima ipotesi considerata, in funzione delle costanti a_i', conduce alla seguente equazione

$$1) \qquad \delta Q_i = \frac{a'_1}{a'_2 + i} \quad \frac{2}{[a'_2 + (i+1)][a'_2 + (i-1)]} .$$

Sostituendo $i+1$ all'indice i e combinando l'equazione che così si ottiene colla precedente, si ha

$$1') \qquad a'_2 + i = - \frac{2\delta Q_{i+1} + \delta Q_i}{\delta^2 Q_i} .$$

Con tre valori consecutivi di Q_i e cioè coi valori Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2}, ci formiamo quindi i δQ_i che figurano nella formola (1') per ricavare a'_2. Colle formole precedenti si determinano a'_1, a'_3 e le corrispondenti a_2, a_1 ed a_3.

V. Applicazione al calcolo dell'utilità commerciale per i trasporti eseguiti sulle ferrovie della rete Adriatica nell'esercizio 1889.

La rete Adriatica, come abbiamo già accennato, ha fornito i dati statistici sul movimento per zone di 25 in 25 chilometri delle varie classi di passeggieri e per le due categorie di trasporti di merci a grande ed a piccola velocità nell'anno 1889: essi sono racoolti nel seguente quadro.

Movimento del traffico sulla rete Adriatica per l'anno 1889.

Chilometri	Viaggiatori			Merci a G. V. tassate con tariffa speciale	Merci a P. V.
	1ª classe	2ª classe	3ª classe	tonnellate	tonnellate
Dall' 1 al 25	92.127	968.478	2.881.038	18.953	632.526
Dal 26 » 50	121.123	807.201	2.077.804	34.584	1.079.980
» 51 » 75	47.348	284.061	667.302	27.984	685.788
» 76 » 100	26.571	150.705	291.366	16.936	458.031
	287.169	*2.210.445*	*6.917.600*	*98.457*	*2.856.325*
» 101 » 125	19.305	88.701	184.664	14.459	494.073
» 126 » 150	24.180	38.037	139.677	10.045	263.528
» 151 » 175	12.143	42.974	81.722	6.505	259.759
» 176 » 200	11.160	38.192	71.473	8.806	444.440
	66.788	*257.904*	*477.537*	*39.815*	*1.461.800*
» 201 » 225	8.924	28.331	65.288	5.394	143.432
» 226 » 250	4.085	16.201	32.507	5.631	142.453
» 251 » 275	14.678	25.061	29.503	5.428	164.915
» 276 » 300	7.136	15.902	24.594	4.591	98.124
	34.823	*85.585*	*151.892*	*21.044*	*548.924*
» 301 » 325	17.883	32.419	24.846	3.669	113.758
» 326 » 350	7.207	12.915	11.190	2.713	45.801
» 351 » 375	1.681	5.873	12.124	1.866	66.284
» 376 » 400	1.247	3.715	3.763	1.529	52.538
	28.018	*54.922*	*51.923*	*9.777*	*278.381*
» 401 » 425	1.098	3,254	3.917	946	33.351
» 426 » 450	2.831	5.814	3.278	1.335	26.844
» 451 » 475	769	1.617	1.790	720	18.645
» 476 » 500	765	2.045	1.442	566	18.165
	5.462	*12.729*	*10.427*	*3.567*	*97.005*
» 501 » 525	362	1.107	1.103	459	20.581
» 526 » 550	628	2.204	1.961	364	9.317
» 551 » 575	436	1.435	872	321	7.427
» 576 » 600	467	1.417	629	302	9.883
	893	*6.163*	*4.565*	*1.446*	*47.208*

(Segue) *Movimento del traffico sulla rete Adriatica per l'anno 1889.*

Chilometri	Viaggiatori			Merci a G. V. tassate con tariffa speciale	Merci a P. V.
	1ª classe	2ª classe	3ª classe	tonnellate	tonnellate
Dal 601 » 625	1.122	2.062	859	380	9.696
» 626 » 650	624	1.551	877	374	12.127
» 651 » 675	1.469	2.039	1.275	142	5.819
» 676 » 700	43	165	163	194	8.034
	3.258	*5.817*	*3.174*	*1.090*	*35.679*
» 701 al 725	376	673	528	209	13.726
» 726 » 750	270	513	203	135	8.458
» 751 » 775	1.114	775	305	306	13.235
» 776 » 800	521	1.038	385	204	17.944
	2.281	*2.999*	*1.421*	*854*	*53.363*
» 801 » 825	68	410	164	141	26.034
» 826 » 850	133	225	156	299	10.084
» 851 » 875	124	343	139	270	11.078
» 876 » 900	139	204	47	144	6.485
	464	*1.182*	*506*	*854*	*53.681*
» 901 » 925	2.174	1.025	148	85	11.195
» 926 » 950	136	246	83	70	5.138
» 951 » 976	17	34	16	54	4.508
» 976 » 1000	678	762	83	85	5.998
	3.005	*2.067*	*330*	*294*	*26.839*
» 1001 » —	80	177	41	200	13.554
	80	*177*	*41*	*200*	*13.554*
Totali	433.242	2.640.020	7.619.416	177.398	5.472.756
Prodotti lordi rispettivi in . . . . . . L.	5.306.546,43	12.780.404,56	15.584.080,56	6.189.429,13	45.184.174,39
Tariffa med. corrispondente all'unità di trasporto (viag. o ton.) L.	12,25	4,84	2,06	34,97	8,26
Totali delle unità di traffico (viagg. chil.-tonn. chil.)	54.266.122	213.671.122	502.128.180	71.306.375	809.607.632
Tariffa corrispondente all'unità di traffico L.	0,098	0,060	0,030	0,1087	0,056

La formula della densità del traffico che applichiamo nel presente caso è

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{(a_2 + x)^2} - a_3$$

Esprimiamo la condizione che sia $\varphi(x) = 0$ per $x = \frac{b}{c}$ ossia alla distanza limite, essendo c la costante della tariffa, supposta della forma $\Psi(c_i, x) = cx$, e b una nuova costante. Allora è $a_3 = \frac{a_1}{\left(a_2 + \frac{b}{c}\right)^2}$ e $\varphi(x) = \frac{a_1}{(a_2 + x)^2} - \frac{a_1}{\left(a_2 + \frac{b}{c}\right)^2}$

Colle precedenti notazioni la quantità di merci trasportate, od il numero dei viaggiatori, corrispondente ai percorsi tra le distanze $(i-1)\Delta$ ed $i\Delta$ è espressa, come fu già indicato, da

$$Q_i = a_1 \frac{\Delta}{i(i-1)\Delta^2 + a_2(2i-1)\Delta + a_2^2} - a_3 \Delta$$

La quantità totale trasportata dall'origine fino alla distanza limite $\frac{b}{c}$ risulta quindi $Q = \frac{A}{(c+B)^2}$ dove A e B sono costanti per una rete e per una stessa qualità di trasporti fatti con la tariffa c (¹). Il tonnellaggio chilometrico dei trasporti fatti fino alla distanza limite $\frac{b}{c}$ è dato dalla formula

$$T = a_1 \left(\log n \left(1 + \frac{B}{c}\right) - B \frac{c + \frac{3}{2}B}{(c+B)^2} \right)$$

Il logaritmo indicato è quello naturale ossia a base $e = 2,7183$.

Applichiamo la formola che dà Q_i per ricavare le costanti a_1, a_2 e b, coll'avvertenza di trarre prima la tariffa media per ogni categoria di trasporti colla divisione del prodotto lordo per il numero dei viaggiatori-chilometro o delle tonnellate-chilometro, e di valerci delle quantità trasportate per le prime tre zone di 200 in 200 chilometri. Raccogliamo nel seguente prospetto i risultati ottenuti e le tariffe medie del trasporto per ferrovia delle varie specie di trasporti.

	Passeggieri			Merci	
	1ª classe	2ª classe	3ª classe	G. V.	P. V.
a_1	94.518.181,80	97.808.487,39	130.800.691.16	58.716.393,44	1.141.662.068,96
a_2	141,28	33,17	16,17	189,66	145,97
a_3	196,18	265,18	433,33	98,82	2.243,25
b	55,28	34.46	16,00	64,02	34,05
c_1	0,10	0,06	0,03	0,11	0,06

(¹) I valori di A e B sono i seguenti $A = \frac{a_1 b^2}{a_2^2}$ e $B = \frac{b}{a_2}$.

Con questi elementi il calcolo del valore dell'utilità commerciale delle ferrovie considerata assolutamente è agevole. La formola generale stabilita

$$U = \sum \int_0^{p_i} \varphi_1(x) \left[\theta_1(x) - \theta_1(0) - \Psi_1(x) \right]$$

per

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{(a_2 + x)^2} - a_3$$

e per

$$\theta_1(x) - \theta_1(0) - \Psi_1(x) = b - cx .$$

si trasforma in:

$$U = \int_0^{\frac{b}{c}} \left[\frac{a_1}{(a_2 + x)^2} - a_3 \right] (b - cx)\, dx .$$

Integrando si ha:

$$U = \frac{a_1 b}{a_2} - a_1 c \operatorname{logn} \left(1 + \frac{b}{c a_2} \right) - \frac{1}{2} a_3 \frac{b^2}{c} .$$

Per la pratica è però sufficiente la formola

$$U = b\, Q - c\, T \text{ (1)}.$$

la quale si ricava dalla formola del § II qualunque sia la forma della φ purchè sia

$$\theta_1(x) - \theta(o) - \Psi(x) = b - cx$$

Il prodotto lordo delle merci trasportate, nell'ipotesi che il prezzo di trasporto alla distanza x sia cx, essendo dato da $P = c\,T$, si potrà anche valersi di quest'altra espressione

$$U = b\, Q - P = \gamma\, P$$

Il γ è un coefficiente numerico del quale diamo nel seguente prospetto il valore per ciascuna classe di trasporti

Passeggieri			Merci	
1ª classe	2ª classe	3ª classe	Gᶜ vel.	Pª vel.
3.514	6.118	6.830	0.835	3.124

L'utilità differenziale delle strade ferrate sulle ordinarie è data dalla formola:

$$U = U_1 - U_2 = b\,(Q_1 - Q_2) - c_1\, T_1 + c_2\, T_2 = \gamma_{12}\, P_1$$

(1) La formola va applicata coll'avvertenza che per Q e T si assumano i valori corrispondenti all'intero traffico per tutta la rete e non quelli che riguardano il movimento sui primi 600 chilometri. Questi ultimi dati servono soltanto per ricavare la costante b.

essendo ora indicata con c_1 la tariffa sulle ferrovie e con Q_1 e $c_1 T_1$ rappresentando rispettivamente le totali quantità di traffico avute sulle ferrovie e P_1 il rispettivo prodotto lordo: Q_2 e $c_2 T_2$ sono le quantità di traffico corrispondenti al movimento sulle strade ordinarie. Queste ultime sono date dalle formole:

$$Q_2 = \frac{a_1 \dfrac{b^2}{c_2^2}}{a_2 \left(a_2 + \dfrac{b}{c_2}\right)^2} = \frac{A_2}{(c_2 + B_2)^2}$$

e

$$T_2 = a_1 \log n \left(1 + \frac{b}{c_2 a_2}\right) - \frac{a_1 \dfrac{b}{c_2} \left(2 a_2 + 3 \dfrac{b}{c_2}\right)}{2 \left(a_2 + \dfrac{b}{c_2}\right)^2} \quad (^1)$$

Con γ_{12} si indica un coefficiente che dipende dalle due tariffe c_1 e c_2 e dalle altre costanti a e b [2].

Raccogliamo nel seguente prospetto le quantità c_2 Q_2 e c_2 T_2 calcolate colle formole precedenti:

	Passeggieri			Merci	
	1ª	2ª	3ª	G. V.	P. V.
$c_2 =$	0.25	0.16	0.12	0.40	0.20
$Q_2 =$	249.083	2.178.060	6.433.692	64.880	2.275.828
$c_2 T_2 =$	4.591.221	12.096.954	14.691.534	1.174.128	20.549.917

Esponiamo infine i risultati ottenuti per U_1 e U_2 e quindi per U per le diverse classi di trasporti considerati per la rete Adriatica

	Passeggieri				Merci			Totale
	1ª classe	2ª classe	3ª classe	Totale passeggieri	G. V.	P. V.	Totale merci	passeggieri e merci
U_1=L.	18.645.237,54	78.187.404,60	106.441.814,27	203.274.456,41	5.167.768,22	141.163.167,41	146.330.935,63	349.605.392,04
U_2=L.	9.179.361,78	62.954.622,60	88.260.414,23	160.394.398,61	2.979.553,97	56.942.018,33	59.921.572,30	220.315.970,91
$U=U_1-U_2$=L.	9.465.875,76	15.232.782,00	18.181.400,04	42.880.057,80	2.188.214,25	84.221.149,08	86.409.363,33	129.289.421,13
$\gamma_{1,2}=\frac{U}{P_1}$=L.	1,784	1,192	1,167	1,278	0,353	1,864	1,682	1,520

(1) Queste formole sono identiche alle precedenti, salvo l'indice della costante c_1 perchè si ammette che la legge di densità del trasporto sulle strade ordinarie sia la stessa algebricamente di quella sulle ferrovie ossia

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{(a_2 + x)^2} - \frac{a_1}{\left(a_2 + \dfrac{b}{c_2}\right)^2}$$

e che a_1, a_2 e b siano costanti assolute ed indipendenti dalla tariffa e quindi uguali a quelle ricavate colle osservazioni della statistica ferroviaria.

(2) La considerazione di γ_{12} può giovare per applicare agli anni successivi i risultati ottenuti colle statistiche ferroviarie di un anno.

Secondo questi computi l'utilità commerciale delle ferrovie paragonata a quella delle strade ordinarie, rappresenta un vantaggio che, sul complesso del traffico, si può ragguagliare a circa una volta e mezzo il prodotto complessivo lordo del movimento ferroviario.

Sarebbe ora interessante indagare l'utilità parziale di tronchi ferroviari rispetto al rimanente della rete. Ma questa ricerca dovrebbe eseguirsi colla scorta dei nuovi criteri accennati dal Launhardt in un'altra sua opera (1) e col sussidio di statistiche ferroviarie del traffico distinto per zone e per tronchi, le quali fanno difetto per ora.

L'autore di questa Memoria si restringe perciò al presente saggio, lieto se questo potesse giovare agli economisti ed ai tecnici eminenti che vigilano e dirigono le nostre aziende ferroviarie, nell'accertamento della utilità commerciale del traffico, al quale esse danno vita, e che rappresenta oggidì uno dei fattori più importanti della vita economica.

(1) *Theorie des Trassirens,* von Wilhelm Launhardt 2 Heft. Hannover. Schmorl and v. Seenfeld 1887 e 1888.

Sopra una nuova trascendente in relazione colle funzioni Γ e Z.

Memoria del Socio PIETRO BLASERNA

presentata durante le ferie accademiche dell'anno 1895.

Lo studio delle funzioni Γ data da Eulero. Colle classiche Memorie di Gauss e di Legendre, di Lejeune-Dirichlet e di Prym, coi trattati eccellenti di Piola e di Hermite, di Binet e di Schlömilch, e di altri ancora, le loro proprietà caratteristiche e quelle delle funzioni B e Z da esse dipendenti, raccolte e ordinate, costituiscono un capitolo segnalato nel grande libro dell'analisi.

In un recente mio studio [1] sulla forma della funzione che risolve il problema ottico degli anfiteatri, ho riconosciuta l'utilità che vi sarebbe, d'introdurre in questo ramo dell'analisi la trattazione di una nuova trascendente Φ, la quale dipende dalle funzioni Z in certo qual modo, come queste dipendono dalle funzioni Γ. Prendendo per definizione di queste ultime la forma proposta da Legendre ed oggidì universalmente accettata, la funzione Z rimane definita nel doppio modo

$$Z(u) = \frac{d \log \Gamma(u)}{du} \qquad \text{ed anche} \qquad Z(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{1}{u+h} \right\}$$

Così pure la trascendente Φ rimane definita da

$$\Phi(u+1) = \frac{d[u\,Z(u+1)]}{du} \quad \text{e anche da} \quad \Phi(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{h+1}{(u+h)^2} \right\}$$

Come la funzione Z, anche la funzione Φ assume la forma $\infty - \infty$, le due serie che vi figurano essendo ambedue divergenti.

Colla presente Memoria mi propongo di studiare l'andamento e le proprietà di questa trascendente, tanto per argomenti reali e positivi, quanto per argomenti negativi e complessi. Vi ho aggiunto alcune integrazioni, che si possono eseguire col suo mezzo e una tabella dei suoi valori numerici.

[1] *Sul problema ottico degli anfiteatri.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, 7 aprile 1895.

PARTE PRIMA

Proprietà fondamentali delle funzioni Φ con argomento reale e positivo.

1. La definizione della nuova trascendente è data dalla equazione

$$\Phi(u+1)=\frac{d[uZ(u+1)]}{du}=Z(u+1)+uZ'(u+1) \tag{1}$$

dove u è la variabile indipendente, che per ora vogliamo supporre sempre tale che l'argomento $u+1$ rimanga positivo, e $Z'(u+1)$ rappresenta la derivata della funzione $Z(u+1)$.

Secondo una proprietà caratteristica delle funzioni Γ e Z, si ha

$$\Gamma(u+1)=u\Gamma(u)\,,\ \text{quindi}\ Z(u+1)=Z(u)+\frac{1}{u}\ \text{e}\ Z'(u+1)=Z'(u)-\frac{1}{u^2} \tag{1_1}$$

per cui la 1) assume anche la forma

$$\Phi(u+1)=\frac{d[uZ(u)]}{du}=Z(u)+uZ'(u) \tag{2}$$

Finalmente scrivendo nella 1) $u-1$ al posto di u, si ha

$$\Phi(u)=\frac{d[(u-1)Z(u)]}{du}=Z(u)+(u-1)Z'(u) \tag{2_1}$$

e sottraendo questa dalla 2), si ha pure

$$\Phi(u+1)=\Phi(u)+Z'(u) \tag{3}$$

Vogliamo chiamare

funzioni successive quelle, il cui argomento passa da μ a $\mu+1$, $\mu+2$, ... ecc.
» semisuccessive » » » » » μ a $\mu+\frac{1}{2}$, $\mu+1$, ... »
» n successive » » » » » μ a $\mu+n$, $\mu+2n$, ... »
» $\frac{1}{n}$ successive » » » » » μ a $\mu+\frac{1}{n}$, $\mu+\frac{2}{n}$. ... »

Dalle relazioni 1_1) e 3) risulta, che mentre la differenza tra due funzioni Z successive è una funzione algebrica, la differenza tra due funzioni Φ successive è ancora una trascendente e precisamente la derivata delle Z. La funzione Φ rappresenta quindi una trascendente alquanto più complicata delle Z.

2. Per trovare l'espressione di tale differenza, poniamo secondo una nota relazione

$$Z(u)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\left[\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u+2}+\cdots\frac{1}{u+k}\right]\right\} \tag{4}$$

dove k è un numero d'ordine, positivo e intero, che va a ∞. La serie è divergente, ha dunque una somma infinitamente grande, la quale però, sottratta dalla quantità pure infinitamente grande $\log k$, costituisce una quantità finita. Derivando la 4) si ha

$$Z'(u)=\lim_{k=\infty}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{(u+2)^2}+\cdots\frac{1}{(u+k)^2}\right\} \tag{4_1}$$

La serie è ora convergente ed introducendo la sua espressione nella relazione 3), si ha

$$\Phi(u+1)-\Phi(u)=\sum_0^\infty{}_k\frac{1}{(u+k)^2} \tag{5}$$

Questa equazione esprime la somma di una serie, somma che fin qui non poteva esprimersi in forma finita, tranne per il caso speciale che u fosse un numero intero [1]. Per $u=1$ si aveva

$$\sum_0^\infty{}_k\frac{1}{(1+k)^2}=\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Sostituendo la 4) e la 4_1) nella 2) si ha pure

$$\Phi(u+1)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_1^k{}_h\frac{h}{(u+h)^2}\right\} \tag{6}$$

e scrivendo u al posto di $u+1$ e nella serie $k+1$ al posto di k, anche

$$\Phi(u)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h\frac{h+1}{(u+h)^2}\right\} \tag{6_1}$$

Questa serie, come quella in 4), è divergente, ma l'espressione intera a destra della 6_1) è una quantità finita. Ponendo nella 6) $u=0$, si ha

$$\Phi(1)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_1^k\frac{1}{h}\right\}=-\mathrm{A} \tag{7}$$

dove $\mathrm{A}=0{,}5772156\ldots$ è la costante già calcolata dal Mascheroni e tanto frequente in tutto questo ramo dell'analisi. È noto che anche $Z(1)=-\mathrm{A}$, per cui la funzione Φ ha questa rassomiglianza colla Z, che

$$\Phi(1)=Z(1)=-\mathrm{A}.$$

3. Scrivendo nella 5) $u+1$ al posto di u, k al posto di $k+1$, e modificando in conseguenza i limiti di Σ, si ha

$$\Phi(u+2)-\Phi(u+1)=\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{(u+k)^2}$$

[1] Piola nel suo bel trattato sugli integrali definiti (*Opuscoli matematici e fisici*, Milano 1832, tomo I, pag. 200) esprime quella somma ed altre mediante derivate di Z e Γ.

Si può ora dare alla 5) forma diversa, staccando dalla somma il primo termine, per cui

$$\Phi(u+1)-\Phi(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{(u+k)^2}$$

Le due somme Σ sono identiche, per cui sottraendo la seconda dalla prima equazione si ha

$$\Phi(u+2)-2\,\Phi(u+1)+\Phi(u)=-\frac{1}{u^2} \qquad 8)$$

equazione caratteristica e fondamentale per le funzioni Φ. Vogliamo chiamare questa espressione il *trinomio caratteristico* delle funzioni Φ successive e concluderemo, che tale trinomio è una funzione algebrica. Ne segue che si può sempre calcolare una funzione $\Phi(u+2)$, quando si conoscano i valori di $\Phi(u+1)$ e $\Phi(u)$. Mentre per le funzioni Z basta la conoscenza di $Z(u)$, per calcolare la $Z(u+1)=Z(u)+\frac{1}{u}$, per le funzioni Φ occorre la conoscenza di due valori successivi $\Phi(u)$, $\Phi(u+1)$, per calcolare il terzo $\Phi(u+2)$.

Dalla equazione 8) si ha pure

$$\Phi(u+1)=\frac{1}{2}\left\{\Phi(u)+\Phi(u+2)\right\}+\frac{1}{2u^2}$$

Se non esistesse il termine $\frac{1}{2u^2}$, sarebbe questa una proprietà della retta. Ne segue che per grandi valori di u, la curva rappresentata dalla funzione Φ si avvicina indefinitamente alla retta e si confonde con questa per $u=\infty$.

4. Sempre dalla relazione 5), indicando con R il residuo di ciascuna serie, da un certo termine in poi, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi(u+1) &= \Phi(u)+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}+\cdots\frac{1}{(u+n-2)^2}+\frac{1}{(u+n-1)^2}+R\\
\Phi(u+2) &= \Phi(u+1)+\frac{1}{(u+1)^2}+\cdots\frac{1}{(u+n-2)^2}+\frac{1}{(u+n-1)^2}+R\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Phi(u+n-1) &= \Phi(u+n-2)+\frac{1}{(u+n-2)^2}+\frac{1}{(u+n-1)^2}+R\\
\Phi(u+n) &= \Phi(u+n-1)+\frac{1}{(u+n-1)^2}+R
\end{aligned}$$

Sommando insieme queste relazioni, si ha

$$\Phi(u+n)=\Phi(u)+\frac{1}{u^2}+\frac{2}{(u+1)^2}+\cdots\frac{n-1}{(u+n-2)^2}+\frac{n}{(u+n-1)^2}+nR$$

ossia

$$\Phi(u+n)=\Phi(u)+\sum_0^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(u+k)^2}+n\sum_n^\infty{}_k\frac{1}{(u+k)^2} \qquad 9)$$

relazione tra due funzioni Φ n successive, una serie finita algebrica e una serie infinita. Delle due Σ, che vi figurano, la prima, finita, va da $k=0$ a $k=n-1$, ed

ha carattere divergente; la seconda incomincia là, dove la prima finisce, cioè da $k = n$ e va all'infinito, ma è convergente. Se $n = \infty$, questa seconda serie è, per così dire, respinta all'infinito e non ha più ragione di essere; per cui la 9) si trasforma in

$$\lim \Phi(u+n) = \Phi(u) + \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{n+1}{(u+n)^2} = \infty \qquad 10)$$

non essendo più il caso di distinguere tra k e n. Ne segue, che la funzione Φ, al pari della funzione Z, va all'infinito per valore infinito, positivo del suo argomento.

Si può dare alla 9) forma diversa, considerandovi la seconda Σ come la differenza di altre due, ponendo cioè

$$\sum_{n}^{\infty}{}_{k} \frac{1}{(u+k)^2} = \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{1}{(u+k)^2} - \sum_{0}^{n-1}{}_{k} \frac{1}{(u+k)^2}$$

per cui sostituendo in 9)

$$\Phi(u+n) = \Phi(u) + \sum_{0}^{n-1}{}_{k} \frac{k-n+1}{(u+k)^2} + n \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{1}{(u+k)^2} \qquad 9_1)$$

Questa formola acquista un interesse speciale nel caso, che u sia un numero intero.

Poniamo dunque $u = m$, intendendo per m precisamente un numero intero e positivo; si può dare alla serie infinita la forma

$$n \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{1}{(m+k)^2} = n \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{1}{(1+k)^2} - n \sum_{0}^{m-2}{}_{k} \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{n\pi^2}{6} - n \sum_{1}^{m-1}{}_{k} \frac{1}{k^2}$$

per cui la 9_1) diviene

$$\Phi(m+n) = \Phi(m) + \frac{n\pi^2}{6} - \sum_{0}^{n-1}{}_{k} \frac{n-k-1}{(m+k)^2} - n \sum_{1}^{m-1}{}_{k} \frac{1}{k^2} \qquad 9_2)$$

espressione, nella quale ambedue le Σ rappresentano funzioni numeriche finite.

Ponendo, a titolo d'esempio, $m = 1$, $n = 1$, si ha

$$\Phi(2) = \Phi(1) + \frac{\pi^2}{6} = -\mathrm{A} + \frac{\pi^2}{6}$$

risultato conforme alla prima formola del numero precedente. Conoscendo quindi $\Phi(1)$ e $\Phi(2)$, l'equazione 8) fornisce un mezzo semplice, per calcolare successivamente $\Phi(3)$, $\Phi(4)$, $\Phi(5)$... Vi si arriva più direttamente, introducendo nella 9_1) la relazione

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{1}{(u+k)^2} = \Phi(u+1) - \Phi(u),$$

per cui si ha

$$\Phi(u+n) = -(n-1)\,\Phi(u) + n\,\Phi(u+1) - \sum_{0}^{n-1}{}_{k} \frac{n-k-1}{(u+k)^2} \qquad 9_3)$$

equazione, che per $u = 1$ prende la forma

$$\Phi(1+n) = -\mathrm{A} + \frac{n\pi^2}{6} - \sum_{1}^{n}{}_{k} \frac{n-k}{k^2}$$

e ponendovi successivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$ ecc. si ha

$$\Phi(2) = -A + \frac{\pi^2}{6} = +1{,}067\,7184$$

$$\Phi(3) = -(1+A) + \frac{\pi^2}{3} = +1{,}712\,6525$$

$$\Phi(4) = -\left(2+\frac{1}{4}+A\right) + \frac{\pi^2}{2} = +2{,}107\,5865$$

ecc.

Risulta finalmente dalla 8)

$$\Phi(u) = 2\,\Phi(u+1) - \Phi(u+2) - \frac{1}{u^2}$$

e per $u=0$, considerando che $\Phi(1)$ e $\Phi(2)$ hanno valori finiti,

$$\Phi(0) = -\infty$$

proprietà anche questa, che la funzione Φ ha in comune colla Z. Le funzioni $\Phi(u)$ e $Z(u)$ hanno quindi andamento consimile: sono ambedue funzioni continue per valori positivi di u, incominciano a $-\infty$ per $u=0$, vanno a $+\infty$ per $u=\infty$ e si intersecano in un punto, essendo $\Phi(1) = Z(1) = -A$.

5. L'equazione 9) ammette una nuova generalizzazione. Scrivendo $2n$ al posto di n e scindendo la prima Σ, che va da 0 a $2n-1$, in due: una da 0 a $n-1$, l'altra da n a $2n-1$, si ha facilmente

$$\Phi(u+2n) = \Phi(u) + \sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} + \sum_{n}^{2n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} + 2n \sum_{2n}^{\infty}{}_k \frac{1}{(u+k)^2}.$$

Moltiplicando la 9) per 2, e scindendo la seconda Σ in due, da n a $2n-1$, e da $2n$ all'infinito

$$2\,\Phi(u+n) = 2\,\Phi(u) + 2\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} + 2n\sum_{n}^{2n-1}{}_k \frac{1}{(u+k)^2} + 2n\sum_{2n}^{\infty}{}_k \frac{1}{(u+k)^2}$$

e sottraendo questa dalla superiore, con facile riduzione

$$\Phi(u) - 2\,\Phi(u+n) + \Phi(u+2n) = -\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} - \sum_{n}^{2n-1}{}_k \frac{2n-k-1}{(u+k)^2} \qquad 11)$$

Questo trinomio di funzioni Φ n successive ha forma analoga a quello contemplato per funzioni Φ successive in 8). In esso è scomparsa la serie infinita: il trinomio è espresso da due somme algebriche, la seconda delle quali è una continuazione della prima con numeratori diversi e cessa da sè e si annulla per $k=2n-1$. Non occorre aggiungere, che la relazione 11), come la 9) da cui deriva, vale per valori interi e positivi di n.

6. Dalla teoria delle funzioni Γ risulta la bella relazione [1]

$$\Gamma(2u) = \frac{2^{2u-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(u)\,\Gamma\!\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

[1] Schlömilch nel suo trattato sulle funzioni Γ (*Analytische Studien*, pag. 25) scrive per errore $\frac{2^{u-1}}{\sqrt{\pi}}$ invece di $\frac{2^{2u-1}}{\sqrt{\pi}}$.

quindi

$$\log \Gamma(2u) = \log\left(\frac{2^{2u-1}}{\sqrt{\pi}}\right) + \log \Gamma(u) + \log \Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

Derivando rispetto ad u

$$2\cdot\frac{d\log\Gamma(2u)}{d(2u)} = 2\log 2 + \frac{d\log\Gamma(u)}{du} + \frac{d\log\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}{du}$$

ossia

$$2\,Z(2u) = 2\log 2 + Z(u) + Z\left(u+\frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

relazione, col mezzo della quale $Z(2u)$ si calcola da due Z semisuccessive.

Multiplico per $2u - 1 = u + (u-1) = 2\left(u-\frac{1}{2}\right)$

$$2(2u-1)\,Z(2u) = 2(2u-1)\log 2 + u Z(u) + (u-1)\,Z(u) + 2\left(u-\frac{1}{2}\right)Z\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

per cui, derivando nuovamente rispetto ad u

$$4\cdot\frac{d[(2u-1)\,Z(2u)]}{d(2u)} = 4\log 2$$

$$+\frac{d[u Z(u)]}{du} + \frac{d[(u-1)\,Z(u)]}{du} + 2\,\frac{d\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)Z\left(u+\frac{1}{2}\right)\right]}{du}$$

e tenendo conto delle definizioni date dalle formole 1), 2), 1_1), con leggiera inversione dei termini

$$4\,\Phi(2u) = 4\log 2 + \Phi(u) + 2\,\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right) + \Phi(u+1) \tag{13}$$

relazione, col mezzo della quale $\Phi(2u)$ è determinata da tre funzioni Φ semisuccessive, mentre l'equazione 8) ci fornisce una relazione fra tre funzioni Φ successive. Le quattro funzioni Φ della 13) possono però ridursi a tre per alcuni valori di u scelti in modo, che $\Phi(2u)$ risulti uguale ad una delle Φ del secondo membro della equazione. Così ponendo $u = \frac{1}{2}$ e poi $= 1$, e considerando che $\Phi(1) = -A$ si ha

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{3}{2}\right) &= -\left\{2\,A + 4\log 2 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\\ \Phi(2) &= -\left\{\frac{5}{3}A + \frac{4}{3}\log 2 + \frac{2}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = +\,1{,}067\,7184\end{aligned} \tag{14}$$

e l'equazione 8) fornisce poi il mezzo per procedere oltre. Si trova facilmente

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{5}{2}\right) &= -\left\{4 + 4A + 8\log 2 + 3\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\\ \Phi(3) &= -\left\{1 + \frac{7}{3}A + \frac{8}{3}\log 2 + \frac{4}{3}\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

e così di seguito.

Dalla seconda delle equazioni 14) si trova

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = -4,430\,9111$$

quindi

$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = +0,503\,8911$$

$$\Phi\left(\frac{5}{2}\right) = +1,438\,6933$$

ecc.

7. Ritorniamo all'equazione 13). Ponendo per u successivamente $u+\frac{1}{2}$, $u+1$, $u+\frac{3}{2}, \dots u+\frac{n}{2}$, multiplicando le singole equazioni per le quantità arbitrarie λ_0, λ_1, $\lambda_2 \dots \lambda_n$ e sommando, abbiamo

$$4\sum_0^n{}_i\, \lambda_i\, \Phi(2u+i) = 4\log 2 \sum_0^n{}_i\, \lambda_i + \lambda_0 \Phi(u) + (2\lambda_0+\lambda_1)\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\sum_2^n{}_i\,(\lambda_{i-2}+2\lambda_{i-1}+\lambda_i)\Phi\left(u+\frac{i}{2}\right)+(\lambda_{n-1}+2\lambda_n)\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right)+\lambda_n\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \qquad 16)$$

equazione d'indole generale, dalla quale si possono ricavare relazioni speciali, scegliendo opportunamente i valori delle λ. Si ottiene un risultato interessante, ponendo $n=3m$, dove m è un numero intero, mantenendo ancora arbitrarie λ_0, λ_3, $\lambda_6 \dots \lambda_{3m}$ e ponendo tutte le altre $=0$. Si arriva ad una formola, in cui il primo membro procede per $\Phi(2u)$ trisuccessive, il secondo per $\Phi(u)$ semisuccessive. Si ha

$$4\sum_0^m{}_i\, \lambda_{3i}\, \Phi(2u+3i) = 4\log 2 \sum_0^m{}_i\, \lambda_{3i}$$

$$+\sum_0^m{}_i\, \lambda_{3i}\left\{\Phi\left(u+\frac{3i}{2}\right)+2\Phi\left(u+\frac{3i+1}{2}\right)+\Phi\left(u+\frac{3i+2}{2}\right)\right\} \qquad 17)$$

Ponendo ora

$$\lambda_0 = \binom{m}{0}, \; \lambda_3 = \pm\binom{m}{1}, \; \lambda_6 = \binom{m}{2}, \; \dots \; \lambda_{3m} = (\pm 1)^m \binom{m}{m}$$

considerando che

$$(1+1)^m = \binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots\cdots \binom{m}{m} = 2^m$$

$$(1-1)^m = \binom{m}{0}-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\cdots(-1)^m\binom{m}{m} = 0$$

si ottengono facilmente le due relazioni seguenti

$$2^2\sum_0^m{}_i \binom{m}{i}\Phi(2u+3i) = 2^{m+2}\log 2$$

$$+\sum_0^m{}_i \binom{m}{i}\left\{\Phi\left(u+\frac{3i}{2}\right)+2\Phi\left(u+\frac{3i+1}{2}\right)+\Phi\left(u+\frac{3i+2}{2}\right)\right\} \qquad 18)$$

$$2^2 \sum_0^m {}_i (-1)^i \binom{m}{i} \Phi(2u+3i)$$
$$= \sum_0^m {}_i (-1)^i \binom{m}{i} \left\{ \Phi\left(u+\frac{3i}{2}\right) + 2\Phi\left(u+\frac{3i+1}{2}\right) + \Phi\left(u+\frac{3i+2}{2}\right) \right\} \qquad 19)$$

che costituiscono relazioni tra funzioni $\Phi(2u)$ trisuccessive e $\Phi(u)$ semisuccessive.

8. L'equazione generale 16) ci fa conoscere una relazione tra $n+1$ funzioni $\Phi(2u)$ successive e $n+3$ funzioni $\Phi(u)$ semisuccessive. Ma colla scelta dei valori per le λ noi possiamo restringere, anche notevolmente, tale numero di funzioni, sia a destra, sia a sinistra. L'equazione 17) e le sue dipendenti 18) e 19) ne sono un esempio, dove colle sostituzioni ivi adoperate, i termini nel primo membro sono ridotti da tre ad uno, mentre nel secondo rimangono inalterati.

Ma si può ottenere anche, al rovescio, una relazione, dove i termini a sinistra rimangono tutti, e si riducono notevolmente quelli a destra. Basta porre

$$\lambda_0 = 1 \ , \ \lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = 3 \ , \ \dots \ \lambda_n = (-1)^n (n+1)$$

In tale caso, a sinistra nessun termine si annulla, invece a destra si ha per il trinomio

$$\lambda_{i-2} + 2\lambda_{i-1} + \lambda_i = 0$$

per tutti i valori che i può assumere, da 0 fino a n. Ne segue che spariscono tutti i termini con Φ, meno il primo ed i due ultimi, per cui si ha la relazione

$$4 \sum_0^n {}_i (-1)^i (i+1) \Phi(2u+i) = \left\{ \begin{matrix} -2(n+1)\log 2 \\ +2(n+2)\log 2 \end{matrix} \right\}$$
$$+ \Phi(u) + (-1)^n \left\{ (n+2)\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right) + (n+1)\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \right\} \qquad 20)$$

equazione, in cui $\log 2$ si trova multiplicato col fattore $-2(n+1)$ quando n è dispari, e col fattore $+2(n+2)$ quando n è pari.

Se poniamo invece

$$\lambda_0 = n+1 \ , \ \lambda_1 = -n \ , \ \lambda_2 = n-1 \ , \ \dots \ \lambda_n = (-1)^n$$

scompaiono anche ora i termini col trinomio

$$\lambda_{i-2} + 2\lambda_{i-1} + \lambda_i = 0$$

scompare inoltre il penultimo termine della serie a destra e rimane invece il secondo. Si ha

$$4 \sum_0^n {}_i (-1)^i (n-i+1) \Phi(2u+i) = \left\{ \begin{matrix} 2(n+1)\log 2 \\ 2(n+2)\log 2 \end{matrix} \right\}$$
$$+ (n+1)\Phi(u) + (n+2)\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right) + (-1)^n \Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \qquad 21)$$

dove, come prima, il fattore $2(n+1)$ di $\log 2$ si riferisce al caso di n dispari,

l'altro $2(n+2)$ al caso che n sia pari. Sommando insieme la 20) e la 21), si ha infine

$$4\sum_{0}^{n}{}_i (-1)^i \Phi(2u+i) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4\log 2 \end{Bmatrix}$$

$$+\Phi(u)+\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right)+(-1)^n\left\{\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right)+\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right)\right\} \qquad 22)$$

equazione rimarchevole per la sua grande semplicità, che si dimostra anche direttamente e nella quale, al solito, il termine logaritmico ha due valori a seconda che n sia dispari o pari. Scrivendo in essa u per $2u$, essa assume anche la forma

$$4\sum_{0}^{n}{}_i (-1)^i \Phi(u+i) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2^2\log 2 \end{Bmatrix}$$

$$+\Phi\left(\frac{u}{2}\right)+\Phi\left(\frac{u+1}{2}\right)+(-1)^n\left\{\Phi\left(\frac{u+n+1}{2}\right)+\Phi\left(\frac{u+n+2}{2}\right)\right\} \qquad 23)$$

e per $n=0$, la 22) ritorna alla forma fondamentale 13).

9. Voglio accennare ancora a qualche sviluppo, che si può ottenere dalla equazione generale 16). Sia

$$\lambda_0 = 1 \;,\; \lambda_1 = \pm\frac{1}{p} \;,\; \lambda_2 = \frac{1}{p^2} \;,\; \lambda_3 = \pm\frac{1}{p^3} ,\ldots$$

considerando che

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^n}\cdot\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

$$1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-\cdots(-1)^n\frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^n}\cdot\frac{p^{n+1}-(-1)^{n+1}}{p+1}$$

si hanno le due relazioni

$$4\sum_{0}^{n}{}_i \frac{1}{p^i}\Phi(2u+i) = \frac{4}{p^n}\cdot\frac{p^{n+1}-1}{p-1}\log 2+\Phi(u)+\left(2+\frac{1}{p}\right)\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\left(+1\frac{1}{p}\right)^2\sum_{2}^{n}{}_i \frac{1}{p^{i-2}}\Phi\left(u+\frac{i}{2}\right)+\frac{1}{p^{n-1}}\left(1+\frac{2}{p}\right)\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right)+\frac{1}{p^n}\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \quad 24)$$

$$4\sum_{0}^{n}{}_i (-1)^i\frac{1}{p^i}\Phi(2u+i) = \frac{4}{p^n}\cdot\frac{p^{n+1}-(-1)^{n+1}}{p+1}\log 2$$

$$+\Phi(u)+\left(2-\frac{1}{p}\right)\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\sum_{2}^{n}{}_i (-1)^{i-2}\frac{1}{p^{i-2}}\Phi\left(u+\frac{i}{2}\right)$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{p^{n-1}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right)+(-1)^n\frac{1}{p^n}\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \qquad 25)$$

Poniamo infine

$$\lambda_0 = \operatorname{sen}\varphi \;,\; \lambda_1 = \operatorname{sen}2\varphi \;,\; \ldots\; \lambda_n = \operatorname{sen}(n+1)\varphi$$

avendo presente che

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots\lambda_n=\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}$$

$$\lambda_{i-2}+2\lambda_{i-1}+\lambda_i=4\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen} i\varphi$$

$$2\lambda_0+\lambda_1=4\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\lambda_{n-1}+2\lambda_n=\lambda_{n-1}+2\lambda_n+\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1}=4\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}(n+1)\varphi-\operatorname{sen}(n+2)\varphi$$

con facili sostituzioni

$$4\sum_0^n{}_i\operatorname{sen}(i+1)\varphi\,\Phi(2u+i)=4\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\log 2$$

$$+\operatorname{sen}\varphi\,\Phi(u)+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\sum_1^{n+1}{}_i\operatorname{sen} i\varphi\,\Phi\left(u+\frac{i}{2}\right)-\operatorname{sen}(n+2)\varphi\,\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$+\operatorname{sen}(n+1)\varphi\,\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \qquad 26)$$

Nello stesso modo, ponendo

$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_1=\cos\varphi\ ,\ \lambda_2=\cos 2\varphi\ ,\ \ldots\ \lambda_n=\cos n\varphi$$

essendo

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\frac{\cos\frac{n\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}$$

$$\lambda_{i-2}+2\lambda_{i-1}+\lambda_i=4\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos(i-1)\varphi$$

$$\lambda_{n-1}+2\lambda_n=\lambda_{n-1}+2\lambda_n+\lambda_{n+1}-\lambda_{n+1}=4\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos(n+1)\varphi-\cos(n+1)\varphi$$

con analoghe sostituzioni

$$4\sum_0^n{}_i\cos i\varphi\,\Phi(2u+i)=4\frac{\cos\frac{n\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\log 2$$

$$+\varphi(u)+(2+\cos\varphi)\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right)+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\sum_2^{n+1}{}_i\cos(i-1)\varphi\,\Phi\left(u+\frac{i}{2}\right)$$

$$-\cos(n+1)\varphi\,\Phi\left(u+\frac{n+1}{2}\right)+\cos n\varphi\,\Phi\left(u+\frac{n+2}{2}\right) \qquad 27)$$

10. Scrivendo u per $2u$, si può dare alla formola 13) la forma seguente

$$4\,\Phi(u)=2^2\log 2+\Phi\left(\frac{u}{2}\right)+2\,\Phi\left(\frac{u+1}{2}\right)+\Phi\left(\frac{u+2}{2}\right)$$

Ponendo in essa successivamente $2u$, $3u$, ... nu per u, multiplicando le singole equazioni per λ_1, λ_2, ... λ_n e sommando

$$4\sum_1^n {}_i \lambda_i \Phi(iu) = 2^2 \log 2 \sum_1^n {}_i \lambda_i + \sum_1^n {}_i \lambda_i \left\{ \Phi\left(\frac{iu}{2}\right) + 2\Phi\left(\frac{iu+1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{iu+2}{2}\right) \right\} \qquad 28)$$

relazione nella quale, al solito, λ_1, λ_2, ... λ_n sono valori arbitrari. Da questa, come dalle precedenti, si ottengono forme speciali.

Così, per esempio, ponendo

$$\lambda_1 = \binom{n-1}{0}, \quad \lambda_2 = \binom{n-1}{1} \dots \lambda_n = \binom{n-1}{n-1}$$

si ha

$$4\sum_1^n {}_i \binom{n-1}{i-1} \Phi(iu)$$

$$= 2^{n+1} \log 2 + \sum_1^n {}_i \binom{n-1}{i-1} \left\{ \Phi\left(\frac{iu}{2}\right) + 2\,\Phi\left(\frac{iu+1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{iu+2}{2}\right) \right. \qquad 29)$$

Ponendo invece

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$$

abbiamo

$$4\sum_1^n {}_i \Phi(iu) = 4n \log 2 + \sum_1^n {}_i \left\{ \Phi\left(\frac{iu}{2}\right) + 2\,\Phi\left(\frac{iu+1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{iu+2}{2}\right) \right\} \qquad 30)$$

e così di seguito.

11. Studiando le proprietà delle funzioni Γ, Legendre ha sviluppato una formola rimarchevole, che messa in forma logaritmica è la seguente:

$$\log \Gamma(nu) = -\log\left(n^{\frac{1}{2}-nu}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\right) + \log \Gamma(u) + \log \Gamma\left(u+\frac{1}{n}\right) + \cdots \log \Gamma\left(u+\frac{n-1}{n}\right)$$

Prendendo la derivata rispetto ad u e considerando che

$$\frac{d \log \Gamma(nu)}{du} = n \cdot \frac{d \log \Gamma(nu)}{d\,(nu)} = n\,Z(nu)$$

si trova facilmente

$$nZ(nu) = n \log n + Z(u) + Z\left(u+\frac{1}{n}\right) + \cdots Z\left(u+\frac{n-2}{n}\right) + Z\left(u+\frac{n-1}{n}\right) \qquad 31)$$

Per passare alle funzioni Φ, si multiplica questa equazione per $nu-1$. Giova osservare, che

$$nu-1 = \left\{ \begin{matrix} nu \\ -1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n\left(u+\frac{1}{n}\right) \\ -2 \end{matrix} \right\} = \cdots = \left\{ \begin{matrix} n\left(u+\frac{n-2}{n}\right) \\ -(n-1) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n\left(u+\frac{n-1}{n}\right) \\ -n \end{matrix} \right\}$$

per cui

$$n\,(nu-1)\,Z(nu) = n\,(nu-1) \log n$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} nu\,Z(u) \\ -Z(u) \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n\left(u+\frac{1}{n}\right) Z\left(u+\frac{1}{n}\right) \\ -2\,Z\left(u+\frac{1}{n}\right) \end{matrix} \right\} + \cdots \left\{ \begin{matrix} n\left(u+\frac{n-1}{n}\right) Z\left(u+\frac{n-1}{n}\right) \\ -n\,Z\left(u+\frac{n-1}{n}\right) \end{matrix} \right\}$$

Derivando rispetto ad u, e tenendo presenti le equazioni 1), 2), 3), che costituiscono le varie forme di definizione delle funzioni Φ, con facili riduzioni si ha

$$n^2\,\Phi(nu) = n^2 \log n$$
$$+\left\{\begin{matrix}\Phi(u)\\(n-1)\,\Phi(u+1)\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\,\Phi\left(u+\frac{1}{n}\right)\\(n-2)\,\Phi\left(u+\frac{1}{n}+1\right)\end{matrix}\right\}+\cdots\left\{\begin{matrix}n\,\Phi\left(u+\frac{n-1}{n}\right)\\0\cdot\Phi\left(u+\frac{2n-1}{n}\right)\end{matrix}\right\} \quad 32)$$

Questa equazione è formata, in apparenza, di due serie distinte, ma in realtà la seconda continua la prima. La funzione $\Phi(nu)$ è data da una serie finita di $2n-1$ termini, che incominciano da $\Phi(u)$ con processo successivo di $\frac{1}{n}$ e finiscono con $\Phi\left(u+\frac{2n-2}{n}\right)$. I coefficienti invece procedono da 1 fino ad n e retrocedono poi di nuovo fino a 1, in forma analoga a quella, che si riscontra nella formola binomiale per esponenti positivi, interi e pari. Ne segue che, ad eccezione del termine medio col coefficiente n, tutti gli altri coefficienti appajono due volte. Riunendoli insieme, si può dare alla 32) la forma seguente

$$\Phi(nu)=\log n+\frac{1}{n^2}\sum_1^{n-1}{}_i\, i\left\{\Phi\left(u+\frac{i-1}{n}\right)+\Phi\left(u+2-\frac{i+1}{n}\right)\right\}+\frac{1}{n}\,\Phi\left(u+\frac{n-1}{n}\right) \quad 33)$$

dove, come al solito, i è un numero d'ordine, che va da 1 fino a $n-1$. Si osservi, che le due funzioni Φ, aventi lo stesso coefficiente i, hanno argomenti che si completano a vicenda, essendo la somma di questi $2\left(u+1-\frac{1}{n}\right)$, dunque indipendente dal numero d'ordine i. Per $n=2$, la 33) si trasforma in

$$\Phi(2u) = \log 2 + \frac{1}{4}\left\{\Phi(u) + \Phi(u+1)\right\} + \frac{1}{2}\,\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

formola identica alla 13). Scrivendo nella 33) $u+1$ al posto di nu, $\frac{u+1}{n}$ al posto di u, si ha

$$\Phi(u+1) = \log n + \frac{1}{n^2}\sum_1^{n-1}{}_i\, i\left\{\Phi\left(\frac{u+i}{n}\right)+\Phi\left(2+\frac{u-i}{n}\right)\right\}+\frac{1}{n}\,\Phi\left(\frac{u}{n}+1\right) \quad 34)$$

forma anche più rimarchevole, dalla quale apparisce come una funzione Φ può essere espressa da una serie di $2n-1$ funzioni Φ $\frac{1}{n}$ successive, n essendo un numero completamente arbitrario. Ponendo in questa $u=0$, con leggiera riduzione e tenendo conto che $\Phi(1) = -\text{A}$, si trova

$$-\text{A} = \frac{n}{n-1}\log n + \frac{1}{n(n-1)}\sum_1^{n-1}{}_i\, i\left\{\Phi\left(\frac{i}{n}\right)+\Phi\left(2-\frac{i}{n}\right)\right\} \quad 35)$$

la quale, per $n=2$, conduce alla prima delle formole 14).

12. La relazione 34) può servire di punto di partenza per un altro sviluppo che merita di essere considerato. Sotto il simbolo Σ essa contiene due funzioni Φ complementari, i cui argomenti, sommati insieme, dànno per somma $2\left(1+\frac{u}{n}\right)$.

Considerando che

$$\Phi\left(\frac{u+i}{n}\right)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\left[\frac{1}{\left(\frac{u}{n}+\frac{i}{n}\right)^2}+\frac{2}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{i}{n}\right)^2}+\cdots\frac{k+1}{\left(k+\frac{u}{n}+\frac{i}{n}\right)^2}\right]\right\}$$

$$\Phi\left(2+\frac{u-i}{n}\right)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\left[\frac{1}{\left(2+\frac{u}{n}-\frac{i}{n}\right)^2}+\frac{2}{\left(3+\frac{u}{n}-\frac{i}{n}\right)^2}+\cdots\frac{k+1}{\left(k+2+\frac{u}{n}-\frac{i}{n}\right)^2}\right]\right\} \qquad 36)$$

noi possiamo sommare i singoli termini sovrapposti. Per i due termini generali abbiamo l'identità

$$\frac{k+1}{\left(k+\frac{u}{u}+\frac{i}{n}\right)^2}+\frac{k+1}{\left(k+2+\frac{u}{n}-\frac{i}{n}\right)^2}=2(k+1)\frac{\left(k+1+\frac{u}{n}\right)^2+\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}{\left[\left(k+1+\frac{u}{n}\right)^2-\left(1-\frac{i}{n}\right)^2\right]^2}$$

e scindendola in due parti, una indipendente da i, l'altra residuale, la possiamo porre uguale a

$$2(k+1)\left\{\frac{1}{\left(k+1+\frac{u}{n}\right)^2}+R_{k+1}^{(i)}\right\}$$

dove $\qquad 37)$

$$R_{k+1}^{(i)}=\frac{\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}{\left(k+1+\frac{u}{n}\right)^2}\cdot\frac{3\left(k+1+\frac{u}{n}\right)^2-\left(1-\frac{i}{n}\right)^2}{\left[\left(k+1+\frac{u}{n}\right)^2-\left(1-\frac{i}{n}\right)^2\right]^2}$$

per cui si ha

$$\Phi\left(\frac{u+i}{n}\right)+\Phi\left(2+\frac{u-i}{n}\right)$$

$$=2\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\left[\frac{1}{\left(\frac{u}{n}+1\right)^2}+\frac{2}{\left(\frac{u}{n}+2\right)^2}+\cdots-\frac{k+1}{\left(\frac{u}{n}+k+1\right)^2}\right]\right\}$$

$$-2\lim_{k=\infty}\left\{R_1^{(i)}+2R_2^{(i)}+\cdots(k+1)R_{k+1}^{(i)}\right\}$$

ossia

$$\Phi\left(\frac{u+i}{n}\right)+\Phi\left(2+\frac{u-i}{n}\right)=2\Phi\left(\frac{u}{n}+1\right)-2\sum_{0}^{\infty}{}_k(k+1)R_{k+1}^{(i)}$$

Questo valore sostituito in 34) porta alla seguente relazione

$$\Phi(u+1)=\log n+\Phi\left(\frac{u}{n}+1\right)-\frac{2}{n^2}\sum_{1}^{n-1}{}_i\, i\sum_{0}^{\infty}{}_k(k+1)R_{k+1}^{(i)} \qquad 38)$$

relazione, in cui n è un numero intero, finito, non minore di 2, i un numero d'ordine che va da 1 fino a $n-1$, k un numero d'ordine che va da 0 a ∞, e il valore

di $R^{(i)}_{k+1}$ è definito dalla 37). L'espressione in 38) contiene quindi un numero finito di serie infinite, ciascuna delle quali è convergente per tutti i valori finiti che u, n, i possono assumere.

Per $u=0$, essa diviene

$$\log n = \frac{2}{n^2}\sum_1^{n-1}{}_i\, i \sum_0^{\infty}{}_k (k+1)\, R^{(i)}_{k+1}, \qquad (u=0) \tag{39}$$

e ponendovi per n il suo valore più piccolo di $n=2$, si ottiene la serie infinita

$$\log 2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{3.4.1-1}{1^2.3^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3.4.4-1}{3^2.5^2}+\cdots\frac{1}{k+1}\cdot\frac{3.4(k+1)^2-1}{(2k+1)^2(2k+3)^2}+\cdots\text{inf.}\right\} \tag{40}$$

la cui convergenza, quantunque debole, non ha bisogno di essere dimostrata.

13. Il procedimento di trasformazione adoperato nel numero precedente, può essere allargato. Sia

$$\begin{aligned}\Phi(u+v) &= \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_0^k{}_h \frac{h+1}{(h+u+v)^2}\right\}\\ \Phi(u-v) &= \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_0^k{}_h \frac{h+1}{(h+u-v)^2}\right\}\end{aligned} \tag{41}$$

Sommando insieme e considerando che in termine generale

$$\frac{k+1}{(k+u+v)^2}+\frac{k+1}{(k+u-v)^2}=2(k+1)\left\{\frac{1}{(k+u)^2}+v^2\cdot\frac{3(k+u)^2-v^2}{(k+u-v)^2\,(k+u)^2\,(k+u+v)^2}\right\}$$

si ottiene sommando e con facile sostituzione

$$\Phi(u+v)+\Phi(u-v)=2\Phi(u)-2v^2\sum_0^{\infty}{}_k (k+1)\cdot\frac{3(k+u)^2-v^2}{(k+u-v)^2\,(k+u)^2\,(k+u+v)^2} \tag{42}$$

relazione, nella quale la serie è convergente, u e v sono ambedue variabili indipendenti, legate alla sola condizione che u sia positivo e $v<u$, e che per il caso speciale di $u=1$, $v=\frac{1}{2}$, tenuto conto delle 14) riconduce alla 40).

Scrivendo u per $u+v$, v per $u-v$, la 42) assume anche la forma

$$\Phi(u)-2\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)+\Phi(v)=-\frac{(u-v)^2}{2}\sum_0^{\infty}{}_k (k+1)\cdot\frac{3(2k+u+v)^2-(u-v)^2}{(k+u)^2(2k+u+v)^2(k+v)^2} \tag{43}$$

relazione che vale per tutti i valori positivi che u e v possono assumere, non importando se $v \lesseqgtr u$. Essa rappresenta il trinomio caratteristico delle funzioni $\frac{v-u}{2}$ successive ed ha quindi carattere molto più generale della 11), ove si tratta di funzioni n successive, intendendo con n un numero positivo e intero. Ponendo $v=u+2n$, $\frac{u+v}{2}=u+n$, la 43) diviene

$$\Phi(u)-2\Phi(u+n)+\Phi(u+2n)=-2n^2\sum_0^{\infty}{}_k (k+1)\frac{3(k+u+n)^2-n^2}{(k+u)^2\,(k+u+n)^2\,(k+u+2n)^2} \tag{44}$$

La serie in 44) ha per somma una funzione algebrica data dalla 11). Ponendo, a titolo di esempio, $n=1$, $n=2$, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2} &= \sum_0^\infty{}_k (k+1)\frac{3(k+u+1)^2-1}{(k+u)^2(k+u+1)^2(k+u+2)^2} \\ \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{2}{(u+1)^2}+\frac{1}{(u+2)^2}\right\} &= \sum_0^\infty{}_k (k+1)\frac{3(k+u+2)^2-4}{(k+u)^2(k+u+2)^2(k+u+4)^2} \end{aligned} \qquad 45)$$

14. Dalle stesse due equazioni in 41), si ottiene per sottrazione

$$\Phi(u+v)-\Phi(u-v)=4v\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{k+u}{(k+u-v)^2(k+u+v)^2} \qquad 46)$$

e ponendo, come prima, u per $u+v$, v per $u-v$, anche

$$\Phi(u)-\Phi(v)=(u-v)\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{2k+u+v}{(k+u)^2(k+v)^2} \qquad 47)$$

relazione certamente molto semplice, in cui u e v sono legate alla sola condizione di essere positive. In ambedue le formole la serie è convergente. La 47) ha molta analogia colla 9), ma è d'indole più generale. Ponendo $v=u+n$, si ha

$$\Phi(u+n)=\Phi(u)+n\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{2k+2u+n}{(k+u)^2(k+u+n)^2} \qquad 48)$$

ed in questa forma più speciale, n essendo un numero positivo e intero, essa è comparabile alla 9). Quando anche u sia un numero intero $=m$, tenuto conto della 9_2), la 48) assume la forma

$$\frac{n\pi^2}{6}-\sum_0^{n-1}{}_k\frac{n-k-1}{(m+k)^2}-n\sum_0^{m-2}{}_k\frac{1}{(1+k)^2}=n\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{2m+2k+n}{(m+k)^2(m+k+n)^2} \qquad 49)$$

per cui la serie infinita a destra si trova espressa mediante una funzione di π e funzioni algebriche.

Ponendo $m=1$, $n=1$, si ha la relazione la più semplice

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{4^2}+\cdots\frac{1}{k+1}\cdot\frac{2k+3}{(k+2)^2}+\cdots \text{ inf.} \qquad 50)$$

In queste ultime due formole, 49) e 50) come pure nelle 39), 40) e 45) abbiamo espressioni, in cui le funzioni Φ sono scomparse. Esse rappresentano casi speciali di altre più generali, per le quali le funzioni Φ sono necessarie. Ma non abbiamo bisogno di dire, che quelle speciali si possono anche dedurre in via diretta, quantunque talvolta con molti artifizj. Tutte queste serie, combinate insieme, dànno luogo a molti sviluppi facili a trovarsi.

15. L'equazione 47) stabilisce una relazione tra due funzioni Φ con variabili indipendenti. Ma è facile estenderla ad un numero qualsiasi di funzioni.

Chiamiamo u_1 , u_2 , u_3 le variabili indipendenti. L' equazione 47) può trascriversi così:

$$\frac{\Phi(u_1)}{u_1-u_2}+\frac{\Phi(u_2)}{u_2-u_1}=\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{\frac{1}{k+u_1}+\frac{1}{k+u_2}}{(k+u_1)(k+u_2)}$$

Si ha pure

$$\frac{\Phi(u_1)}{u_1-u_3}+\frac{\Phi(u_3)}{u_3-u_1}=\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{\frac{1}{k+u_1}+\frac{1}{k+u_3}}{(k+u_1)(k+u_3)}$$

e sottraendo, con qualche riduzione,

$$\frac{\Phi(u_1)}{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}+\frac{\Phi(u_2)}{(u_2-u_1)(u_2-u_3)}+\frac{\Phi(u_3)}{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}$$

$$=-\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{\frac{1}{k+u_1}+\frac{1}{k+u_2}+\frac{1}{k+u_3}}{(k+u_1)(k+u_2)(k+u_3)} \qquad 51)$$

La grande regolarità di procedimento rimane evidente. Si può continuarlo facilmente per u_4, $u_5 \ldots u_n$. Si arriva alla relazione generale seguente:

$$\sum_1^n{}_i \frac{(u_i-u_i)\,\Phi(u_i)}{(u_i-u_1)(u_i-u_2)\ldots(u_i-u_n)}=(-1)^n\sum_0^\infty{}_k (k+1)\frac{\sum_1^n{}_i\frac{1}{k+u_i}}{(k+u_1)(k+u_2)\ldots(k+u_n)} \qquad 52)$$

dove i rappresenta, al solito, un numero d'ordine. La serie infinita a destra diviene convergente per $n=2$ e aumenta di convergenza per maggiori valori di n. La 52), come del resto si vede subito, è applicabile per valori di $n=2$ in su. Si osserverà inoltre, che nel primo membro della equazione sotto la Σ si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma l'indeterminatezza si elimina da sè, perchè il medesimo fattore $u_i-u_i=0$ figura nel numeratore e nel denominatore.

16. La formola 52), molto generale, può dar luogo a casi particolari interessanti. Poniamo

$$u_1=u\,,\ u_2=u+p\,,\ u_3=u+2p\,,\ldots u_n=u+\overline{n-1}\cdot p$$

Considerando che nel secondo membro dell'equazione si ha ([1])

$$\frac{1}{k+u}+\frac{1}{k+u+p}+\cdots\frac{1}{k+u+\overline{n-1}\cdot p}=\frac{1}{p}\,\mathrm{Z}\left\{\left(\frac{k+u}{p}+n\right)-\mathrm{Z}\left(\frac{k+u}{p}\right)\right\}$$

e $\qquad (k+u)(k+u+p)(k+u+2p)\ldots(k+u+\overline{n-1}\cdot p)=(k+u)^{n|p}$

si ha

$$\frac{1}{p^{n-2}}\sum_0^{n-1}{}_i(-1)^i\frac{\Phi(u+ip)}{i!\,(n-i-1)!}=-\sum_0^\infty{}_k (k+1)\cdot\frac{\mathrm{Z}\left(\frac{k+u}{p}+n\right)-\mathrm{Z}\left(\frac{k+u}{p}\right)}{(k+u)^{n|p}} \qquad 53)$$

([1]) Rend. della R. Acc. dei Lincei, anno 1895, pag. 277.

equazione che esprime la somma di una serie infinita, procedente per funzioni Z e facoltà, mediante n funzioni Φ p successive.

Per $p=1$, si hanno funzioni Φ successive e considerando che la facoltà $(k+u)^{n|1}$ si esprime con due funzioni Γ, essendo

$$(k+u)(k+u+1)(k+u+2)\ldots(k+u+n-1)=\frac{\Gamma(k+u+n)}{\Gamma(k+u)}$$

la 53) si trasforma in

$$\sum_0^{n-1}{}_i(-1)^i\frac{\Phi(u+i)}{i!(n-i-1)!}=-\sum_0^{\infty}{}_k(k+1)\frac{Z(k+u+n)-Z(k+u)}{\Gamma(k+u+n)}\Gamma(k+u) \qquad 54)$$

Poniamo, allo scopo di una semplice verifica, $n=2$, considerando che

$$Z(u+2)-Z(u)=\frac{2u+1}{u(u+1)}\,,\quad \Gamma(u+2)=u(u+1)\Gamma(u)$$

$$Z(u+3)-Z(u+1)=\frac{2u+3}{(u+1)(u+2)}\,,\quad \Gamma(u+3)=(u+1)(u+2)\Gamma(u+1)$$

. . . .

$$Z(u+k+2)-Z(u+k)=\frac{2u+2k+1}{(u+k)(u+k+1)}\,,\quad \Gamma(u+k+2)=(u+k)(u+k+1)\Gamma(u+k)$$

sostituendo in 54) si ha

$$\Phi(u+1)-\Phi(u)$$

$$=1\cdot\frac{2u+1}{u^2(u+1)^2}+2\cdot\frac{2u+3}{(u+1)^2(u+2)^2}+\cdots(k+1)\frac{2u+2k+1}{(u+k)^2(u+k+1)^2}+\cdots\text{inf.} \qquad 55)$$

serie identica alla 48), quando in questa si ponga $n=1$.

17. Le funzioni Φ sono finite e continue per tutti i valori finiti e positivi del loro argomento. Applicando il teorema di Taylor, si ha

$$\Phi(p+u)=\Phi(p)+\frac{u}{1}\Phi'(p)+\frac{u^2}{1.2}\Phi''(p)+\cdots\frac{u^k}{k!}\Phi^{(k)}(p)+R \qquad 56)$$

dove $\Phi'(p)$, $\Phi''(p)$, ... $\Phi^{(k)}(p)$ rappresentano le successive derivate di $\Phi(p)$, che entro i limiti qui contemplati rimangono finite e continue; p è una quantità qualsiasi, ma finita e positiva ed R è il residuo della serie dal termine $k+1$ in poi. Vogliamo inoltre supporre la u scelta entro limiti tali che assicurino la convergenza della serie, che può allora rendersi infinita facendo scomparire R.

Ciò posto, scriviamo $p+1$ al posto di p, e sottraendo la 56) da questa nuova equazione avremo

$$\Phi(p+1+u)-\Phi(p+u)=\left\{\Phi(p+1)-\Phi(p)\right\}$$

$$+\frac{u}{1}\left\{\Phi'(p+1)-\Phi'(p)\right\}+\frac{u^2}{1.2}\left\{\Phi''(p+1)-\Phi''(p)\right\}+\cdots\frac{u^k}{k!}\left\{\Phi^{(k)}(p+1)-\Phi^{(k)}(p)\right\}+\cdots\text{inf.}$$

Ma dalla 5) si ha con successive derivazioni

$$\Phi(p+1)-\Phi(p) = 1\,.\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^2}$$

$$\Phi'(p+1)-\Phi'(p) = -1\,.\,2\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^3}$$

. . . .

$$\Phi^{(k)}(p+1)-\Phi^{(k)}(p)=(-1)^k\,(k+1)\,!\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^{k+2}}$$

per cui

$$\Phi(p+1+u) = \Phi(p+u)+1\,.\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^2}$$

$$-2u\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^3}+3u^2\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^4}-\cdots(-1)^k\,(k+1)\,u^k\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(p+n)^{k+2}}+\cdots \quad 57)$$

relazione valevole per tutti quei valori di u, che mantengono convergente la serie. È quindi necessario di determinare tale condizione. Che le Σ, che figurano nei singoli termini, siano valori finiti, non ha bisogno di essere dimostrato. Ommettendo dunque quel fattore nel termine generale, si può dire che indipendentemente dall'alternanza dei segni la convergenza della serie è assicurata, tutte volte che

$$\lim_{k=\infty}\left\{(k+1)^r\,(k+1)\,u^k\right\}=\lim_{k=\infty}\left\{\frac{(k+1)^{r+1}}{\left(\frac{1}{u}\right)^k}\right\}=0$$

dove r è un numero arbitrario superiore a 1. Per $u<1$ questa espressione assume la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Ma basta derivare partitamente tre volte di seguito numeratore e denominatore, si ha

$$(r-1)\,r\,(r+1)\lim_{k=\infty}\left\{\frac{(k+1)^{r-2}}{\left(\frac{1}{u}\right)^k\log^3\left(\frac{1}{u}\right)}\right\}$$

che p. e. per $r=\frac{3}{2}$ diviene $=0$. La serie 57) è quindi convergente per tutti i valori di u compresi fra $-1<u<+1$.

18. Ponendo nella 57) $p=1$ e scrivendo per maggiore brevità $\sum_{0}^{\infty}{}_n\frac{1}{(1+n)^k}=S_k$, questa si trasforma in

$$\Phi(2+u)=\Phi(1+u)+S_2-2u\,S_3+3u^2\,S_4-\cdots(-1)^k(k+1)\,u^k\,S_{k+2}+\cdots\text{inf.} \quad 58)$$

La serie è poco convergente, perchè i valori di $S_2, S_3 \ldots S_k$ sono superiori all'unità e si avvicinano a questa per valori infinitamente crescenti di k. Ma si può renderla più convergente, scrivendo per $S_2, S_3, S_4 \ldots$ rispettivamente S_2-1+1, S_3-1+1, S_4-1+1, ecc. e staccando così la serie in due. Considerando che

$$1-2u+3u^2-4u^3+\cdots(-1)^k\,(k+1)\,u^k+\cdots=\frac{1}{(1+u)^2}$$

la 58) si trasforma nella serie già molto più convergente

$$\Phi(2+u)=\Phi(1+u)+\frac{1}{(1+u)^2}$$

$$+(S_2-1)-2u(S_3-1)+3u^2(S_4-1)-\cdots(-1)^k(k+1)u^k(S_{k+2}-1)+\cdots\text{inf.} \quad 59)$$

Questo medesimo procedimento, di separare cioè dalle S altri termini, sommandoli a parte, può essere continuato. Si ottengono serie sempre più e più convergenti e ponendo in generale

$$S_k^{(n)} = \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+2)^k} + \frac{1}{(n+3)^k} + \cdots \text{inf.}$$

dove n è un numero positivo e intero, si ha la relazione

$$\Phi(2+u) = \Phi(1+u)$$

$$+\left\{\frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{(2+u)^2} + \cdots \frac{1}{(n+u)^2}\right\} + S_2^{(n)} - 2u\, S_3^{(n)} + 3u^2 S_4^{(n)} - \cdots \text{inf.} \qquad 60)$$

la quale, per $n = \infty$, ritorna alla equazione fondamentale 5).

Ponendo nella 58) $u = 0$, si ha

$$\Phi(2) = \Phi(1) + S_2 = -A + \frac{\pi^2}{6}$$

Se poniamo invece nella 57) $p + u = 1$, dove u rimane vincolato alla condizione di essere < 1, abbiamo una seconda relazione per $\Phi(2)$, la quale confrontata colla prima, porta alla espressione

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_0^\infty{}_k (-1)^k (k+1)\, u^k \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{(n-u)^{k+2}} \qquad 61)$$

serie molto rimarchevole, perchè dà il valore di π^2 mediante una quantità arbitraria $u < 1$. La serie è poco convergente; ma considerando che

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{(n-u)^{k+2}} = \frac{1}{(1-u)^{k+2}} + \sum_2^\infty{}_n \frac{1}{(n-u)^{k+2}} \quad \text{e che} \quad \sum_0^\infty{}_k (-1)^k u^k \frac{k+1}{(1-u)^{k+2}} = 1$$

si ha

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_0^\infty{}_k (\mp 1)^k (k+1)\, u^k \sum_2^\infty{}_n \frac{1}{(n \mp u)^{k+2}} \qquad 62)$$

serie già più convergente e che col medesimo procedimento si può rendere anche più convergente, e dove il doppio segno $\mp$ si riferisce al caso di u positivo o negativo.

19. Ritorniamo alla 58) e poniamo, secondo note relazioni

$$\begin{array}{llll}
S_2 = \pi^2 \cdot \frac{1}{b_1} & , & S_3 = \pi^3 \cdot \frac{1}{b_2} \\
S_4 = \pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{b_3} & , & S_5 = \pi^3 \cdot \frac{\pi^2}{b_4} \\
S_6 = \pi^2 \cdot \frac{\pi^4}{b_5} & , & S_7 = \pi^3 \cdot \frac{\pi^4}{b_6} \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
S_{2k+2} = \pi^2 \cdot \frac{\pi^{2k}}{b_{2k+1}} & , & S_{2k+3} = \pi^3 \cdot \frac{\pi^{2k}}{b_{2k+2}}
\end{array}$$

dove $b_1, b_2 \ldots$ rappresentano numeri determinati, e cioè

$$b_1 = 6 \quad , \quad b_2 = 25{,}7946\ldots$$
$$b_3 = 90 \quad , \quad b_4 = 295{,}1215\ldots$$
$$b_5 = 945 \quad , \quad b_6 = 2295{,}286\ldots.$$

razionali i primi coll'indice dispari, irrazionali i secondi dall'indice pari. Sostituendo

$$\Phi(2+u) - \Phi(1+u) = \pi^2 \sum_0^\infty {}_k (2k+1) \frac{(u\pi)^{2k}}{b_{2k+1}} - 2u\pi^3 \sum_0^\infty {}_k (k+1) \frac{(u\pi)^{2k}}{b_{2k+2}} \tag{63}$$

da cui, ponendo $-u$ al posto di u e sommando

$$\Phi(2+u) + \Phi(2-u) - \Phi(1+u) - \Phi(1-u) = 2\pi^2 \sum_0^\infty {}_k (2k+1) \frac{(u\pi)^{2k}}{b_{2k+1}} \tag{64}$$

In questa equazione figurano soltanto le b dall'indice dispari, per le quali esiste una relazione coi numeri *bernoulliani*. Chiamando questi ultimi $B_1, B_3, \ldots B_{2k+1}$ si ha

$$\frac{1}{b_{2k+1}} = \frac{2^{2k+1} B_{2k+1}}{(2k+2)!}$$

per cui la 64) diviene

$$\Phi(2+u) + \Phi(2-u) = \Phi(1+u) + \Phi(1-u) + 2\pi^2 \sum_0^\infty {}_k \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2u\pi)^{2k}}{(2k)!} B_{2k+1} \tag{65}$$

relazione che per il caso speciale di $u = \frac{1}{2}$ si trasforma in

$$\Phi\left(\frac{5}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi^2 \sum_0^\infty {}_k \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k+1} \tag{66}$$

Finalmente, scrivendo $\frac{u}{2\pi}$ per u, la 65) assume anche la forma

$$\Phi\left(2+\frac{u}{2\pi}\right) + \Phi\left(2-\frac{u}{2\pi}\right)$$
$$= \Phi\left(1+\frac{u}{2\pi}\right) + \Phi\left(1-\frac{u}{2\pi}\right) + 2\pi^2 \sum_0^\infty {}_k \frac{1}{k+1} \cdot \frac{u^{2k}}{(2k)!} B_{2k+1} \tag{67}$$

essendo $u < 2\pi$.

20. L'equazione 60) acquista un'importanza speciale dal fatto, che essa si presta bene al calcolo numerico di $\Phi(2+u)$, ogni qual volta si conosca il valore corrispondente di $\Phi(1+u)$. L'abbiamo dedotta dalla serie di Taylor, ma vi si arriva anche direttamente. A tale scopo ritorniamo alla espressione tipica 5), valevole per tutti i valori reali positivi di u; poniamo in essa $1+u$ al posto di u, con cui l'espressione vale per tutti i valori reali positivi di $1+u$, e scindiamo la Σ ivi apparente in due, una che va da $k=1$ fino a $k=n$, l'altra da $k=n+1$ fino a $k=\infty$. Abbiamo

$$\Phi(2+u) = \Phi(1+u) + \sum_1^n {}_k \frac{1}{(k+u)^2} + \sum_{n+1}^\infty {}_k \frac{1}{(k+u)^2} \tag{68}$$

dove n rappresenta un numero positivo e intero. Considerando che

$$\frac{1}{(k+u)^2} = \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{u}{k}\right)^{-2} = \frac{1}{k^2} - \frac{2u}{k^3} + \cdots (-1)^r \frac{(r+1)u^r}{k^{r+2}} + \cdots \text{inf.}$$

sviluppo sempre consentito, purchè $\frac{u}{k} < 1$, si può applicarlo alla seconda delle Σ in 68) e ponendo, come al num. 18,

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2} = S_2^{(n)} \quad , \quad \sum_{n+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^3} = S_3^{(n)} \quad , \ldots \sum_{n+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^r} = S_r^{(n)}$$

si ha la relazione

$$\Phi(2+u) = \Phi(1+u) \quad + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{1}{(k+u)^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_r (-1)^r (r+1) u^r S_{r+2}^{(n)} \tag{69}$$

dove la serie infinita rimane convergente entro i limiti, più ristretti, di $-1 < u < +1$.

La 69) coincide colla 60) e scrivendovi $-u$ al posto di u, si ha pure

$$\Phi(2-u) = \Phi(1-u) \quad + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{1}{(k-u)^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_r (r+1) u^r S_{r+2}^{(n)} \tag{70}$$

equazioni molto comode per calcoli numerici.

Scrivendo nella 68) $2+u, \ldots m-1+u$ al posto di u, m essendo un numero intero, e procedendo col medesimo sviluppo or ora adoperato, si ha

$$\Phi(3+u) = \Phi(2+u) \quad + \sum_{2}^{n}{}_k \frac{1}{(k+u)^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_r (-1)^r (r+1) u^r S_{r+2}^{(n)}$$

. . . .

$$\Phi(m+u) = \Phi(m-1+u) + \sum_{m-1}^{n}{}_k \frac{1}{(k+u)^2} + \sum_{0}^{\infty}{}_r (-1)^r (r+1) u^r S_{r+2}^{(n)}$$

e sommando queste equazioni, compresa la 69), equazioni che in fondo non sono altro che una conseguenza del trinomio caratteristico delle funzioni Φ successive, si ha

$$\Phi(m+u) = \Phi(1+u)$$
$$+ \sum_{1}^{m-1}{}_k \frac{k}{(k+u)^2} + (m-1) \sum_{m}^{n}{}_k \frac{1}{(k+u)^2} + (m-1) \sum_{0}^{\infty}{}_r (-1)^r (r+1) u^r S_{r+2}^{(n)} \tag{71}$$

relazione più generale, che per $-u$ al posto di u si trasforma in

$$\Phi(m-u) = \Phi(1-u)$$
$$+ \sum_{1}^{m-1}{}_k \frac{k}{(k-u)^2} + (m-1) \sum_{m}^{n}{}_k \frac{1}{(k-u)^2} + (m-1) \sum_{0}^{\infty}{}_r (r+1) u^r S_{r+2}^{(n)} \tag{72}$$

e per il caso speciale di $m = 2$ ritorna alla 69).

Ponendovi inoltre $u = 0$, si ritrova la nota relazione

$$\Phi(2) = \Phi(1) + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{1}{k^2} + \sum_{n+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2} = -A + \frac{\pi^2}{6}$$

PARTE SECONDA

Le funzioni Φ con argomento negativo e complesso.

1. Nelle dimostrazioni precedenti abbiamo cercato le proprietà delle funzioni Φ per valori positivi del loro argomento. Le relazioni fin qui trovate devono quindi considerarsi, per ora, valevoli solo per questi.

Sorge ora la questione che significato acquistino tali funzioni, quando al loro argomento positivo si sostituisca uno negativo od anche complesso. Supponiamo un piano indefinito, e tiriamo su di lui due assi ortogonali. Le ascisse u e le ordinate v dei diversi punti di questo piano sono variabili indipendenti e si tratta di definire la loro funzione $\Phi(u+v\sqrt{-1})$.

Seguiremo anche in questo studio il metodo fin qui adoperato, di partire dal caso semplice per arrivare al caso generale.

2. Incominciamo dagli argomenti negativi. Sia

$$\Phi(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{u^2} + \frac{2}{(u+1)^2} + \cdots \frac{n}{(u+n-1)^2} + \frac{n+1}{(u+n)^2} + \frac{n+2}{(u+n+1)^2} + \cdots \frac{k+1}{(u+k)^2} \right] \right\}$$

dove n rappresenta un numero finito, positivo e intero e k, al solito, un numero d'ordine che va da 0 a ∞. La serie, come è noto, è divergente; ma la sua somma, infinita, sottratta dal valore di $\log k$, pure infinito, si avvicina per valori sempre più grandi e più grandi di k, indefinitamente al valore di $\Phi(u)$. In altri termini, questa funzione è espressa nella forma soltanto apparentemente indeterminata di

$$\Phi(u) = +\infty - \infty$$

ma ha un valore finito.

Noi vogliamo ora esaminare, cosa divenga tale funzione per valori negativi di u. È evidente che, tutte volte che $u = 0, -1, -2, \cdots -(n-1), -n, -(n+1)$ ecc. uno dei termini della serie prende la forma ∞^2, e quindi

$$\Phi(u) = +\infty - \infty^2 - \infty = -\infty^2 \quad .$$

La funzione Φ, per tutti i valori negativi e interi del suo argomento, compreso lo zero, ha quindi un valore $-\infty^2$. Resta ora a vedersi, che valore assuma, quando il suo argomento è bensì negativo, ma non intero. A tal fine poniamo

$$u = \omega - n$$

dove per n intendiamo un numero intero, essenzialmente positivo, per ω una frazione positiva qualsiasi. È chiaro che tutte volte noi supponiamo $n > \omega$, la variabile u

prende un valore negativo, ed è precisamente questo il caso che vogliamo contemplare. Per sostituire questo valore nella serie più sopra, vogliamo considerare questa come formata di due porzioni: la prima, finita, che va dal primo fino al termine $\frac{n}{(u+n-1)^2}$; la seconda che va dal termine $\frac{n+1}{(u+n)^2}$ sino all'infinito, vogliamo considerarla come una serie a sè e contare a parte il suo numero d'ordine k; il che significa che sostituiamo nel numeratore del termine generale $n+k$ al semplice k. Abbiamo così:

$$\Phi(\omega-n)=\lim_{k=\infty}\Big\{\log k$$

$$-\Big[\frac{1}{(n-\omega)^2}+\frac{2}{(n-1-\omega)^2}+\cdots\frac{n}{(1-\omega)^2}\Big]-\Big[\frac{n+1}{\omega^2}+\frac{n+2}{(\omega+1)^2}+\cdots\frac{n+k+1}{(\omega+k)^2}\Big]\Big\}$$

La seconda delle due serie a destra, la infinita, si può di nuovo scindere in due, nel modo seguente:

$$\Big[\frac{n}{\omega^2}+\frac{n}{(\omega+1)^2}+\cdots\frac{n}{(\omega+k)^2}\Big]+\Big[\frac{1}{\omega^2}+\frac{2}{(\omega+1)^2}+\cdots\frac{k+1}{(\omega+k)^2}\Big]$$

per cui la nostra espressione prende la forma

$$\Phi(\omega-n)=\lim_{k=\infty}\Big\{\log k-\sum_0^k{}_h\frac{h+1}{(\omega+h)^2}\Big\}-n\sum_0^\infty{}_k\frac{1}{(\omega+k)^2}-\sum_0^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(n-k-\omega)^2}$$

considerando che

$$\lim_{k=\infty}\Big\{\log k-\sum_0^k{}_h\frac{h+1}{(\omega+h)^2}\Big\}=\Phi(\omega)$$

$$\sum_0^\infty{}_k\frac{1}{(\omega+k)^2}=\Phi(\omega+1)-\Phi(\omega)$$

come pure, che scrivendo k per $n-k$ e mutando i limiti in conseguenza

$$\sum_0^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(n-k-\omega)^2}=\sum_1^n{}_k\frac{n-k+1}{(k-\omega)^2}$$

si arriva alla seguente relazione:

$$\Phi(\omega-n)-(n+1)\,\Phi(\omega)+n\,\Phi(\omega+1)=-\sum_1^n{}_k\frac{n-k+1}{(k-\omega)^2} \qquad 1)$$

formola analoga alla 9_3) parte I., ma nella quale la funzione con argomento decisamente negativo $\Phi(\omega-n)$ si trova espressa mediante due funzioni con argomenti decisamente positivi e una serie finita. La funzione $\Phi(\omega-n)$ è quindi perfettamente definita e può essere anche calcolata mediante la 1). Così, ponendo successivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$, si ha

$$\begin{aligned}\Phi(\omega-1)-2\,\Phi(\omega)+\Phi(\omega+1)&=-\frac{1}{(1-\omega)^2}\\ \Phi(\omega-2)-3\,\Phi(\omega)+2\Phi(\omega+1)&=-\frac{2}{(1-\omega)^2}-\frac{1}{(2-\omega)^2} \qquad 2)\\ \Phi(\omega-3)-4\,\Phi(\omega)+3\Phi(\omega+1)&=-\frac{3}{(1-\omega)^2}-\frac{2}{(2-\omega)^2}-\frac{1}{(3-\omega)^2}\end{aligned}$$

e per il caso speciale di $\omega = \frac{1}{2}$

$$\Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi\left(\frac{3}{2}\right) = -4 \qquad \text{ossia } \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = -13{,}365\,7133$$

$$\Phi\left(-\frac{3}{2}\right) - 3\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\,\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = -8 - \frac{4}{9} \qquad \text{»} \quad \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = -22{,}744\,9599 \quad 3)$$

$$\Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - 4\,\Phi\left(\frac{1}{2}\right) + 3\,\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = -12 - \frac{8}{9} - \frac{4}{25} \qquad \text{»} \quad \Phi\left(-\frac{5}{2}\right) = -32{,}284\,2066$$

3. Negli esempi numerici 3) abbiamo supposto ω una frazione pura, per arrivare anche per $n = 1$ ad argomenti negativi. Ma le equazioni 1) e 2) valgono per qualsiasi valore non intero di ω. Se poniamo, per esempio nelle 2) $\omega = \frac{3}{2}$, si hanno le relazioni

$$\Phi\left(+\frac{1}{2}\right) - 2\,\Phi\left(\frac{3}{2}\right) + \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = -4 \qquad \text{equazione già nota}$$

$$\Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\,\Phi\left(\frac{3}{2}\right) + 2\,\Phi\left(\frac{5}{2}\right) = -8 - 4 \qquad \text{da cui } \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = -13{,}365\,7133 \quad 4)$$

$$\Phi\left(-\frac{3}{2}\right) - 4\,\Phi\left(\frac{3}{2}\right) + 2\,\Phi\left(\frac{5}{2}\right) = -12 - 8 - \frac{4}{9} \qquad \text{»} \quad \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = -22{,}744\,9599$$

come sopra. Ho citato questi esempj numerici, per mostrare come a varie riprese appare il trinomio caratteristico (parte I. form. 8) delle funzioni Φ successive, espresso colla formola

$$\Phi(u) - 2\,\Phi(1+u) + \Phi(2+u) = -\frac{1}{u^2} \qquad 5)$$

Se noi scriviamo in essa $-u$ per u, il secondo membro rimane intatto e quindi si ha pure

$$\Phi(-u) - 2\,\Phi(1-u) + \Phi(2-u) = -\frac{1}{u^2}$$

e difatti questa formola si verifica nella prima delle 2) e delle 3) fra una funzione ad argomento negativo e due con argomento positivo. E nella 3) i tre valori soddisfano pure alla condizione

$$\Phi\left(-\frac{5}{2}\right) - 2\,\Phi\left(-\frac{3}{2}\right) + \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$

Difatti si può facilmente accertarsi che, coi valori del numero precedente, il primo membro della equazione equivale a . . . . $-0{,}160\,0001$
mentre dal secondo si ha . . . . $-0{,}160\,0000$

Ne segue che il trinomio delle funzioni Φ successive 5) è ugualmente applicabile alle funzioni Φ con argomento positivo o negativo. Ma questa formola è soltanto un caso speciale di un'altra molto più generale, che riguarda le funzioni $n$successive. Svolta alla parte I. 11) essa è la seguente

$$\Phi(u) - 2\,\Phi(u+n) + \Phi(u+2n) = -\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} - \sum_{n}^{2n-1}{}_k \frac{2n-k-1}{(u+k)^2} \qquad 6)$$

Sorge ora la questione, se anche a questa relazione siano applicabili argomenti negativi. A tale scopo poniamo nella 1) $2n$ al posto di n e scriviamo poi la 1) multiplicata per 2; abbiamo, scindendo la prima somma Σ in due

$$\Phi(\omega-2n)-(2n+1)\Phi(\omega)+2n\Phi(\omega+1)=-\sum_{1}^{n}{}_k\frac{2n-k+1}{(k-\omega)^2}-\sum_{n+1}^{2n}{}_k\frac{2n-k+1}{(k-\omega)^2}$$

$$2\Phi(\omega-n)-(2n+2)\Phi(\omega)+2n\Phi(\omega+1)=-\sum_{1}^{n}{}_k\frac{2n-2k+2}{(k-\omega)^2}$$

e sottraendo

$$\Phi(\omega-2n)-2\Phi(\omega-n)+\Phi(\omega)\qquad=-\sum_{1}^{n}{}_k\frac{k-1}{(k-\omega)^2}-\sum_{n+1}^{2n}{}_k\frac{2n-k+1}{(k-\omega)^2}\quad 7)$$

A questa medesima formola si arriva direttamente dalla 6), ponendo in essa

$$u=\omega-2n\,,\quad u+n=\omega-n\,,\quad u+2n=\omega$$

si ha

$$\Phi(\omega-2n)-2\Phi(\omega-n)+\Phi(\omega)=-\sum_{0}^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(\omega-2n+k)^2}-\sum_{n}^{2n-1}{}_k\frac{2n-k-1}{(\omega-2n+k)^2}\quad 8)$$

Il primo membro, nelle 7) e 8), è lo stesso: è facile dimostrare che anche le espressioni a destra sono identiche. Basta, a ciò, portare i rispettivi denominatori a ugual forma, ponendo nella 8) k per $2n-k$ e mutando in conseguenza i limiti delle somme. I due termini in 8) prendono quindi la forma

$$-\sum_{2n}^{n+1}{}_k\frac{2n-k+1}{(\omega-k)^2}-\sum_{n}^{1}\frac{k-1}{(\omega-k)^2}$$

forma evidentemente identica a quella in 7), perchè è sempre lecito rovesciare l'ordine nelle sommazioni. Arriviamo quindi alla stessa formola, sia per considerazioni dirette, come in 7), sia per una generalizzazione della formola 6). Ora giova avvertire, che in ambedue i procedimenti abbiamo fatto la sola supposizione, che ω sia un numero positivo non intero, e che n sia un numero intero. Ne segue, che possiamo scegliere n in modo che tanto $\omega-2n$, quanto $\omega-n$ siano valori negativi. Resta il caso che si voglia anche ω negativo. Basta in tale caso scrivere nella 7) $\omega-n$ al posto di ω e di supporre $n>\omega$. La 7) si trasforma facilmente in

$$\Phi(\omega-3n)-2\Phi(\omega-2n)+\Phi(\omega-n)=-\sum_{n+1}^{2n}{}_k\frac{k-n-1}{(k-\omega)^2}-\sum_{2n+1}^{3n}{}_k\frac{3n-k+1}{(k-\omega)^2}\quad 9)$$

e al medesimo risultato si arriva partendo dalla 6), sostituendo

$$u=\omega-3n\,,\quad u+n=\omega-2n\,,\quad u+2n=\omega-n$$

portando poi il denominatore alla forma $(k-\omega)^2$ e modificando in conformità i limiti corrispondenti. Arriviamo quindi alla conclusione, che *la formola per il trinomio delle funzioni n successive*, quale risulta dalla 6), *è ugualmente applicabile, sia che gli argomenti delle tre funzioni Φ siano tutti positivi, o che siano in parte positivi, in parte negativi, o che infine siano tutti e tre negativi.* Ne segue che tra le funzioni Φ con argomento positivo e quello con argomento negativo sussiste una certa continuità, che è interrotta soltanto per i punti singoli che corrispondono a valori interi e negativi della variabile indipendente.

4. Il trinomio caratteristico delle funzioni Φ n successive può dunque essere sempre espresso mediante una serie finita algebrica, tanto quando si tratti di funzioni con argomento positivo, quanto quando si tratti di argomenti negativi. In questo secondo caso però abbiamo supposto, che nella formola 7) ω rappresenti un numero non intero. Ma la formola 7) conduce a risultati esatti, anche quando ω sia un numero intero. Per persuadersene basta consultare il secondo membro dell'equazione in 7), che contiene due serie algebriche finite; la prima che va da $k=1$ fino a $k=n$; la seconda in continuazione della prima, che va da $k=n+1$ fino a $k=2n$. Ne segue, che o nella prima o nella seconda serie vi dovrà essere un termine, per il quale $k=\omega$, ω essendo ora un numero intero che deve essere $<2n$, affinchè almeno una delle funzioni Φ risulti con argomento negativo. Questo termine dà a tutto il trinomio il valore di $-\infty^2$. Il primo membro della equazione 7) contiene due termini

$$\Phi(\omega-2n)-2\,\Phi(\omega-n)$$

che possono essere, a seconda dei casi, o tutti e due, o uno soltanto, con argomento negativo. Può sorprendere che tanto un termine solo, quanto la differenza dei due termini, debba essere ugualmente un infinito di secondo grado. Per rendersene ragione, basta ritornare alla relazione 1) che ha servito di punto di partenza per dedurne la 7). In quella due termini del trinomio hanno argomento positivo e rappresentano quindi un valore finito. Ommettendo questi termini per brevità e svolgendo la serie nella parte che ci interessa, abbiamo

$$\Phi(\omega-n)=-\left\{\frac{n}{(1-\omega)^2}+\frac{n-1}{(2-\omega)^2}+\ldots\frac{n-i+1}{(i-\omega)^2}+\ldots\right\}$$

dove i rappresenta un numero intero, minore o tutt'al più uguale a n. Ponendo ora $2n$ per n, abbiamo

$$\Phi(\omega-2n)=-\left\{\frac{2n}{(1-\omega)^2}+\frac{2n-1}{(2-\omega)^2}+\ldots\frac{2n-i+1}{(i-\omega)^2}+\ldots\right\}$$

Ambedue le serie rappresentano valori finiti, per tutti i termini, tranne uno. Per cui, sottraendo dalla seconda equazione la prima raddoppiata, e trascurando tutti i termini finiti, tranne quello che contiene $i-\omega$ nel denominatore, abbiamo

$$\Phi(\omega-2n)-2\,\Phi(\omega-n)=-\frac{i-1}{(i-\omega)^2}\ \cdots$$

il quale termine, per $\omega=i$ prende il valore $-\infty^2$.

Ne segue che la 7) conduce sempre a risultati esatti, e che non occorre quindi più mantenere la restrizione che ω sia un numero non intero. La formola 7) e quindi anche la 6) valgono senza alcuna restrizione.

5. Le considerazioni dei numeri precedenti possono essere allargate e ci permettono di trattare un problema più generale. La formola 6) contiene l'espressione, in forma algebrica, per il trinomio caratteristico delle funzioni Φ, dove n rappresenta un numero intero. Ma quando n non fosse un numero intero, vale a dire, quando fra gli argomenti delle tre funzioni sussiste bensì una costante differenza, ma non espri-

mibile con un numero intero, il trinomio caratteristico non può essere espresso altrimenti che con una serie infinita convergente. Nella parte I. formola 42) ne abbiamo dato la relazione, che può trascriversi così

$$\Phi(u-v)-2\,\Phi(u)+\Phi(u+v)=-2v^2\sum_0^\infty{}_k\,(k+1)\cdot\frac{3(k+u)^2-v^2}{(k+u-v)^2(k+u)^2(k+u+v)^2}\quad 10)$$

nella quale abbiamo supposto che u sia positivo e $v<u$. Per sapere cosa divenga la relazione, quando queste due condizioni non siano soddisfatte, basta esaminare partitamente i due membri della equazione. Poniamo prima $v>u$, la funzione $\Phi(u-v)$ acquista argomento negativo, ma la serie a destra procede regolarmente. Nell'interno del fattore $(k+u-v)^2$ avverrà un invertimento di segno quando k sia $>u-v$, ma il quadrato lo copre. Nel caso speciale che $u-v=-i$, dove i è un numero intero, vi sarà un termine che diviene infinito negativo di 2° grado, e lo stesso avviene per la funzione $\Phi(u-v)$. Uguali considerazioni valgono anche per u. Scrivendo $-u$ al posto di u, abbiamo nella serie a destra un fattore $(k-u)^2$, nel quale avverrà un cambiamento di segno quando k passa da $<u$ a $>u$; ma il quadrato lo copre, e nel caso speciale di $k=u$, cioè quando u fosse un numero intero, si va all'infinito negativo di 2° grado da ambedue le parti. Tenendo conto di queste considerazioni, possiamo quindi concludere che la relazione 10) sussiste sempre per qualsiasi valore positivo o negativo di u e di v.

Alla stessa conclusione si arriva per la formola 43) (Parte I.) che è una conseguenza della precedente. Merita poi una particolare menzione la 47) che contiene in sè la più semplice relazione tra due funzioni $\Phi(u)$ e $\Phi(v)$, per la quale si trova facilmente che essa vale anche per $\Phi(-u)$ e $\Phi(-v)$. Ponendo in essa $v=-u$. si ha la relazione elegante

$$\Phi(u)-\Phi(-u)$$
$$=4u\left\{\frac{1.2}{(1-u)^2(1+u)^2}+\frac{2.3}{(2-u)^2(2+u)^2}+\frac{3.4}{(3-u)^2(3+u)^2}+\cdots\frac{k(k+1)}{(k-u)^2(k+u)^2}+\cdots\right\}\quad 11)$$

6. Simili sviluppi in serie si eseguono con grande facilità. Alle formole della parte I. si possono contrapporre altrettante per valori negativi delle variabili indipendenti. A titolo di esempio prendiamo la 44), la quale coll'avvertenza ivi fatta prende per valori negativi di u la forma

$$\frac{1}{2n^2}\sum_0^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(k-u)^2}+\frac{1}{2n^2}\sum_n^{2n-1}{}_k\frac{2n-k-1}{(k-u)^2}$$
$$=\sum_0^\infty{}_k(k+1\cdot)\frac{3(k+n-u)^2-n^2}{(k-u)^2\,(k+n-u)^2\,(k+2n-u)^2}\quad 12)$$

dalla quale si deducono formole analoghe alle 45), dove soltanto si trovi $-u$ al posto di u. Non occorre forse aggiungere che valgono non solo per valori frazionari, ma anche per valori interi di u. Quando questi non superino il valore di $2n-2$, si ha l'infinito a destra e a sinistra dell'equazione e quindi la tautologia

$$\infty^2=\infty^2$$

Quando invece il valore di u sia superiore a $2n-2$, compajono a destra tre termini infiniti, con segno diverso, che riuniti insieme perdono il carattere di infinito. Si hanno quindi valori finiti a destra e a sinistra.

7. Sia $u+v\sqrt{-1}$ una quantità complessa, in cui u e v sono valori reali e finiti, d'altronde completamente arbitrari. Poniamo

$$\Phi(u+v\sqrt{-1})=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h(h+1)\left[\frac{1}{u+h+v\sqrt{-1}}\right]^2\right\}$$

Considerando che in termine generale

$$\left[\frac{1}{u+k+v\sqrt{-1}}\right]^2=\frac{(u+k)^2-v^2}{[(u+k)^2+v^2]^2}-2v\sqrt{-1}\frac{u+k}{[(u+k)^2+v^2]^2}$$

si ha

$$\Phi(u+v\sqrt{-1})$$

$$=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h(h+1)\frac{(u+h)^2-v^2}{[(u+h)^2+v^2]^2}+2v\sqrt{-1}\sum_0^k{}_h(h+1)\frac{u+h}{[(u+h)^2+v^2]^2}\right\} \qquad 13)$$

Delle due serie infinite che costituiscono questa relazione, la prima è divergente, la seconda convergente per tutti i valori che u e v possono assumere. Ma è facile una trasformazione colla quale l'indeterminatezza esistente nella formola sotto forma di $\infty-\infty$ viene tolta. Basta porre l'identità

$$\frac{(u+k)^2-v^2}{[(u+k)^2+v^2]^2}=\frac{1}{(u+k)^2}-v^2\cdot\frac{3(u+k)^2+v^2}{(u+k)^2[(u+k)^2+v^2]^2}$$

per cui, sostituendo e rammentando che

$$\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h(h+1)\frac{1}{(u+h)^2}\right\}=\Phi(u)$$

si ha

$$\Phi(u+v\sqrt{-1})=\Phi(u)$$

$$+v^2\sum_0^\infty{}_k(k+1)\frac{3(u+k)^2+v^2}{(u+k)^2[(u+k)^2+v^2]^2}+2v\sqrt{-1}\sum_0^\infty{}_k(k+1)\frac{u+k}{[(u+k)^2+v^2]^2} \qquad 14)$$

Le due serie sono ora tutte e due convergenti e la funzione $\Phi(u+v\sqrt{-1})$ appare formata di due termini reali, uno immaginario. Poniamo

$$\begin{aligned}\psi_1(u,v)&=v^2\sum_0^\infty{}_k(k+1)\frac{3(u+k)^2+v^2}{(u+k)^2[(u+k)^2+v^2]^2},\\ \psi_2(u,v)&=2v\sum_0^\infty{}_k(k+1)\frac{u+k}{[(u+k)^2+v^2]^2}\end{aligned} \qquad 15)$$

dove $\psi_1(u,v)$ e $\psi_2(u,v)$ sono funzioni ausiliarie, reali di u e v, definite dalle serie convergenti in 15). È facile riconoscere che

$$\psi_1(u,-v)=\psi_1(u,v)\quad,\quad\psi_2(u,-v)=-\psi_2(u,v) \qquad 16)$$

per cui si hanno le espressioni

$$\begin{aligned}\Phi(u+v\sqrt{-1})&=\Phi(u)+\psi_1(u,v)+\sqrt{-1}\,.\,\psi_2(u,v)\\ \Phi(u-v\sqrt{-1})&=\Phi(u)+\psi_1(u,v)-\sqrt{-1}\,.\,\psi_2(u,v)\end{aligned} \qquad 17)$$

ed anche
$$\frac{1}{2}\,\Phi(u+v\sqrt{-1})+\frac{1}{2}\,\Phi(u-v\sqrt{-1})=\Phi(u)+\psi_1(u,v)$$
$$\frac{1}{2}\,\Phi(u+v\sqrt{-1})-\frac{1}{2}\,\Phi(u-v\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\;\psi_2(u,v) \qquad 18)$$

Si osserverà la grande rassomiglianza che hanno le serie in 42) e 46) parte I. colle rispettive in 15). Basta porre in quelle $v\sqrt{-1}$ al posto di v, perchè si trasformino in queste. Ciò posto, le equazioni 42) e 46) si possono anche scrivere così
$$\frac{1}{2}\,\Phi(u+v)+\frac{1}{2}\,\Phi(u-v)=\Phi(u)+\psi_1(u,v\sqrt{-1})$$
$$\frac{1}{2}\,\Phi(u+v)-\frac{1}{2}\,\Phi(u-v)=-\sqrt{-1}\;\psi_2(u,v\sqrt{-1}) \qquad 19)$$
formole che sono in certo qual modo il rovesciamento delle 18).

8. Dalle formole 16), 17), 18), 19) risulta che le funzioni $\Phi(u)$ e $\psi_1(u,v)$ sono sempre riunite. Poniamo dunque
$$\psi(u,v)=\Phi(u)+\psi_1(u,v)$$
e scrivendo le loro rispettive espressioni, abbiamo
$$\psi(u,v)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h\frac{h+1}{(u+h)^2}\right\}+v^2\sum_0^\infty{}_k(k+1)\frac{3(u+k)^2+v^2}{(u+k)^2[(u+k)^2+v^2]^2}$$
Chiamando con n un numero intero e positivo, è facile vedere che nell'una e nell'altra serie vi deve essere un termine, il quale per $u=-n$, va all'infinito, perchè nell'una e nell'altra figura nel denominatore il fattore $u+k$, il quale per $u=-n$ e $k=n$ va a zero. L'espressione assume quindi la forma indeterminata $-\infty^2+\infty^2$. Per conoscerne il valore, vogliamo togliere fuori dalle rispettive serie quel termine, il quale è della forma
$$(n+1)\frac{3(k-n)^2v^2+v^4}{(k-n)^2[(k-n)^2+v^2]^2}-\frac{n+1}{(k-n)^2}=(n+1)\frac{v^2-(k-n)^2}{[v^2+(k-n)^2]^2}$$
termine che per $k=n$ prende il valore $\frac{n+1}{v^2}$.

Coll'aver tolto fuori da ciascuna delle due serie sopra indicate un termine corrispondente al posto $k=n$, queste furono scisse in due porzioni: una, finita, che va da $k=0$ a $k=n-1$, l'altra, infinita, che saltando un termine, prosegue da $k=n+1$ fino a $k=\infty$. Ponendo in esse $u=-n$, possiamo indicare questo salto e scrivere
$$\psi(-n,v)=\frac{n+1}{v^2}$$
$$+\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_{0,n+1}^{n-1,k}{}_h\frac{h+1}{(n-h)^2}\right\}+v^2\sum_{0,n+1}^{n-1,\infty}{}_k(k+1)\frac{3(n-k)^2+v^2}{(n-k)^2[(n-k)^2+v^2]^2}$$
e considerando che si può operare la seguente tripartizione
$$\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_{0,n+1}^{n-1,k}{}_h\frac{h+1}{(n-h)^2}\right\}$$
$$=-\sum_1^n{}_k\frac{n-k+1}{k^2}-(n+1)\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k^2}+\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_1^k{}_h\frac{1}{h}\right\}$$

per cui questa espressione acquista, per note formole, una forma bene definita, si ha

$$\psi(-n,v)=-A$$

$$-(n+1)\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{v^2}\right)-\sum_{1}^{n}{}_k\frac{n-k+1}{k^2}+v^2\sum_{0,n+1}^{n-1,\infty}{}_k(k+1)\frac{3(n-k)^2+v^2}{(n-k)^2[(n-k)^2+v^2]^2} \qquad 20)$$

equazione, in cui ogni indeterminatezza è tolta.

La relazione 20) vale non solo per valori di n interi, ma anche per valori frazionari. Per $v=0$ si ha

$$\psi(-n,o)=+\infty^2$$

Questo è il solo valore finito di v, che mandi all'infinito questa funzione. Per $n=0$, si ha

$$\psi(o,v)=-A-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{v^2}+v^2\sum_{1}^{\infty}{}_k(k+1)\frac{3k^2+v^2}{k^2(k^2+v^2)^2} \qquad 21)$$

9. Poniamo per brevità

$$U_k=\frac{3(u+k)^2+v^2}{(u+k)^2[(u+k)^2+v^2]^2} \qquad 22)$$

l'espressione 15) può scindersi nel modo seguente

$$\psi_1(u,v)=v^2\sum_{0}^{n-1}{}_k(k+1)\,U_k+v^2\sum_{n}^{2n-1}{}_k(k+1)\,U_k+v^2\sum_{2n}^{\infty}(k+1)\,U_k$$

Scriviamo in questa per u successivamente $u+n$, $u+2n$, e rispettivamente $k-n$, $k-2n$ al luogo di k e spostiamo i termini successivamente, riunendoli in modo da avere sulla stessa verticale gli stessi valori di U_k, si ha

$$\psi_1(u+n,v)= \qquad v^2\sum_{n}^{2n-1}{}_k(k-n+1)\,U_k+v^2\sum_{2n}^{\infty}(k-n+1)\,U_k$$

$$\psi_1(u+2n,v)= \qquad +v^2\sum_{2n}^{\infty}(k-2n+1)\,U_k$$

Multiplicando la seconda per -2, e sommando tutto insieme, si trova

$$\psi_1(u,v)-2\psi_1(u+n,v)+\psi_1(u+2n,v)=v^2\sum_{0}^{n-1}{}_k(k+1)U_k+v^2\sum_{n}^{2n-1}{}_k(2n-k-1)U_k \qquad 23)$$

relazione che significa, che per le funzioni ψ_1, come per le Φ, il trinomio caratteristico delle funzioni n successive rispetto ad u è una funzione algebrica.

Nella parte I. formola 11) abbiamo trovato

$$\Phi(u)-2\,\Phi(u+n)+\Phi(u+2n)=-\sum_{0}^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(u+k)^2}-\sum_{n}^{2n-1}{}_k\frac{2n-k-1}{(u+k)^2}$$

per cui sommando questa alla 23) e ponendo per brevità

$$V_k=\frac{(u+k)^2-v^2}{[(u+k)^2+v^2]^2} \qquad 24)$$

con breve riduzione si ha

$$\psi(u,v)-2\,\psi(u+n,v)+\psi(u+2n,v)=-\sum_{0}^{n-1}{}_k(k+1)V_k-\sum_{n}^{2n-1}{}_k(2n-k-1)V_k \qquad 25)$$

Ponendo in questa $n=1$, si ha la semplice relazione per le funzioni ψ successive

$$\psi(u,v)-2\,\psi(u+1,v)+\psi(u+2,v)=-\frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2} \qquad 26)$$

Per valori negativi di u, l'espressione a destra nella 26) rimane inalterata, per cui si conclude: che la *differenza* di due trinomi caratteristici per $\psi(u,v)$ e $\psi(-u,v)$ successive è $=0$.

10. L'andamento della seconda funzione ausiliaria $\psi_2(u,v)$ è molto più semplice della precedente. Ponendo in essa $u=-n$, n essendo un numero positivo e intero, scompare soltanto un termine della serie infinita in 15) che serve a definire la funzione. Essa procede regolarmente, quando u sia negativo, ma non intero, con termini che mutano solo di segno quando nel numeratore $k-u$ da $k<u$ si passi a valori di $k>u$.

Basterebbe rifare il ragionamento del numero precedente, per trovare che anche alla ψ_2 si applica una formola analoga per il suo trinomio caratteristico.

Ponendo

$$V_k'=\frac{u+k}{[(u+k)^2+v^2]^2} \qquad 27)$$

si ha

$$\psi_2(u,v)-2\psi_2(u+n,v)+\psi_2(u+2n,v)=2v\sum_{0}^{n-1}{}_k(k+1)\,V_k'+2v\sum_{n}^{2n-1}{}_k(2n-k-1)V_k' \qquad 28)$$

Per il caso speciale di $n=1$, la 28) si trasforma in

$$\psi_2(u,v)-2\psi_2(u+1,v)+\psi_2(u+2,v)=\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2} \qquad 29)$$

formola per le funzioni successive, la quale muta di segno quando si scriva $-u$ al posto di u; per cui la *somma* di due trinomi caratteristici per $\psi_2(u,v)$ e $\psi_2(-u,v)$ successive è $=0$.

11. Le formole 15) che servono a definire le funzioni ausiliarie ψ, ψ_1, ψ_2, causa la loro poca convergenza, male si presterebbero al calcolo numerico. Si possono rendere alquanto più convergenti, procedendo colle identità

$$\frac{3(u+k)^2+v^2}{(u+k)^2[(u+k)^2+v^2]^2}=\frac{3}{(u+k)^4}-v^2\cdot\frac{5(u+k)^2+3v^2}{(u+k)^4[(u+k)^2+v^2]^2}$$

$$\frac{5(u+k)^2+v^2}{(u+k)^4[(u+k)^2+v^2]^2}=\frac{5}{(u+k)^6}-v^2\cdot\frac{7(u+k)^2+5v^2}{(u+k)^6[(u+k)^2+v^2]^2}$$

. . . .

$$\frac{u+k}{[(u+k)^2+v^2]^2}=\frac{1}{(u+k)^3}-v^2\cdot\frac{2(u+k)^2+v^2}{(u+k)^3[(u+k)^2+v^2]^2}$$

$$\frac{2(u+k)^2+v^2}{(u+k)^3[(u+k)^2+v^2]^2}=\frac{2}{(u+k)^5}-v^2\cdot\frac{3(u+k)^2+2v^2}{(u+k)^5[(u+k)^2+v^2]^2}$$

. . . .

Introducendo questi valori successivamente nelle 15) e considerando che

$$\Phi(u) = \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_0^k {}_h \frac{h+1}{(u+h)^2}\right\} \quad , \quad \Phi'(u) = +2\sum_0^\infty {}_k \frac{k+1}{(u+k)^3}$$

$$\Phi''(u) = -2.3\sum_0^\infty {}_k \frac{k+1}{(u+k)^4} \quad , \quad \Phi'''(u) = +2.3.4\sum_0^\infty {}_k \frac{k+1}{(u+k)^5}$$

. . . .

$$\Phi^{(2n)}(u) = -(2n+1)!\sum_0^\infty {}_k \frac{k+1}{(u+k)^{2n+2}} \quad , \quad \Phi^{(2n-1)}(u) = +(2n)!\sum_0^\infty {}_k \frac{k+1}{(u+k)^{2n+1}}$$

dove n è un numero positivo, intero, si hanno le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \psi(u,v) &= \Phi(u) - \frac{v^2}{2!}\Phi''(u) + \frac{v^4}{4!}\Phi^{(4)}(u) - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{v^{2n}}{(2n)!}\Phi^{(2n)}(u) + \mathrm{R} \\ \psi_2(u,v) &= +\frac{v}{1!}\Phi'(u) - \frac{v^3}{3!}\Phi^{(3)}(u) + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{v^{2n-1}}{(2n-1)!}\Phi^{(2n-1)}(u) + \mathrm{R}' \end{aligned}\right\} \quad 30)$$

dove R, R′ sono i termini residuali di queste serie finite, e sono dati dalle serie infinite

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R} &= (-1)^{n+1} v^{2n+2} \sum_0^\infty {}_k (k+1) \frac{(2n+3)(u+k)^2 + (2n+1)v^2}{(u+k)^{2n+2}[(u+k)^2+v^2]^2} \\ \mathrm{R}' &= (-1)^n \, 2v^{2n+1} \sum_0^\infty {}_k (k+1) \frac{(n+1)(u+k)^2 + nv^2}{(u+k)^{2n+1}[(u+k)^2+v^2]^2} \end{aligned}\right\} \quad 31)$$

serie, che col crescere di n diventano più e più convergenti. Ponendo nelle 30) $v\sqrt{-1}$ al posto di v, esse perdono i segni alternanti, e sommando e sottraendo, si hanno due espressioni, le quali messe a confronto colle 19), conducono alle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \Phi(u+v) &= \Phi(u) + \frac{v}{1!}\Phi'(u) + \frac{v^2}{2!}\Phi''(u) + \cdots \mathrm{R}_1 \\ \Phi(u-v) &= \Phi(u) - \frac{v}{1!}\Phi'(u) + \frac{v^2}{2!}\Phi''(u) - \cdots \mathrm{R}_2 \end{aligned}\right\} \quad 32)$$

indicando in via sommaria con R_1, R_2 i termini residuali. Esse non sono altro che il teorema di Taylor applicato alle funzioni $\Phi(u \pm v)$.

Le relazioni 30) e 31), come pure le 32), valgono per qualsiasi valore positivo e intero di n. Fintanto che questo numero sia finito, le serie 30) e 32) sono finite e non vanno soggette a condizioni di convergenza. Esse valgono quindi per qualsiasi valore finito di v.

Lo stesso dicasi delle serie infinite 31), che determinano i valori residuali delle R e R′, e in certo qual modo, anche delle R_1 e R_2. È facile vedere che alla stessa condizione esse sono convergenti. Ma quando si volesse porre $n = \infty$, i termini residuali sono respinti all'infinito e non contano più. Le serie 30) e 32) invece divengono infinite e basta sostituirvi i valori qui sopra indicati per le derivate successive di $\Phi(u)$, per accorgersi che i limiti della convergenza si restringono a $-1 < v < +1$.

PARTE TERZA

Alcune integrazioni eseguite mediante le funzioni Φ

1. Nella teoria delle funzioni Z si dimostra che

$$Z(u) = -A + \int_0^1 \frac{1-z^{u-1}}{1-z}\, dz \qquad 1)$$

in cui u è una quantità reale e positiva. La formola conserva tutta la sua determinatezza, quantunque la quantità sotto il simbolo integrale ad uno dei limiti $z=1$ assuma la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Difatti è facile accertarsi, che quella indeterminatezza scompare con una sola derivazione del numeratore e del denominatore rispetto a z. La quantità posta sotto il segno integrale è una funzione finita e continua di z in tutta l'estensione indicata dai limiti dell'integrazione, e quindi lo è anche $Z(u)$.

Ponendo $u+1$ al posto di u, si ha pure

$$Z(u+1) = -A + \int_0^1 \frac{1-z^{u}}{1-z}\, dz \qquad 2)$$

per cui, sottraendo la 1) dalla 2)

$$Z(u+1) - Z(u) = \int_0^1 z^{u-1}\, dz = \frac{1}{u}$$

relazione nota fra due funzioni Z successive (parte I. 1_1). Le funzioni Z sono finite e continue per valori reali, finiti e positivi del loro argomento. Derivando n volte successivamente la relazione qui sopra rispetto ad u, si ha

$$Z^{(n)}(u+1) - Z^{(n)}(u) = \int_0^1 z^{u-1} (\log z)^n\, dz = (-1)^n \frac{n!}{u^{n+1}} \qquad 3)$$

relazione che sussiste perfettamente, malgrado la forma indeterminata $0 \times \infty$, che assume la quantità sotto il simbolo integrale per il limite $z=0$ (1). Per accertarsene, basta dare a quella quantità la forma $\frac{(\log z)^n}{z^{1-u}}$ e derivare partitamente numeratore e denominatore n volte rispetto a z, con cui ogni indeterminatezza e ogni dubbio scompare.

2. Esiste una grande analogia nell'andamento delle funzioni Φ e delle funzioni Z. Multiplicando la 2) per u e derivando rispetto a questa quantità, si ha

$$\Phi(u+1) = -A + \int_0^1 \frac{1 - z^u - uz^u \log z}{1-z}\, dz \qquad 4)$$

(1) Vedi Làska, *Sammlung von Formeln*, pag. 239.

integrale che serve a definire la funzione Φ. Anche qui la quantità posta sotto il simbolo integrale presenta due punti indeterminati che corrispondono ai limiti $z=0$, $z=1$. Difatti, per $z=0$, vi appare un termine sotto la forma indeterminata $0 \times \infty$, per $z=1$ sotto quella di $\frac{0}{0}$.

È facile dimostrare, che i due punti qui contemplati hanno valore finito per tutti i valori reali, positivi e finiti di u, e che quindi l'integrale 4) rimane perfettamente determinato. A tale scopo giova scinderlo nei due integrali separati

$$\int_0^1 \frac{1-z^u}{1-z}\,dz - u\int_0^1 z^u \frac{\log z\, dz}{1-z}$$

Del primo integrale si è discorso nel numero precedente. Nel secondo, per $z=0$, sono i fattori $z^u \log z = \frac{\log z}{z^{-u}}$, per $z=1$, invece $\frac{\log z}{1-z}$ che producono la forma indeterminata. È facile vedere, che nel primo caso la quantità sotto l'integrale assume il valore 0, nel secondo il valore -1. Entro questi limiti quella quantità è una funzione continua e finita di z e l'integrale è perfettamente determinato.

Scrivendo in 4) u per $u+1$, si ha

$$\Phi(u) = -A + \int_0^1 \frac{1-z^{u-1}-(u-1)\,z^{u-1}\log z}{1-z}\,dz \tag{4$_1$}$$

ed è facile vedere, che anche questa relazione è valevole per tutti i valori reali, finiti e positivi di u. Tanto la 4), quanto la 4_1) sono un po' complicate, ma sottraendo la seconda dalla prima, si trova

$$\Phi(u+1)-\Phi(u) = \int_0^1 z^{u-1}\,dz + u\int_0^1 z^{u-1}\log z\,dz - \int_0^1 z^{u-1}\frac{\log z\,dz}{1-z}$$

e considerando che il primo degli integrali è $=\frac{1}{u}$, il secondo, giusta la 3) è $=-\frac{1}{u^2}$ si trova finalmente

$$\Phi(u+1)-\Phi(u) = -\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{\log z\,dz}{1-z} = Z'(u) \tag{5}$$

relazione tipica e caratteristica per le funzioni Φ. Anche qui, come è naturale, appare la stessa indeterminatezza nella funzione sotto il segno integrale per i due valori limite di $z=0$ e $z=1$. Ci pare superfluo il ritornarvi sopra, dopo quanto abbiamo già detto in proposito.

Derivando la 5) n volte rispetto ad u, si ottiene

$$\Phi^{(n)}(u+1)-\Phi^{(n)}(u) = -\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{(\log z)^{n+1}\,dz}{1-z} = Z^{(n+1)}(u) \tag{6}$$

relazione che presenta grande analogia colla 3), con questa differenza, che mentre nella 3) si ha per risultato una funzione algebrica, qui nella 6) vi rimane come risultato ancora una trascendente.

3. Per arrivare per le funzioni Φ successive ad una espressione algebrica, sia nella 5) sia nella 6), che ne è la conseguenza, scriviamo nella 5) $u+1$ al posto

di u e sottraendo questa da quella, abbiamo

$$\Phi(u) - 2\,\Phi(u+1) + \Phi(u+2) = \int_0^1 z^{u-1} \log z\, dz = Z'(u+1) - Z'(u) = -\frac{1}{u^2} \qquad 7)$$

relazione, che non è altro che il trinomio caratteristico delle Φ successive. Allo stesso modo si trova dalla 6)

$$\Phi^{(n)}(u) - 2\,\Phi^{(n)}(u+1) + \Phi^{(n)}(u+2)$$
$$= \int_0^1 z^{u-1} (\log z)^{n+1} dz = Z^{(n+1)}(u+1) - Z^{(n+1)}(u) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{u^{n+2}} \qquad 8)$$

Trascrivendo quest'ultima nel modo seguente

$$\Phi^{(n)}(u+2) - \Phi^{(n)}(u+1) = \Phi^{(n)}(u+1) - \Phi^{(n)}(u) + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{u^{n+2}}$$

e ponendo

$$\Phi^{(n)}(u+2) - \Phi^{(n)}(u+1) = \Delta^{(n)}_{u+2}\ ,\quad \Phi^{(n)}(u+1) - \Phi^{(n)}(u) = \Delta^{(n)}_{u+1}$$

si hanno le relazioni

$$\Delta^{(n)}_{u+2} = \Delta^{(n)}_{u+1} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{u^{n+2}} \qquad 9)$$

$$\Phi^{(n)}(u+2) = \Phi^{(n)}(u+1) + \Delta^{(n)}_{u+1} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{u^{n+2}} \qquad 10)$$

$$\Phi^{(n)}(u+2) = \Phi^{(n)}(u) \qquad + \Delta^{(n)}_{u+2} + \Delta^{(n)}_{u+1} \qquad 11)$$

4. L'integrale definito

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{\log z\, dz}{1-z} = \Phi(u) - \Phi(u+1)$$

tipico per le funzioni Φ, può servire di punto di partenza per un ulteriore sviluppo di nuovi integrali definiti. Ponendo per u successivamente $u+1$, $u+2$, ... $u+n-1$, si ha

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot z\, \frac{\log z\, dz}{1-z} = \Phi(u+1) - \Phi(u+2)$$
$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot z^2 \cdot \frac{\log z\, dz}{1-z} = \Phi(u+2) - \Phi(u+3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot z^{n-1} \cdot \frac{\log z\, dz}{1-z} = \Phi(u+n-1) - \Phi(u+n)$$

Sommando questi integrali, compreso il primo, ed essendo

$$1 + z + z^2 + \cdots z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

si ha

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2} \log z\, dz = \Phi(u) - \Phi(u+n) \qquad 12)$$

relazione più generale della 5) ed ugualmente tipica per le funzioni Φ. Confrontando le quantità poste sotto il simbolo integrale in queste due espressioni, si vede

subito, che nella 12) figura in più il quoziente $\frac{1-z^n}{1-z}$, il quale per $z=1$ assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma è facile riconoscere che il suo valore è finito e $=n$. La 12) ha molta analogia con una relazione trovata da Legendre per le funzioni Z, che è la seguente

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1-z^n}{1-z}\,dz = Z(u+n)-Z(u) \tag{13}$$

Scrivendo nella 12) $u+n$ al posto di u e sottraendo la nuova equazione dalla 12), si ha

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^2\log z\,dz = \Phi(u)-2\,\Phi(u+n)+\Phi(u+2n) \tag{14}$$

Questo è il trinomio delle funzioni Φ n successive, che si esprime mediante una funzione puramente algebrica (Parte I. 17), per cui si ha

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^2\log z\,dz = -\sum_{0}^{n-1}{}_k\frac{k+1}{(u+k)^2}-\sum_{n}^{2n-1}{}_k\frac{2n-k-1}{(u+k)^2} \tag{15}$$

Confrontando l'integrale 15) d'indole algebrica con quello 12), d'indole trascendentale, si riconosce facilmente, che n essendo un numero intero, il fattore $\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^2$ è divisibile direttamente e dà una serie algebrica finita, mentre nella 12) questo non è il caso. Ma su questo importante argomento ritorneremo al n. **6**.

Ponendo nella 15) $n=1$, si ritorna all'espressione più semplice in 7).

5. La stessa formola 12) del numero precedente può essere il nuovo punto di partenza per ulteriori sviluppi di integrali. Riproducendo la 12) e ponendo in essa per u successivamente $u+n$, $u+2n$, ... $u+\overline{k-1}\,.\,n$, dove k, al pari di n, rappresenta un numero positivo e intero, abbiamo

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = \Phi(u)-\Phi(u+n)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot z^n\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = \Phi(u+n)-\Phi(u+2n)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot z^{2n}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = \Phi(u+2n)-\Phi(u+3n)$$

. . . .

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot z^{\overline{k-1}\cdot n}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = \Phi(u+\overline{k-1}\cdot n)-\Phi(u+kn)$$

Multiplicando le singole relazioni per le quantità arbitrarie $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{k-1}$ e sommando

$$\begin{aligned}\int_0^1 z^{u-1}\cdot\left\{\lambda_0+\lambda_1 z^n+\lambda_2 z^{2n}+\cdots\lambda_{k-1}z^{\overline{k-1}\cdot n}\right\}\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz \\ = \lambda_0\,\Phi(u)+(\lambda_1-\lambda_0)\,\Phi(u+n)+(\lambda_2-\lambda_1)\,\Phi(u+2n)+\cdots \\ +(\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2})\,\Phi(u+\overline{k-1}\,.\,n)-\lambda_{k-1}\,\Phi(u+kn)\end{aligned} \tag{16}$$

relazione d'indole generale, dalla quale si possono dedurre molti nuovi integrali, scegliendo i valori delle λ in modo, che il primo e il secondo membro dell'equazione assumano una forma più o meno semplice, più o meno determinata. Così, ponendo $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 1$, la serie sotto l'integrale ha per somma $\frac{1-z^{kn}}{1-z^n}$ e si ha

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1-z^{kn}}{(1-z)^2} \log z \, dz = \Phi(u) - \Phi(u+kn) \qquad 17)$$

relazione identica alla 12) purchè al posto del numero intero n si sostituisca il numero intero kn. Ponendo invece $\lambda_0 = -\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = (-1)^{k-1} \lambda_{k-1} = 1$, la serie sotto l'integrale diviene $= \frac{1-(-1)^k z^{kn}}{1+z^n}$, abbiamo quindi

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1-(-1)^k z^{kn}}{1+z^n} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2} \log z \, dz$$
$$= \Phi(u) - 2\Phi(u+n) + 2\Phi(u+2n) - \cdots (-1)^k \Phi(u+kn) \qquad 18)$$

Ponendo infine nella 16)

$$\lambda_0 = \binom{k-1}{0}, \quad \lambda_1 = \pm\binom{k-1}{1}, \quad \lambda_2 = \binom{k-1}{2}, \ldots \lambda_{k-1} = (\pm 1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1},$$

considerando che

$$\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} z^n + \binom{k-1}{2} z^{2n} + \cdots \binom{k-1}{k-1} z^{k-1 \cdot n} = (1+z^n)^{k-1}$$
$$\binom{k-1}{0} - \binom{k-1}{1} z^n + \binom{k-1}{2} z^{2n} - \cdots (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} z^{k-1 \cdot n} = (1-z^n)^{k-1}$$

si hanno le due relazioni

$$\int_0^1 z^{u-1} (1+z^n)^{k-1} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2} \log z \, dz$$
$$= \Phi(u) + \binom{k-1}{0} \frac{k-2}{1} \Phi(u+n) + \binom{k-1}{1} \frac{k-4}{2} \Phi(u+2n)$$
$$+ \cdots \binom{k-1}{i-1} \frac{k-2i}{i} \Phi(u+in) + \cdots - \Phi(u+kn) \qquad 19)$$

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{(1-z^n)^k}{(1-z)^2} \log z \, dz$$
$$= \Phi(u) - \binom{k}{1} \Phi(u+n) + \binom{k}{2} \Phi(u+2n) - \cdots (-1)^i \binom{k}{i} \Phi(u+in) + \cdots (-1)^k \Phi(u+kn) \qquad 20)$$

6. I pochi esempj del numero precedente bastano a dimostrare la grande facilità, con cui mercè la 16) si possono dedurre nuovi integrali. Ma sarebbe un errore il credere, che tutti abbiano carattere trascendente, per la cui espressione occorrano le funzioni Φ. Già a proposito della 15) abbiamo fatto risaltare il carattere algebrico di certe forme e il criterio per riconoscerle. Dalla 3) risulta che, m essendo un numero qualunque,

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot z^m \log z \, dz = -\frac{1}{(u+m)^2}$$

relazione, che del resto si dimostra passando per l'integrale indefinito.

Ne segue che tutte volte noi abbiamo sotto il simbolo integrale una funzione della forma precedente, ovvero una somma finita di simili termini, l'integrale è algebrico. Così, p. e. delle due formole precedenti, la 20) ha carattere algebrico, perchè la quantità $\frac{(1-z^n)^k}{(1-z)^2}$, dove k e n sono numeri interi e $k>1$, si risolve in una serie finita di termini algebrici, e l'integrale corrispondente si riduce ad una serie finita di integrali della forma sopra indicata, nella quale m è un numero intero. All'incontro, l'integrale 19) resiste a questo tentativo ed ha quindi carattere trascendente. Ci pare superfluo citare altri esempj in proposito. La determinazione, caso per caso, della funzione speciale algebrica è ovvia e si riduce al trinomio caratteristico, o ad una somma di trinomi n successivi. Così, p. e., partendo dalla 15) e scrivendo in essa per u successivamente $u+n$, $u+2n$, ecc. si hanno le seguenti espressioni

$$-\int_0^1 z^{u-1}(1+z^n)\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^2 \log z\, dz = \sum_0^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} + \sum_n^{2n-1}{}_k \frac{n}{(u+k)^2} + \sum_{2n}^{3n-1}{}_k \frac{3n-k-1}{(u+k)^2} \qquad 21)$$

$$-\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{(1-z^n)^3}{(1-z)^2} \log z\, dz = \sum_0^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} + \sum_n^{2n-1}{}_k \frac{3n-2k-2}{(u+k)^2} + \sum_{2n}^{3n-1}{}_k \frac{3n-k-1}{(u+k)^2} \qquad 22)$$

$$-\int_0^1 z^{u-1}\cdot\left(\frac{1-z^{2n}}{1-z}\right)^2 \log z\, dz = \sum_0^{2n-1}{}_k \frac{k+1}{(u+k)^2} + \sum_{2n}^{4n-1} \frac{4n-k-1}{(u+k)^2} \qquad 23)$$

e così di seguito. Per il caso più semplice di $n=1$ abbiamo le relazioni semplici

$$-\int_0^1 z^{u-1}(1+z)\log z\, dz = \frac{u^2+(u+1)^2}{u^2(u+1)^2} \qquad 24)$$

$$-\int_0^1 z^{u-1}(1-z)\log z\, dz = \frac{2u+1}{u^2(u+1)^2} \qquad 25)$$

$$-\int_0^1 z^{u-1}(1+z)^2\log z\, dz = \frac{1}{u^2} + \frac{2}{(u+1)^2} + \frac{1}{(u+2)^2} \qquad 26)$$

la cui forma algebrica è evidente a priori e può senz'altro trovarsi direttamente.

Col criterio sopraindicato la natura algebrica o trascendente degli integrali qui contemplati si riconosce con tanta facilità, che si può servirsene, invertendo il problema, per riconoscere la natura di una serie finita di funzioni Φ n successive. Così si deduce dalla 20), che *una serie finita di tali funzioni, la quale procede per segni alternanti e coi coefficienti dati dalla formola binomiale per esponenti interi e positivi, è una funzione algebrica.*

Con procedimento facile a trovarsi, si arriva pure alla seguente regola: *Ogni serie finita di funzioni* n *successive, il cui termine generale abbia la forma*

$$\left\{\binom{m}{i-2} - 2\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i}\right\}\Phi(u+in)$$

è una funzione algebrica. In questa espressione i rappresenta, al solito, un numero d'ordine che va da $i=0$ fino a $i=m$.

7. Ritorniamo alla relazione 5) e poniamo $z = e^{-ax}$, dove per a intendiamo una quantità positiva. Deriviamola successivamente rispetto ad a e poniamo infine u per au; si hanno così gli integrali

$$\int_0^\infty e^{-ux} \cdot \frac{x\,dx}{1 - e^{-ax}} = \frac{1}{a^2}\left\{\Phi\left(\frac{u}{a}+1\right) - \Phi\left(\frac{u}{a}\right)\right\} \qquad 27)$$

$$\int_0^\infty e^{-ux} \cdot \frac{u-(u-a)\,e^{-ax}}{(1-e^{-ax})^2}\,x^2\,dx = \frac{2}{a^2}\left\{\Phi\left(\frac{u}{a}+1\right) - \Phi\left(\frac{u}{a}\right)\right\} \qquad 28)$$

$$\int_0^\infty e^{-ux} \cdot \frac{[u-(u-a)\,e^{-ax}]^2 + e^{-ax}}{(1-e^{-ax})^3}\,x^3\,dx = \frac{2.3}{a^3}\left\{\Phi\left(\frac{u}{a}+1\right) - \Phi\left(\frac{u}{a}\right)\right\} \qquad 29)$$

Un procedimento consimile può essere applicato agli altri integrali fin qui trovati. Così si ha dalla 12) e dalla 15)

$$\int_0^\infty e^{-ux} \cdot \frac{1-e^{-anx}}{(1-e^{-ax})^2}\,x\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\Phi\left(\frac{u}{a}+n\right) - \Phi\left(\frac{u}{a}\right)\right\} \qquad 30)$$

$$\int_0^\infty e^{-ux} \cdot \left(\frac{1-e^{-anx}}{1-e^{-ax}}\right)^2 x\,dx = \frac{1}{a^2}\sum_0^{n-1}{}_k \frac{k+1}{\left(\frac{u}{a}+k\right)^2} + \frac{1}{a^2}\sum_n^{2n-1}{}_k \frac{2n-k-1}{\left(\frac{u}{a}+k\right)^2} \qquad 31)$$

espressioni che per $n = 1$ si riducono, la 30) nella 27), la 31) nella nota relazione

$$\int_0^\infty e^{-ux}\,x\,dx = \frac{1}{u^2}$$

8. Le quantità arbitrarie λ_0, λ_1, λ_2, ... λ_{k-1}, che figurano nella relazione generale 16) possono essere funzioni, più o meno complicate di u, od anche variabili indipendenti, o infine funzioni di nuove variabili, purchè non stiano in alcun rapporto colla z. In questo riguardo la scelta è, per così dire, illimitata. Vogliamo citare alcuni esempj.

Sia $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \cos^2\varphi$, $\lambda_2 = \cos^4\varphi$, ... $\lambda_{k-2} = \cos^{k-2\cdot 2}\varphi$, $\lambda_{k-1} = \cos^{k-1\cdot 2}\varphi$ per cui, sostituendo nella 16), con brevi riduzioni

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1 - z^{kn}\cos^{2k}\varphi}{1 - z^n\cos^2\varphi} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$

$$= \Phi(u) - \operatorname{sen}^2\varphi \sum_1^{k-1}{}_i \cos^{i-1\cdot 2}\varphi\,\Phi(u+in) - \cos^{k-1\cdot 2}\varphi\,\Phi(u+kn) \qquad 32)$$

e ponendo $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ al posto di φ

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1 - z^{kn}\operatorname{sen}^{2k}\varphi}{1 - z^n\operatorname{sen}^2\varphi} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$

$$= \Phi(u) - \cos^2\varphi \sum_1^{k-1}{}_i \operatorname{sen}^{i-1\cdot 2}\varphi\,\Phi(u+in) - \operatorname{sen}^{k-1\cdot 2}\varphi\,\Phi(u+kn) \qquad 33)$$

formole che per $k = 1$ ritornano naturalmente alla 12). Per $k = 2$, dove esse incominciano ad avere un significato proprio, si ha

$$\int_0^1 z^{u-1}(1+z^n\cos^2\varphi) \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = \Phi(u) - \operatorname{sen}^2\varphi\,\Phi(u+n) - \cos^2\varphi\,\Phi(u+2n) \qquad 34)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}(1+z^n\operatorname{sen}^2\varphi) \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = \Phi(u) - \cos^2\varphi\,\Phi(u+n) - \operatorname{sen}^2\varphi\,\Phi(u+2n) \qquad 35)$$

e sommandole

$$\int_0^1 z^{u-1}(2+z^n)\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz = 2\,\Phi(u)-\Phi(u+n)-\Phi(u+2n) \qquad 36)$$

relazione molto semplice, che si dimostra facilmente in via diretta.

Le relazioni 32) e 33) possono servire come punto di partenza per ulteriori sviluppi, mediante derivazioni rispetto a φ. Si ottiene facilmente, con qualche riduzione

$$\int_0^1 z^{u-1}.z^n.\frac{1-kz^{k-1.n}\cos^{k-1.2}\varphi+(k-1)z^{kn}\cos^{2k}\varphi}{(1-z^n\cos^2\varphi)^2}.\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\sum_1^{k-1}{}_i\,(1-i\,\mathrm{sen}^2\varphi)\cos^{i-2.2}\varphi\,\Phi(u+in)-(k-1)\cos^{k-2.2}\varphi\,\Phi(u+kn) \qquad 37)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}.z^n.\frac{1-kz^{k-1.n}\,\mathrm{sen}^{k-1.2}\varphi+(k-1)z^{kn}\,\mathrm{sen}^{2k}\varphi}{(1-z^n\,\mathrm{sen}^2\varphi)^2}.\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\sum_1^{k-1}{}_i(1-i\cos^2\varphi)\,\mathrm{sen}^{i-2.2}\varphi\,\Phi(u+in)-(k-1)\,\mathrm{sen}^{k-2.2}\varphi\,\Phi(u+kn) \qquad 38)$$

Non occorre soggiungere che, ponendo in queste formole $\varphi=0$, o $\varphi=\frac{\pi}{2}$, spariscono le funzioni goniometriche e si ritorna a formole che già si conoscono o che almeno si possono facilmente dedurre coi metodi dei numeri precedenti. Così p. e. ponendo nella 37) $\varphi=0$, si ha

$$\int_0^1 z^{u-1}.z^n.\frac{1-kz^{k-1.n}+(k-1)z^{kn}}{(1-z^n)(1-z)^2}\log z\,dz=\sum_1^{k-1}{}_i\,\Phi(u+in)-(k-1)\Phi(u+kn) \qquad 39)$$

Questa relazione semplice ed elegante si dimostra direttamente. Basta porre nella formola generale 16)

$$\lambda_0=0\ ,\ \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2\ \ldots\ \lambda_{k-1}=k-1$$

e considerando che sotto l'integrale si ha la serie

$$z^n+2z^{2n}+3z^{3n}+\cdots(k-1)z^{k-1.n}$$

la cui somma $\displaystyle =\frac{1-kz^{k-1.n}+(k-1)z^{kn}}{(1-z^n)^2}.z^n$

si arriva subito alla relazione 39).

9. Nello stesso modo, ponendo nella 16)

$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_1=\cos\varphi\ ,\ \lambda_2=\cos^2\varphi\ ,\ \ldots\ \lambda_{k-1}=\cos^{k-1}\varphi$$
$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_1=\mathrm{sen}\,\varphi\ ,\ \lambda_2=\mathrm{sen}^2\varphi\ ,\ \ldots\ \lambda_{k-1}=\mathrm{sen}^{k-1}\varphi$$

si hanno le relazioni

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1-z^{kn}\cos^k\varphi}{1-z^n\cos\varphi}.\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\Phi(u)-\cos^{k-1}\varphi\,\Phi(u+kn)-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\sum_1^{k-1}{}_i\cos^{i-1}\varphi\,\Phi(u+in) \qquad 40)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1-z^{kn}\,\mathrm{sen}^k\varphi}{1-z^n\,\mathrm{sen}\,\varphi}.\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\Phi(u)-\mathrm{sen}^{k-1}\varphi\,\Phi(u+kn)-2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sum_1^{k-1}{}_i\,\mathrm{sen}^{i-1}\varphi\,\Phi(u+in) \qquad 41)$$

equazioni simili alle 32) e 33) e che possono pure servire come punto di partenza per nuove forme di integrali. Per il caso speciale di $k=2$, si ha

$$\int_0^1 z^{u-1}(1+z^n\cos\varphi)\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\Phi(u)-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\,\Phi(u+n)-\cos\varphi\,\Phi(u+2n) \qquad 42)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}(1+z^n\mathrm{sen}\varphi)\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\Phi(u)-2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Phi(u+n)-\mathrm{sen}\,\varphi\,\Phi(u+2n) \qquad 43)$$

Nello stesso modo si ha

$$\int_0^1 z^{u-1}(1-z^n\cos\varphi)\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\Phi(u)-2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\Phi(u+n)+\cos\varphi\,\Phi(u+2n) \qquad 44)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}(1-z^n\mathrm{sen}\varphi)\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\Phi(u)-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Phi(u+n)+\mathrm{sen}\,\varphi\,\Phi(u+2n) \qquad 45)$$

Procedendo oltre si trova pure

$$\int_0^1 z^{u-1}\left(1\pm\frac{2z^n\cos\varphi}{p}+\frac{z^{2n}}{p^2}\right)\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\Phi(u)-\left(1\mp\frac{2}{p}\cos\varphi\right)\Phi(u+n)$$
$$+\frac{1\mp 2p\cos\varphi}{p^2}\Phi(u+2n)-\frac{1}{p^2}\Phi(u+3n) \qquad 46)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\log(pq^{z^n})\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\log p\,\Phi(u)+\log\left(\frac{q}{p}\right)\Phi(u+n)-\log q\,\Phi(u+2n) \qquad 47)$$

e così di seguito. Le forme, per così dire, si affollano sotto la penna e si presentano in modo svariatissimo, e a ciascuna di esse corrisponde un altro integrale con funzioni esponenziali e coi limiti 0 e ∞.

10. Una delle proprietà caratteristiche delle funzioni Φ è quella di svolgersi per funzioni successive e n successive. Si presenta quindi spontaneo il pensiero di continuare la serie indefinitamente. Si ottengono così serie infinite di funzioni Φ successive e n successive, serie che naturalmente, per essere adoperabili, vanno soggette alla condizione di essere convergenti. La formola generale 16) ci offre a ciò un mezzo semplice ed elegante. Poniamo rispettivamente

$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_1=\frac{1}{v}\ ,\ \lambda_2=\frac{1}{v^2}\ ,\ \dots\ \lambda_{k-1}=\frac{1}{v^{k-1}}$$

$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_1=-\frac{1}{v}\ ,\ \lambda_2=\frac{1}{v^2}\ ,\ \dots\ \lambda_{k-1}=(-1)^{k-1}\frac{1}{v^{k-1}}$$

dove v rappresenta una variabile arbitraria, legata od anche no, alla u, ma in ogni caso indipendente da z. Considerando che

$$1+\frac{z^n}{v}+\frac{z^{2n}}{v^2}+\cdots\qquad\frac{z^{k-1\cdot n}}{v^{k-1}}=\frac{1-\left(\frac{z^n}{v}\right)^k}{1-\frac{z^n}{v}}$$

$$1-\frac{z^n}{v}+\frac{z^{2n}}{v^2}-\dots(-1)^{k-1}\cdot\frac{z^{k-1\cdot n}}{v^{k-1}}=\frac{1-(-1)^k\left(\frac{z^n}{v}\right)^k}{1+\frac{z^n}{v}}$$

si ha dalla 16)

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{z^n}{v}\right)^k}{1-\frac{z^n}{v}} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2} \log z \, dz$$

$$= \Phi(u) - \frac{1}{v^{k-1}} \Phi(u+kn) - (v-1) \sum_1^{k-1}{}_i \frac{1}{v^i} \Phi(u+in) \qquad 48)$$

$$\int_0^1 z^{u-1} \cdot \frac{1-(-1)^k\left(\frac{z^n}{v}\right)^k}{1+\frac{z^n}{v}} \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)^2} \log z \, dz$$

$$= \Phi(u) - (-1)^{k-1} \frac{1}{v^{k-1}} \Phi(u+kn) + (v+1) \sum_1^{k-1}{}_i (-1)^i \frac{1}{v^i} \Phi(u+in) \qquad 49)$$

In queste formole k rappresenta, al solito, un numero d'ordine: facciamolo crescere più e più, in modo che $k=\infty$. Le serie, a destra e a sinistra, divengono infinite. Le progressioni geometriche, già sommate, che figurano sotto l'integrale, sono convergenti alla condizione che $\frac{z^n}{v}$ sia <1. In tale caso si ha

$$\lim\left(\frac{z^n}{v}\right)^k = 0 \quad \text{per} \quad k=\infty$$

Noi dobbiamo ora esaminare, se questa condizione sia necessaria e sufficiente per la convergenza delle serie a destra. Sotto l'integrale z percorre tutti i valori da 0 fino ad 1; ne segue che, perchè sia

$$\frac{z^n}{v} < 1$$

deve necessariamente essere $\qquad v > 1$

Vogliamo quindi esaminare cosa divenga il secondo membro delle equazioni 48) e 49) a questa condizione, quando k sia infinito. In ambedue le equazioni figura il termine

$$\frac{1}{v^{k-1}} \Phi(u+kn)$$

il quale per $k=\infty$ e $v>1$ assume la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Considerando che le Φ sono funzioni di carattere logaritmico, le quali per valore infinito positivo del loro argomento vanno bensì all'infinito, ma lentamente, mentre v^{k-1} è funzione esponenziale, che per $v>1$ va all'infinito rapidissimamente, quell'indeterminatezza scompare facilmente, e si vede che quel valore, per $k=\infty$ e $v>1$, tende a zero. Il che si dimostra anche direttamente.

Derivando rispetto a k partitamente numeratore e denominatore, si ha l'espressione

$$\frac{n\,\Phi'(u+kn)}{v^{k-1}\log v}$$

Dalla definizione delle funzioni Φ (parte I. 6_1) si ha, scrivendovi $u+kn$ al posto di u, e m al posto di k

$$\Phi(u+kn)=\lim_{m=\infty}\left\{\log m-\sum_0^m{}_h \frac{h+1}{(u+kn+h)^2}\right\}$$

per cui derivando rispetto a k e considerando che m è indipendente da k

$$\Phi'(u+kn)=+2\sum_0^\infty{}_h\frac{h+1}{(u+kn+h)^3}$$

Questa serie è ora convergente ed ha quindi un valore finito anche quando $k=\infty$. Difatti si ha sempre

$$\sum_0^\infty{}_h\frac{h+1}{(u+h)^3}>\sum_0^\infty{}_h\frac{h+1}{(u+kn+h)^3}$$

ed avendo la prima delle serie un valore finito, anche la seconda, *a fortiori*, lo deve avere, ed anzi un valore positivo tanto più piccolo, quanto più grande è k. Ne segue che

$$\lim_{k=\infty}\left\{\frac{\Phi'(u+kn)}{v^{k-1}\log v}\right\}=0,\quad \text{quindi anche}\quad \lim_{k=\infty}\left\{\frac{1}{v^{k-1}}\Phi(u+kn)\right\}=0 \qquad 50)$$

11. Noi vogliamo ora esaminare, se la serie in 48) e 49), considerata come infinita e indipendentemente dall'alternanza dei segni, cioè

$$\frac{1}{v}\Phi(u+n)+\frac{1}{v^2}\Phi(u+2n)+\cdots\frac{1}{v^{k-1}}\Phi(u+\overline{k-1}.n)+\frac{1}{v^k}\Phi(u+kn)+\cdots\text{inf.}$$

sia realmente convergente per $v>1$. Essa è decrescente e per $k=\infty$ i suoi singoli termini tendono a zero. Basta quindi dimostrare che il rapporto di due termini successivi ha per limite un valore inferiore all'unità, cioè che

$$\frac{1}{v}\lim_{k=\infty}\left\{\frac{\Phi(u+kn)}{\Phi(u+\overline{k-1}.n)}\right\}<1$$

È facile vedere che il rapporto, messo entro le parentesi } {, di due funzioni Φ n successive per $k=\infty$ tende verso l'unità, o il che è lo stesso, che

$$\lim_{k=\infty}\left\{\Phi(u+kn)-\Phi(u+\overline{k-1}.n)\right\}=0$$

Difatti dalla relazione 9) (parte I.) si ha, scrivendo rispettivamente kn e $\overline{k-1}.n$ al posto di n, e h al posto di k

$$\Phi(u+kn)=\Phi(u)+\sum_0^{kn-1}{}_h\frac{h+1}{(u+h)^2}+kn\sum_{kn}^\infty{}_h\frac{1}{(u+h)^2}$$

$$\Phi(u+\overline{k-1}.n)=\Phi(u)+\sum_0^{kn-n-1}{}_h\frac{h+1}{(u+h)^2}+(kn-n)\sum_{kn-n}^\infty{}_h\frac{1}{(u+h)^2}$$

quindi sottraendo e con qualche riduzione

$$\Phi(u+kn)-\Phi(u+\overline{k-1}.n)=\sum_{kn-n}^{kn-1}{}_h\frac{h-kn+n+1}{(u+h)^2}+n\sum_{kn}^\infty{}_h\frac{1}{(u+h)^2}$$

Questa relazione è generale e vale per qualsiasi valore di k. Ma per $k=\infty$, la

seconda delle Σ scompare, e per sapere cosa divengal a prima Σ, basta scriverne il valore per esteso

$$\frac{1}{(u+kn-n)^2}+\frac{2}{(u+kn-n+1)^2}+\cdots\frac{n}{(u+kn-1)^2}$$

Sono n termini algebrici, ciascuno dei quali per $k=\infty$ va a zero. Ne segue che

$$\lim_{k=\infty}\left\{\Phi(u+kn)-\Phi(u+k-1.n)\right\}=0$$

quindi per $v>1$

$$\frac{1}{v}\lim_{k=\infty}\left\{\frac{\Phi(u+kn)}{\Phi(u+k-1.n)}\right\}<1$$

con che la convergenza della serie per $v>1$ rimane stabilita.

Riassunti i risultati ottenuti in questi due numeri, le relazioni 48) e 49) prendono la forma definitiva

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1}{v-z^n}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\frac{1}{v}\,\Phi(u)-\left(1-\frac{1}{v}\right)\sum_1^\infty{}_k\,\frac{1}{v^k}\,\Phi(u+kn) \tag{51}$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1}{v+z^n}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\frac{1}{v}\,\Phi(u)-\left(1+\frac{1}{v}\right)\sum_1^\infty{}_k\,(-1)^{k+1}\frac{1}{v^k}\Phi(u+kn) \tag{52}$$

Multiplicando la prima per $v+1$, la seconda per $v-1$, si ha, sommando e sottraendo

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{v^2+z^n}{v^2-z^{2n}}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\quad\Phi(u)-\left(v-\frac{1}{v}\right)\sum_1^\infty{}_k\,\frac{1}{v^{2k-1}}\,\Phi(u+2k-1.n) \tag{53}$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1+z^n}{v^2-z^{2n}}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz=\frac{1}{v^2}\,\Phi(u)-\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\sum_1^\infty{}_k\,\frac{1}{v^{2k}}\,\Phi(u+2kn) \tag{54}$$

equazioni rimarchevoli per la loro generalità e per la semplice regolarità, con cui procedono le serie.

12. Il procedimento usato nei numeri precedenti, può essere applicato a molti altri integrali. Il metodo consiste nel sostituire nella 16) per le λ funzioni arbitrarie di una variabile indipendente v, scelte in modo che la serie risultante sotto l'integrale sia convergente e possieda una somma assegnabile, e sia del pari convergente la serie delle funzioni Φ n successive. Si ottengono così integrali definiti, espressi in serie infinite procedenti per funzioni Φ n successive.

Poniamo nella 16) a titolo d'esempio

$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_1=\pm\frac{1}{1\,!\,v}\ ,\ \lambda_2=\frac{1}{2\,!\,v^2}\ ,\ \lambda_3=\pm\frac{1}{3\,!\,v^3}\cdots\text{ecc.}$$

essendo

$$1\pm\frac{z^n}{1\,!\,v}+\frac{z^{2n}}{2\,!\,v^2}\pm\frac{z^{3n}}{3\,!\,v^3}+\cdots\text{inf.}=e^{\pm\frac{z^n}{v}}$$

si trova facilmente

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot e^{\pm\frac{z^n}{v}}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$

$$=\Phi(u)-\left\{\frac{v\mp1}{1\,!\,v}\,\Phi(u+n)\pm\frac{2v\mp1}{2\,!\,v^2}\,\Phi(u+2n)+\frac{3v\mp1}{3\,!\,v^3}\Phi(u+3n)\pm\cdots\text{inf.}\right\} \tag{55}$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 z^{u-1}\left[e^{\frac{z^n}{v}}+e^{-\frac{z^n}{v}}\right]\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\Phi(u)-\Phi(u+n)+\frac{1}{2\,!\,v^2}\;\Phi(u+2n)-\frac{1}{2\,!\,v^2}\Phi(u+3n)+\cdots\text{inf.}\qquad 56)$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 z^{u-1}\left[e^{\frac{z^n}{v}}-e^{-\frac{z^n}{v}}\right]\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\frac{1}{v}\,\Phi(u+n)-\frac{1}{v}\,\Phi(u+2n)+\frac{1}{3\,!\,v^3}\;\Phi(u+3n)-\cdots\text{inf.}\qquad 57)$$

Così pure, essendo

$$1\pm\frac{z^n}{v}\cos\varphi+\frac{z^{2n}}{v^2}\cos 2\varphi\pm\cdots\text{inf.}=\frac{1\mp\frac{z^n}{v}\cos\varphi}{1\mp\frac{2z^n}{v}\cos\varphi+\frac{z^{2n}}{v^2}}$$

$$\pm\frac{z^n}{v}\,\text{sen}\,\varphi+\frac{z^{2n}}{v^2}\,\text{sen}\,2\varphi\pm\cdots\text{inf.}=\frac{\pm\frac{z^n}{v}\,\text{sen}\,\varphi}{1\mp\frac{2z^n}{v}\cos\varphi+\frac{z^{2n}}{v^2}}$$

ponendo in ambedue i casi

$$\frac{v\mp\cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi}=\cot\omega$$

dove ω rappresenta un angolo ausiliare costante, si hanno le relazioni

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1\mp\frac{z^n}{v}\cos\varphi}{1\mp\frac{2z^n}{v}\cos\varphi+\frac{z^{2n}}{v^2}}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\Phi(u)-\frac{1}{v}\cdot\frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\omega}\Big\{\cos\omega\,\Phi(u+n)\pm\frac{1}{v}\cos(\varphi\mp\omega)\,\Phi(u+2n)+\frac{1}{v^2}\cos(2\varphi\mp\omega)\,\Phi(u+3n)\pm\cdots\text{inf.}\Big\}\qquad 58)$$

$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot\frac{1}{1\mp\frac{2z^n}{v}\cos\varphi+\frac{z^{2n}}{v^2}}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\,dz$$
$$=\Phi(u)-\frac{1}{\text{sen}\,\omega}\Big\{\frac{1}{v}\,\text{sen}\,(\varphi\mp\omega)\,\Phi(u+n)\pm\frac{1}{v^2}\,\text{sen}\,(2\varphi\mp\omega)\,\Phi(u+2n)+\cdots\text{inf.}\Big\}\qquad 59)$$

nel quale ultimo integrale, per maggiore regolarità, si è scritto u al posto di $u+n$.

Una formola consimile alla precedente è questa

$$\frac{z^n}{v}\,\text{sen}\,\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{2n}}{v^2}\,\text{sen}\,2\varphi+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{3n}}{v^3}\,\text{sen}\,3\varphi+\cdots\text{inf.}=\text{Arc. tg}\,\frac{\frac{z^n}{v}\,\text{sen}\,\varphi}{1-\frac{z^n}{v}\cos\varphi}$$

Partendo da questa formola, per applicarla alla relazione generale 16), si può porre

$$\frac{\frac{k}{k-1}\,v-\cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi}=\cot\omega_{k-1}$$

e si ha
$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot \text{Arc tg}\,\frac{z^n \operatorname{sen}\varphi}{v - z^n\cos\varphi}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\, dz$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\varphi}{v}\left\{\Phi(u+n) - \frac{1}{2v}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\omega_1)}{\operatorname{sen}\omega_1}\Phi(u+2n) - \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2\varphi-\omega_2)}{\operatorname{sen}\omega_2}\Phi(u+3n) - \cdots\right\} \quad 60)$$

In questa relazione l'angolo ausiliare ω varia di termine in termine, il che toglie alla formola una parte della sua trasparenza e le dà una eleganza più apparente che reale. Si può però scindere la serie in due, con che si ottiene
$$\int_0^1 z^{u-1}\cdot \text{Arc tg}\,\frac{z^n \operatorname{sen}\varphi}{v - z^n\cos\varphi}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\, dz$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\varphi}{v}\Phi(u+n) - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\left\{\frac{1}{2v^2}\operatorname{sen}(\varphi-\omega)\Phi(u+2n) + \frac{1}{3v^3}\operatorname{sen}(2\varphi-\omega)\Phi(u+3n) + \cdots \text{inf.}\right\}$$
$$- \left\{\frac{1}{1.2.v}\operatorname{sen}\varphi\,\Phi(u+2n) + \frac{1}{2.3.v^2}\operatorname{sen}2\varphi\,\Phi(u+3n) + \cdots \text{inf.}\right\} \quad 61)$$

dove
$$\cot\omega = \frac{v - \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$
per cui ω è un angolo ausiliare costante per tutti i termini della serie.

Ponendo finalmente
$$\log\sqrt{\frac{v+z}{v-z}} = \frac{z}{v} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{v^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^5}{v^5} + \cdots \text{inf.}$$
si ha
$$\int_0^1 z^{u-1}\log\sqrt{\frac{v+z}{v-z}}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\, dz$$
$$= \frac{1}{v}\left\{\Phi(u+n) - \Phi(u+2n)\right\} + \frac{1}{3v^3}\left\{\Phi(u+3n) - \Phi(u+4n)\right\} + \cdots \text{inf.} \quad 62)$$

Si osserverà la forma caratteristica, con cui la serie procede in 62), e cioè per differenze di due funzioni Φ n successive. Questo accade sempre, quando la serie, la cui somma figura sotto il segno dell'integrale, procede sia per potenze pari, sia per potenze dispari di z^n. Così per esempio, essendo note le relazioni
$$\cos\frac{z^n}{v} = 1 - \frac{1}{2\,!}\cdot\frac{z^{2n}}{v^2} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{z^{4n}}{v^4} - \cdots \text{inf.}$$
$$\operatorname{sen}\frac{z^n}{v} = \frac{1}{1\,!}\,\frac{z^n}{v} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{z^{3n}}{v^3} + \cdots \text{inf.}$$
si deducono facilmente gli integrali
$$\int_0^1 z^{u-1}\cos\frac{z^n}{v}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\, dz$$
$$= \frac{1}{0\,!\,v^0}\left\{\Phi(u) - \Phi(u+n)\right\} - \frac{1}{2\,!\,v^2}\left\{\Phi(u+2n) - \Phi(u+3n)\right\} + \cdots \text{inf.} \quad 63)$$
$$\int_0^1 z^{u-1}\operatorname{sen}\frac{z^n}{v}\cdot\frac{1-z^n}{(1-z)^2}\log z\, dz$$
$$= \frac{1}{1\,!\,v}\left\{\Phi(u+n) - \Phi(u+2n)\right\} - \frac{1}{3\,!\,v^3}\left\{\Phi(u+3n) - \Phi(u+4n)\right\} + \cdots \text{inf.} \quad 64)$$

Sviluppi consimili si possono continuare, per così dire, all'infinito. Non abbiamo bisogno di ripetere, che conviene badare sempre a che la serie, che ne risulta, conservi la sua convergenza. Tutte le serie, svolte in questo numero, sono convergenti per $v > 1$; talune di esse, come le 55), 56), 57) e 63), 64) anche per $v > 0$.

PARTE QUARTA

Calcolo numerico delle funzioni Φ.

1. Le serie infinite, svolte principalmente nella parte I. di questa Memoria, male si presterebbero al calcolo numerico delle funzioni Φ, perchè non sono abbastanza convergenti.

Dalla teoria delle funzioni Γ si ha la seguente relazione:

$$\log \Gamma(1+u) = -\mathrm{A}\,u + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}_2\,u^2 - \frac{1}{3}\,\mathrm{S}_3\,u^3 + \cdots (-1)^k \frac{\mathrm{S}_k}{k}\,u^k + \cdots \text{inf.} \qquad 1)$$

nella quale, al solito, A è la costante 0,577 215 664 901... e

$$\mathrm{S}_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots \text{inf.}$$

Questa serie infinita, convergente per $-1 < u < +1$, ha servito di punto di partenza per il calcolo numerico delle funzioni $\log \Gamma(1+u)$. Derivandola rispetto ad u, operazione lecita, perchè entro i limiti qui indicati la nuova serie si mantiene convergente, si ha

$$\mathrm{Z}(1+u) = -\mathrm{A} + \mathrm{S}_2\,u - \mathrm{S}_3\,u^2 + \cdots (-1)^k\ \mathrm{S}_k\,u^{k-1} + \cdots \text{inf.} \qquad 2)$$

e multiplicando per u e derivando ancora una volta rispetto ad u

$$\Phi(1+u) = -\mathrm{A} + 2\,\mathrm{S}_2\,u - 3\,\mathrm{S}_3\,u^2 + \cdots (-1)^k\,k\,\mathrm{S}_k\,u^{k-1} + \cdots \text{inf.} \qquad 3)$$

serie anche questa convergente entro i limiti sopraindicati.

2. L'espressione 3) non si presta, causa la sua poca convergenza, a calcoli numerici, tranne nel caso che u non superi forse il valore di $\frac{1}{10}$. Ma si può facilmente darle una forma, con cui quell'inconveniente è tolto.

Sciogliendo in serie orizzontali le singole $\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3 \ldots \mathrm{S}_k$, chiamando n un numero intero finito, mentre k è un numero d'ordine che va all'infinito, si ottiene il seguente quadro:

$$\begin{aligned}
\Phi(1+u) = -\mathrm{A} &+ 2\,u \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \text{inf.} \right\} \\
&- 3\,u^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots \text{inf.} \right\} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad 4) \\
&(-1)^k\,k u^{k-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+2)^k} + \cdots \text{inf.} \right\} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \text{inf.}
\end{aligned}$$

Prese per colonne verticali, le singole serie infinite sono tutte convergenti entro i limiti di u più volte accennati, e si possono facilmente sommare. Difatti per trovare la somma

$$\frac{2u}{n^2} - \frac{3u^2}{n^3} + \cdots (-1)^k \frac{ku^{k-1}}{n^k} + \cdots \text{inf.}$$

basta partire dalla progressione geometrica convergente

$$\left(\frac{u}{n}\right)^2 - \left(\frac{u}{n}\right)^3 + \cdots (-1)^k \left(\frac{u}{n}\right)^k + \cdots \text{inf.} = \frac{1}{n} \cdot \frac{u^2}{n+u}$$

e derivando rispetto ad u, si ha per la somma cercata $\frac{1}{n} - \frac{n}{(n+u)^2}$.

Se poniamo finalmente, per maggiore brevità

$$S_k^{(n)} = \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+2)^k} + \cdots \text{inf.}$$

con cui esprimiamo il concetto, che nel quadro soprastante fino al n^o termine sommiamo le serie in senso verticale, dal n^o termine in poi in senso orizzontale, abbiamo

$$\Phi(1+u) = -\left\{\frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(2+u)^2} + \cdots \frac{n}{(n+u)^2}\right\} + \left\{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}\right) - A\right\}$$
$$+ 2S_2^{(n)}u - 3S_3^{(n)}u^2 + \cdots \text{inf.} \qquad 5)$$

3. Questa espressione consta di un gruppo di n termini algebrici, di un secondo gruppo pure di n termini aritmetici e di una serie infinita. Quanto più n è grande, tanto più aumenta il numero dei termini algebrici, nojosi a calcolarsi, ma tanto più convergente diviene la serie infinita. Ponendo nella 5) $n = \infty$, i termini della serie infinita sono respinti all'infinito e non hanno più ragione di essere. Rammentando la relazione

$$\lim_{n=\infty}\left\{\log n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}\right)\right\} = -A$$

si ritorna alla nota espressione

$$\Phi(1+u) = \lim_{n=\infty}\left\{\log n - \left[\frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(2+u)^2} + \cdots \frac{n}{(n+u)^2}\right]\right\}$$

che non si presterebbe minimamente al calcolo nnmerico. Bisogna quindi mantenere a n un valore finito, e la scelta di questo valore dipende dall'estensione della tabella, che si vuol calcolare e dal grado di approssimazione, che si vuole raggiungere.

Per la tabella, che segue, ho trovato che bastava prendere $n = 1$, mantenendo però i valori di u entro i limiti più ristretti di $u = \pm \frac{1}{2}$. La 5) si trasforma quindi in

$$\Phi(1+u) = (1-A) - \frac{1}{(1+u)^2} + 2S_2'u - 3S_3'u^2 + 4S_4'u^3 - 5S_5'u^4 + \cdots \text{inf.} \qquad 6)$$

e ponendo in essa

$$\begin{aligned} 2S_2'u + 4S_4'u^3 + 6S_6'u^5 + \cdots \text{inf.} &= M \\ 3S_3'u^2 + 5S_5'u^4 + 7S_7'u^6 + \cdots \quad \text{»} &= N \end{aligned} \qquad 7)$$

dove M e N sono quantità essenzialmente positive, si ha scrivendo inoltre $-u$ per u

$$\left.\begin{aligned}\Phi(1+u)&=(1-\mathrm{A})-\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\mathrm{N}\right\}+\mathrm{M}\\ \Phi(1-u)&=(1-\mathrm{A})-\left\{\frac{1}{(1-u)^2}+\mathrm{N}\right\}-\mathrm{M}\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

colle quali formole il problema di calcolare le funzioni Φ sino ad $u=\frac{1}{2}$ è risoluto in modo soddisfacente. Si determinano simultaneamente i valori di

$$\Phi(1+u) \text{ e di } \Phi(1-u)$$

e le due serie in 7) sono abbastanza convergenti. Difatti per $u=\frac{1}{2}$ si ha

M	N
M = 0, 644 934 066 85	N = 0, 151 542 677 38
41 161 616 86	11 539 923 48
3 251 824 12	913 202 21
254 834 65	70 607 55
19 425 30	5 308 67
1 441 91	389 48
104 67	28 01
7 48	1 98
52	14
4	1
M = 0, 689 623 322 40	N = 0, 164 072 138 91

da cui

$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=+0,503\ 891\ 074\ 25, \qquad \Phi\left(\frac{1}{2}\right)=-4,430\ 911\ 126\ 21$$

4. In questo modo si calcolano i valori compresi tra $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$. Ma la tabella, per essere completa, deve comprendere due valori successivi e deve quindi andare da $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ a $\Phi\left(\frac{5}{2}\right)$. Ai rimanenti valori, da $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$ a $\Phi\left(\frac{5}{2}\right)$, si giunge col mezzo dell'espressione 59) parte I. Ponendo ivi

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{S}_2-1)+3u^2(\mathrm{S}_4-1)+5u^4(\mathrm{S}_6-1)+\cdots \text{ inf.}&=\mathrm{P}\\ 2u(\mathrm{S}_3-1)+4u^3(\mathrm{S}_5-1)+6u^5(\mathrm{S}_7-1)+\cdots \quad \text{»} \quad &=\mathrm{Q}\end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

dove P e Q sono quantità essenzialmente positive, e dove le quantità (S_2-1), (S_3-1)... hanno lo stesso significato delle S_2', S_3'... del numero precedente, si ha

$$\left.\begin{aligned}\Phi(2+u)&=\Phi(1+u)+\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\mathrm{P}\right\}-\mathrm{Q}\\ \Phi(2-u)&=\Phi(1-u)+\left\{\frac{1}{(1-u)^2}+\mathrm{P}\right\}+\mathrm{Q}\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

relazioni che hanno un andamento molto analogo alle 7) e 8) e permettono di calcolare, per così dire, simultaneamente i valori di $\Phi(2+u)$ e $\Phi(2-u)$. Le serie

in 9) sono convergenti per $u < 1$, ma come nelle 7), la convergenza è praticamente soddisfacente solo per $u \leq \frac{1}{2}$. Difatti per $u = \frac{1}{2}$ si hanno i seguenti termini

	P		Q
P =	0, 644 934 066 85	Q =	0, 202 056 903 16
	61 742 425 28		18 463 877 57
	5 419 706 87		1 565 489 51
	445 960 83		125 524 55
	34 965 51		9 652 12
	2 643 51		719 02
	194 39		52 28
	14 02		3 73
	99		26
	7		2
P =	0, 712 579 978 32	Q =	0, 222 222 222 22 [1]

da cui

$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = +0,503\ 891\ 074\ 22, \qquad \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = +0,438\ 693\ 274\ 80$$

Si calcolano così i valori compresi tra $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Phi\left(\frac{5}{2}\right)$. L'ultima decimale, naturalmente, è incerta.

5. Altre formole possono ancora servire per completare la tabella, calcolata nel modo indicato al num. 3, tra $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$. La relazione 13) parte I. può trascriversi nel doppio modo

$$\begin{aligned} \Phi(1+u) &= 4\Phi(2u) - \Phi(u) \qquad - 2\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right) - 4\log 2 \\ \Phi(u) &= 4\Phi(2u) - \Phi(1+u) - 2\Phi\left(u+\frac{1}{2}\right) - 4\log 2 \end{aligned} \tag{11}$$

Colla prima delle due, ponendo per u successivamente 0,50, 0,51,... 0,99, 1,00 si calcolano i valori compresi tra $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Phi(2)$; colla seconda, ponendo $u = 0,49$, 0,48 ... 0,01 si calcolano i valori compresi tra $\Phi(0)$ e $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$. Questa ultima parte di

[1] Da questo calcolo risulta che, compresa l'ultima decimale incerta, $Q = \frac{2}{9}$. È facile dimostrare che la serie in 9) per $u = \frac{1}{2}$ dà $Q = \frac{2}{9}$. Difatti, sottraendo le due formole 10) l'una dall'altra, ponendovi $u = \frac{1}{2}$ e considerando, che in questo caso speciale si ottiene il trinomio caratteristico

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) + \Phi\left(\frac{5}{2}\right) = -4,$$

con breve riduzione si giunge per Q al valore sopra indicato. Ne segue inoltre che

$$\sum_{1}^{\infty} {}_k \frac{k}{2^{2k-1}} S_{2k+1} = 1$$

tabella essendo molto incomoda, perchè i valori di $\Phi(u)$ in vicinanza di $u=0$ sono molto grandi (con segno negativo), si può passare col mezzo del trinomio

$$\Phi(u)-2\Phi(u+1)+\Phi(u+2)=-\frac{1}{u^2} \qquad 12)$$

ai valori compresi tra $\Phi(2)$ e $\Phi\left(\frac{5}{2}\right)$.

Questo modo di calcolare è bensì molto più breve del precedente, indicato al num. 4, ma è meno esatto; perchè trattandosi di sommare colle 11) tre funzioni Φ, una delle quali è multiplicata per 4, un'altra per 2, le incertezze dell'ultima decimale aumentano notevolmente e intaccano una e forse due decimali precedenti. Egli è per questa ragione, che ho preferito il metodo alquanto più lungo, ma più sicuro del num. 4.

6. Nella teoria delle funzioni Γ si dimostra la semplice ed elegante relazione

$$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} u\pi}, \quad 0<u<1$$

da cui, prendendo il logaritmo e derivando rispetto ad u

$$Z(u)-Z(1-u)=-\pi\cot u\pi \qquad 13)$$

Per passare alle rispettive funzioni Φ, multiplichiamo la 13) per $u(1-u)$ e deriviamo rispetto ad u, per cui

$$(1-u)\frac{d[u\,Z(u)]}{du}+u\frac{d[(1-u)\,Z(1-u)]}{-du}$$

$$-u\,Z(u)-(1-u)\,Z(1-u)=u(1-u)\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 u\pi}-(1-2u)\,\pi\cot u\pi$$

equazione, che tenuto conto della 13) si trasforma in

$$\Phi(2-u)=-\frac{1-u}{u}\Phi(1+u)+\frac{Z(u)}{u}+(1-u)\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 u\pi}+\pi\cot u\pi \qquad 14)$$

colla quale si ha una relazione tra due funzioni Φ e una funzione Z. Ne segue che tutte volte si conosca il valore di $\Phi(1+u)$, il valore di $\Phi(2-u)$ può essere calcolato, essendo noti i valori di $Z(u)$ dalla tabella di Gauss, rimanendo inteso che u rimane circoscritto entro i limiti $0<u<1$. Così, p. e. per $u=\frac{1}{2}$, si ha

$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=Z\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi^2}{4}$$

ed essendo
$$Z\left(\frac{1}{2}\right)=Z\left(\frac{3}{2}\right)-2=+0,036\ 489\ 973\ 98-2$$

si ha
$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=+0,503\ 891\ 074\ 25$$

da cui (parte I. num. 6)
$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=-4,430\ 911\ 126\ 29$$

come prima. La 14) può dunque servire di formola di controllo.

Nello stesso modo si ha per $u = \frac{1}{4}$

$$\Phi\left(\frac{7}{4}\right) = -3\,\Phi\left(\frac{5}{4}\right) + 4\,Z\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}\pi^2 + \pi$$

ed essendo
$$\Phi\left(\frac{5}{4}\right) = +0,071\ 878\ 755\ 26$$

$$Z\left(\frac{1}{4}\right) = -4,227\ 453\ 533\ 37\ 6$$

si trova
$$\Phi\left(\frac{7}{4}\right) = +0,820\ 548\ 855\ 94$$

valore che concorda perfettamente coi calcoli eseguiti per la tabella.

7. Mediante le formole 7), 8), 9) e 10) furono calcolati direttamente i valori della seguente tabella. I calcoli furono eseguiti a 11 decimali. Naturalmente questa ultima non è più esatta e può quindi alterare leggiermente la decima. I valori della tabella compresi tra $\Phi(0,50)$ e $\Phi(1,50)$ sono più esatti dei seguenti, perchè in questi ultimi figura un valore di $\Phi(1 \pm u)$ già calcolato, il quale aggiunge la propria incertezza a quella proveniente dal calcolo della serie. Per accertarsene anche meglio, furono calcolate le successive differenze a 10 decimali, l'undicesima essendo troppo incerta. Questa prova fu estesa in parte fino alle 6° differenze ed è di un controllo efficacissimo; perchè un errore $+\varepsilon$ commesso nella serie intacca sette 6° differenze di quantità espresse nel modo seguente

$$+\varepsilon,\ -6\varepsilon,\ +15\varepsilon,\ -20\varepsilon,\ +15\varepsilon,\ -6\varepsilon,\ +\varepsilon$$

Vi è dunque un termine che sente l'errore multiplicato per 20, ed è come se si osservasse con una lente a forte ingrandimento. Il risultato di tale studio fu, che le differenze non presentano saltellamenti che non si spieghino con errori di una o di due unità della 10ª. decimale. Tuttavia, siccome questa decimale non si mostrò interamente sicura, a tabella finita fu essa tagliata dai valori delle funzioni e delle loro differenze successive.

Come appare dalla tabella, i valori di $\Phi(u)$ procedono con grande regolarità. Negativi per $u < 1,21$ (essendo $\Phi(0) = -\infty$), per $u = 1,22$ sono già positivi e crescono lentamente, tendendo a $+\infty$ per $u = +\infty$. Si può chiedersi, quale sia il valore di u, per il quale $\Phi(u) = 0$. Con un metodo di approssimazioni successive si trova

$$\Phi(1,216\ 099\ 248....) = 0$$

I calcoli della tabella furono eseguiti dal sig. Enrico Maiolini. Colgo questa occasione per ringraziare il dott. Alfonso Sella, assistente all'Istituto fisico, per il concorso intelligente, spontaneo e volonteroso, che egli mi prestò coll'assumersi il compito lungo e penoso di rivedere e di controllare questi calcoli.

Roma, 25 luglio 1895.

Tabella contenente i valori di $\Phi(u)$
da $\Phi(0{,}50)$ sino a $\Phi(2{,}50)$

u	$\Phi(u)$	I. Diff. (+)	II. Diff. (—)	III. Diff. (—)	IV. Diff. (—)
0,50	—4,430 911 126	178 006 575	9 186 454	670 461	61 066
0,51	—4,252 904 551	168 820 121	8 515 992	609 396	54 481
0,52	—4,084 084 430	160 304 129	7 906 596	554 915	48 710
0,53	—3,923 780 301	152 397 533	7 351 682	506 205	43 643
0,54	—3,771 382 769	145 045 851	6 845 477	462 562	39 179
0,55	—3,626 336 918	138 200 374	6 382 915	423 384	35 241
0,56	—3,488 136 545	131 817 459	5 959 531	388 143	31 757
0,57	—3,356 319 086	125 857 928	5 571 389	356 385	28 671
0,58	—3,230 461 158	120 286 539	5 215 003	327 715	25 928
0,59	—3,110 174 618	115 071 536	4 887 289	301 787	23 488
0,60	—2,995 103 082	110 184 248	4 585 502	278 298	21 313
0,61	—2,884 918 835	105 598 746	4 307 204	256 986	19 368
0,62	—2,779 320 089	101 291 542	4 050 218	237 618	17 631
0,63	—2,678 028 546	97 241 325	3 812 600	219 987	16 069
0,64	—2,580 787 222	93 428 725	3 592 612	203 918	14 670
0,65	—2,487 358 497	89 836 113	3 388 694	189 249	13 410
0,66	—2,397 522 384	86 447 419	3 199 445	175 838	12 275
0.67	—2,311 074 965	83 247 974	3 023 607	163 563	11 251
0,68	—2,227 826 991	80 224 367	2 860 044	152 312	10 326
0,69	—2,147 602 624	77 364 323	2 707 732	141 986	9 489
0,70	—2,070 238 301	74 656 591	2 565 746	132 497	8 729
0,71	—1,995 581 709	72 090 845	2 433 249	123 768	8 041
0,72	—1,923 490 864	69 657 596	2 309 481	115 727	7 415
0,73	—1,853 833 268	67 348 115	2 193 755	108 312	6 846
0,74	—1,786 485 152	65 154 361	2 085 443	101 466	6 326
0,75	—1,721 330 792	63 068 918	1 983 976	95 140	5 853

u	Φ(u)	I. Diff. (+)	II. Diff. (—)	III. Diff. (—)	IV. Diff. (—)
0,76	— 1,658 261 874	61 084 942	1 888 836	89 287	5 420
0,77	— 1,597 176 932	59 196 106	1 799 549	83 867	5 025
0,78	— 1,537 980 826	57 396 557	1 715 682	78 841	4 663
0,79	— 1,480 584 269	55 680 875	1 636 841	74 178	4 331
0,80	— 1,424 903 394	54 044 034	1 562 663	69 847	4 027
0,81	— 1,370 859 360	52 481 371	1 492 816	65 820	3 747
0,82	— 1,318 377 989	50 988 556	1 426 996	62 073	3 490
0,83	— 1,267 389 433	49 561 560	1 364 923	58 582	3 254
0,84	— 1,217 827 873	48 196 637	1 306 341	55 328	3 036
0,85	— 1,169 631 236	46 890 296	1 251 013	52 293	2 835
0,86	— 1,122 740 941	45 639 283	1 198 720	49 458	2 650
0,87	— 1,077 101 658	44 440 563	1 149 262	46 809	2 478
0,88	— 1,032 661 094	43 291 301	1 102 453	44 331	2 319
0,89	— 0,989 369 794	42 188 848	1 058 122	42 012	2 172
0,90	— 0,947 180 946	41 130 725	1 016 111	39 839	2 037
0,91	— 0,906 050 221	40 114 615	976 271	37 803	1 911
0,92	— 0,865 935 606	39 138 343	938 468	35 892	1 794
0,93	— 0,826 797 263	38 199 875	902 576	34 099	1 685
0,94	— 0,788 597 388	37 297 299	868 477	32 414	1 584
0,95	— 0,751 300 088	36 428 822	836 063	30 830	1 490
0,96	— 0,714 871 266	35 592 760	805 233	29 340	1 402
0,97	— 0,679 278 507	34 787 527	775 892	27 938	1 322
0,98	— 0,644 490 980	34 011 635	747 954	26 617	1 245
0,99	— 0,610 479 345	33 263 680	721 338	25 372	1 175
1,00	— 0,577 215 665	32 542 342	695 966	24 197	1 108
1,01	— 0,544 673 323	31 846 376	671 769	23 089	1 046
1,02	— 0,512 826 947	31 174 607	648 680	22 043	989
1,03	— 0,481 652 340	30 525 927	626 638	21 054	935
1,04	— 0,451 126 413	29 899 289	605 584	20 119	884
1,05	— 0,421 227 124	29 293 705	585 464	19 235	836
1,06	— 0,391 933 419	28 708 241	566 229	18 399	793
1,07	— 0,363 225 178	28 142 012	547 830	17 606	751
1,08	— 0,335 083 166	27 594 182	530 224	16 856	711
1,09	— 0,307 488 984	27 063 958	513 368	16 145	675
1,10	— 0,280 425 025	26 550 591	497 223	15 470	640

u	Φ(u)	I. Diff. (+)	II. Diff. (−)	III. Diff. (−)	IV. Diff. (−)
1,11	−0,253 874 435	26 053 367	481 753	14 830	608
1,12	−0,227 821 067	25 571 614	466 924	14 222	577
1,13	−0,202 249 453	25 104 690	452 702	13 645	549
1,14	−0,177 144 763	24 651 988	439 058	13 096	521
1,15	−0,152 492 775	24 212 930	425 962	12 574	496
1,16	−0,128 279 845	23 786 969	413 388	12 078	472
1,17	−0,104 492 876	23 373 581	401 310	11 606	450
1,18	−0,081 119 295	22 972 272	389 703	11 157	428
1,19	−0,058 147 024	22 582 568	378 547	10 729	408
1,20	−0,035 564 456	22 204 022	367 818	10 321	388
1,21	−0,013 360 434	21 836 204	357 497	9 932	371
1,22	+0,008 475 770	21 478 707	347 565	9 561	354
1,23	+0,029 954 476	21 131 141	338 004	9 207	337
1,24	+0,051 085 618	20 793 138	328 797	8 870	322
1,25	+0,071 878 755	20 464 341	319 927	8 548	308
1,26	+0,092 343 096	20 144 414	311 379	8 240	295
1,27	+0,112 487 510	19 833 035	303 140	7 945	281
1,28	+0,132 320 545	19 529 895	295 195	7 664	270
1,29	+0,151 850 441	19 234 701	287 530	7 395	257
1,30	+0,171 085 142	18 947 171	280 136	7 138	246
1,31	+0,190 032 312	18 667 035	272 998	6 891	236
1,32	+0,208 699 347	18 394 037	266 107	6 656	226
1,33	+0,227 093 384	18 127 931	259 451	6 430	218
1,34	+0,245 221 315	17 868 480	253 021	6 213	205
1,35	+0,263 089 795	17 615 459	246 808	6 007	200
1,36	+0,280 705 254	17 368 651	240 801	5 807	191
1,37	+0,298 073 905	17 127 850	234 994	5 617	182
1,38	+0,315 201 756	16 892 857	229 377	5 434	176
1,39	+0,332 094 612	16 663 480	223 943	5 258	168
1,40	+0,348 758 092	16 439 537	218 684	5 090	162
1,41	+0,365 197 628	16 220 852	213 594	4 928	155
1,42	+0,381 418 481	16 007 258	208 666	4 773	149
1,43	+0,397 425 739	15 798 593	203 893	4 624	143
1,44	+0,413 224 332	15 594 700	199 269	4 480	138
1,45	+0,428 819 032	15 395 432	194 788	4 343	133

u	$\Phi(u)$	I. Diff. (+)	II. Diff. (—)	III. Diff. (—)	IV. Diff. (—)
1,46	+ 0,444 214 464	15 200 643	190 446	4 210	128
1,47	+ 0,459 415 107	15 010 198	186 236	4 082	123
1,48	+ 0,474 425 305	14 823 962	182 154	3 959	118
1,49	+ 0,489 249 266	14 641 808	178 194	3 842	114
1,50	+ 0,503 891 074	14 463 614	174 353	3 727	109
1,51	+ 0,518 354 688	14 289 261	170 626	3 618	106
1,52	+ 0,532 643 948	14 118 635	167 008	3 512	102
1,53	+ 0,546 762 583	13 951 627	163 495	3 411	98
1,54	+ 0,560 714 211	13 788 132	160 085	3 313	95
1,55	+ 0,574 502 343	13 628 048	156 772	3 218	91
1,56	+ 0,588 130 391	13 471 276	153 554	3 127	88
1,57	+ 0,601 601 666	13 317 722	150 427	3 039	84
1,58	+ 0,614 919 388	13 167 295	147 388	2 954	82
1,59	+ 0,628 086 682	13 019 907	144 434	2 872	79
1,60	+ 0,641 106 589	12 875 473	141 562	2 793	76
1,61	+ 0,653 982 061	12 733 911	138 768	2 717	74
1,62	+ 0,666 715 973	12 595 143	136 051	2 643	72
1,63	+ 0,679 311 115	12 459 092	133 408	2 572	69
1,64	+ 0,691 770 207	12 325 684	130 836	2 503	67
1,65	+ 0,704 095 891	12 194 848	128 333	2 437	64
1,66	+ 0,716 290 739	12 066 516	125 896	2 373	63
1,67	+ 0,728 357 255	11 940 620	123 523	2 310	60
1,68	+ 0,740 297 875	11 817 097	121 213	2 251	58
1,69	+ 0,752 114 972	11 695 884	118 962	2 192	56
1,70	+ 0,763 810 856	11 576 922	116 770	2 136	54
1,71	+ 0,775 387 778	11 460 152	114 634	2 082	52
1,72	+ 0,786 847 930	11 345 518	112 553	2 029	51
1,73	+ 0,798 193 448	11 232 966	110 523	1 978	49
1,74	+ 0,809 426 414	11 122 442	108 546	1 929	48
1,75	+ 0,820 548 856	11 013 897	106 617	1 881	47
1,76	+ 0,831 562 753	10 907 279	104 736	1 834	45
1,77	+ 0,842 470 032	10 802 543	102 902	1 789	43
1,78	+ 0,853 272 575	10 699 641	101 113	1 746	42
1,79	+ 0,863 972 215	10 598 528	99 367	1 704	41
1,80	+ 0,874 570 743	10 499 161	97 663	1 663	40

u	Φ(u)	I. Diff. (+)	II. Diff. (—)	III. Diff. (—)	IV. Diff. (—)
1,81	+0,885 069 904	10 401 498	96 000	1 623	38
1,82	+0,895 471 402	10 305 498	94 377	1 585	37
1,83	+0,905 776 900	10 211 120	92 793	1 547	36
1.84	+0,915 988 020	10 118 328	91 245	1 511	35
1,85	+0,926 106 348	10 027 083	89 734	1 476	34
1.86	+0,936 133 431	9 937 349	88 258	1 442	33
1.87	+0,946 070 780	9 849 091	86 816	1 409	32
1.88	+0,955 919 871	9 762 275	85 407	1 377	31
1.89	+0,965 682 146	9 676 868	84 030	1 345	30
1.90	+0,975 359 014	9 592 837	82 685	1 315	30
1.91	+0,984 951 851	9 510 152	81 370	1 286	29
1.92	+0,994 462 003	9 428 783	80 084	1 257	28
1,93	+1,003 890 786	9 348 699	78 827	1 229	27
1,94	+1,013 239 485	9 269 872	77 598	1 203	27
1,95	+1,022 509 356	9 192 274	76 395	1 176	25
1,96	+1.031 701 630	9 115 878	75 220	1 151	25
1,97	+1,040 817 508	9 040 659	74 069	1 126	24
1,98	+1,049 858 167	8 966 590	72 944	1 101	23
1,99	+1,058 824 756	8 893 646	71 842	1 078	23
2,00	+1,067 718 402	8 821 804	70 764	1 055	22
2,01	+1,076 540 206	8 751 040	69 709	1 033	22
2,02	+1,085 291 245	8 681 330	68 676	1 011	21
2,03	+1,093 972 576	8 612 654	67 665	990	20
2,04	+1,102 585 229	8 544 989	66 675	970	20
2,05	+1,111 130 218	8 478 313	65 706	950	19
2,06	+1,119 608 531	8 412 608	64 756	930	19
2,07	+1,128 021 139	8 347 851	63 826	911	19
2,08	+1,136 368 990	8 284 025	62 915	893	18
2,09	+1,144 653 015	8 221 110	62 022	875	17
2,10	+1,152 874 126	8 159 088	61 148	857	17
2,11	+1,161 033 214	8 097 940	60 290	840	16
2,12	+1,169 131 154	8 037 650	59 450	824	16
2,13	+1,177 168 804	7 978 200	58 627	807	16
2,14	+1,185 147 004	7 919 573	57 820	791	15
2,15	+1,193 066 577	7 861 754	57 028	776	15

u	Φ(u)	I. Diff. (+)	II. Diff. (—)	III. Diff. (—)	IV. Diff. (—)
2,16	+ 1,200 928 331	7 804 726	56 252	761	15
2,17	+ 1,208 733 056	7 748 474	55 491	746	14
2,18	+ 1,216 481 530	7 692 983	54 745	732	14
2,19	+ 1,224 174 512	7 638 238	54 013	718	13
2,20	+ 1,231 812 750	7 584 225	53 295	705	13
2,21	+ 1,239 396 975	7 530 931	52 590	691	13
2,22	+ 1,246 927 906	7 478 341	51 899	678	13
2,23	+ 1,254 406 247	7 426 442	51 221	666	12
2,24	+ 1,261 832 689	7 375 221	50 555	653	12
2,25	+ 1,269 207 910	7 324 666	49 902	641	12
2,26	+ 1,276 532 576	7 274 765	49 261	629	11
2,27	+ 1,283 807 341	7 225 504	48 631	618	11
2,28	+ 1,291 032 845	7 176 873	48 013	607	12
2,29	+ 1,298 209 717	7 128 859	47 406	596	11
2,30	+ 1,305 338 577	7 081 453	46 811	585	10
2,31	+ 1,312 420 030	7 034 642	46 226	575	10
2,32	+ 1,319 454 672	6 988 416	45 651	565	10
2,33	+ 1,326 443 088	6 942 765	45 087	554	10
2,34	+ 1,333 385 853	6 897 678	44 533	544	9
2,35	+ 1,340 283 531	6 853 146	43 988	535	9
2,36	+ 1,347 136 677	6 809 157	43 453	526	10
2,37	+ 1,353 945 834	6 765 704	42 927	516	9
2,38	+ 1,360 711 539	6 722 777	42 411	508	9
2,39	+ 1,367 434 316	6 680 367	41 903	499	9
2,40	+ 1,374 114 682	6 638 463	41 404	490	8
2,41	+ 1,380 753 146	6 597 059	40 914	483	9
2,42	+ 1,387 350 205	6 556 146	40 431	474	8
2,43	+ 1,393 906 351	6 515 714	39 958	466	8
2,44	+ 1,400 422 065	6 475 756	39 492	458	7
2,45	+ 1,406 897 821	6 436 265	39 034	451	8
2,46	+ 1,413 334 085	6 397 231	38 583	443	7
2,47	+ 1,419 731 316	6 358 648	38 140	436	7
2,48	+ 1,426 089 964	6 320 508	37 705	429	7
2,49	+ 1,432 410 472	6 282 803	37 276	422	7
2,50	+ 1,438 693 275	6 245 527	36 854	415	7

Commemorazione del Socio GIUSEPPE BATTAGLINI letta dal Socio E. D'OVIDIO

nella seduta dell' 8 giugno 1895.

Notizie biografiche.

Giuseppe Battaglini nacque a Napoli gli 11 Gennaio 1826 da Francesco Battaglini e Luisa Tofano, ma fece gli studî di coltura generale a Martina Franca in provincia di Lecce presso l'avo paterno; e quando ritornò a Napoli si avviò agli studî matematici nella Scuola privata dei professori Tucci e de Angelis, per prepararsi al concorso di ammissione alla Regia Scuola di Ponti e Strade. L'Università napoletana in quel tempo languiva, trascurata dal Governo borbonico non meno ombroso che pigro, e la Scuola speciale di Ponti e Strade era il solo istituto pubblico ove a pochi eletti giovani fosse concesso studiare la Geometria descrittiva, la Meccanica razionale e poi le Matematiche applicate. D'altra parte nelle scuole secondarie dello Stato scarso era l'insegnamento della Matematica elementare, nonchè di altre discipline. A queste lacune sopperiva l'insegnamento privato, che per antica tradizione era in Napoli assai sviluppato, e lo Studio privato di matematiche Tucci-de Angelis era quello che godeva miglior riputazione allorchè il Battaglini prese a frequentarlo. Ivi egli fu « facile princeps » fra i condiscepoli; ma, non pago di quel che gli s'insegnava, molto leggeva per proprio conto, sebbene dai docenti, anzichè aiuto a superare le difficoltà che gli si paravano innanzi, avesse piuttosto avuto il consiglio di rinunziare a quel « lusso di scienza ». Il che mostra che l'insegnamento privato era ancor lontano da quel grado di estensione e di splendore cui lo portò alcuni anni appresso lo zelo generoso e progressivo di Achille Sannia.

Il Battaglini entrò nella Scuola di Ponti e Strade nel 1844; ma, percorso il quadriennio regolamentare, e non vacando alcun posto d'ingegnere dello Stato, fu invitato a concorrere con altri al grado di guardia marina, il che egli non volle; e veramente chiunque abbia conosciuto l'uomo, così mite, così amante dello studio, così alieno da ogni rumore, stenterà a immaginarselo corrente per i mari su una nave catafratta di

arnesi guerreschi. Ottenne invece il posto di alunno dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte, e lo tenne alcuni mesi. Ma, sopraggiunta la reazione borbonica contro i moti e gli ordinamenti liberali, e rimosso dalla direzione dell'Osservatorio il Capocci, pretendeva il nuovo direttore Del Re che i suoi dipendenti firmassero una domanda a Ferdinando II perchè abolisse la costituzione poco innanzi giurata; il Battaglini rifiutò la firma e volontariamente si dimise dall'alunnato.

Un simile atto, spirante nobiltà di animo, disinteresse, amor di patria, fu il degno preludio di una vita virtuosa e tutta consacrata al pubblico bene; tanto più degno, in quanto egli lo compì senza sforzo e senza jattanza, con la semplicità che è specchio del vero coraggio.

Rimasto senza impiego, si diede ad imparar da sè le lingue inglese e tedesca per seguire il progresso delle scienze matematiche, e insieme a dar lezioni private. Scarseggiavano i mezzi di studio; ma in convegni quasi segreti si adunavano con lui pochi amanti delle Matematiche, ed egli, benchè il più giovane, era quello che li informava (com'ebbe a narrare il del Grosso, non facile lodatore per fermo) delle scoperte che gli era venuto fatto di appurare. Mancava la protezione dei professori provetti; e infatti in un pubblico concorso, avendo il Battaglini svolta una tesi sui diametri secondo il « Treatise on higher plane curves », allora di fresco uscito, del Salmon, anzichè secondo le opere di Newton, come i giudici del concorso si aspettavano, rimase ingiustamente soccombente. Ma abbondavano l'amore ardente alla scienza e la tenacia dei propositi; e il valoroso giovane cominciò a pubblicamente affermarsi con alcune pregevoli note geometriche, la prima delle quali è del 1851 e risolve il problema d'iscrivere in una quadrica un poligono i cui lati passino per punti dati.

Lo sostenne certo la speranza di tempi migliori; nè fu fallace.

Non appena il da molti anni sospirato Plebiscito del 21 Ottobre 1860 ebbe riunite politicamente le provincie meridionali al Regno d'Italia, il Governo di Vittorio Emanuele diè opera a riordinare l'Università di Napoli, e volle rinsanguarla di nuovi e vigorosi elementi. Uno di questi fu il Battaglini, il quale con decreto dittatoriale del 29 Ottobre 1860 fu scelto a professore ordinario di Geometria superiore; cattedra affatto nuova, che a lui toccò l'onore meritato d'inaugurare. Ed egli fu insegnante pieno di zelo, ed io ricordo ancora con intima gioia quei begli anni che l'ebbi, insieme con altri pochi, maestro. Fu allora che egli si diede a tutt'uomo alle ricerche geometriche, pubblicando nei volumi della rinnovellata Accademia delle Scienze napoletana, che si era affrettata ad associarselo, una fitta serie di lavori notevoli per eleganza e unità di metodo, i quali resero il suo nome altamente pregiato non soltanto in tutta Italia, ma altresì all'estero.

Fu anche in quel torno (Gennaio 1863) che egli fondò con altri benemeriti scienziati napoletani il « Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane », il quale diresse dalla fondazione finchè gli bastò la vita, per ben 31 anni, essendone anche strenuo collaboratore, segnatamente nei primi volumi. In cotesta impresa come nell'insegnamento, ciò che costantemente lo sospinse e guidò fu un amore intenso, disinteressato per la scienza, un desiderio vivissimo che l'Italia si affermasse fra le nazioni più colte ed operose, che ai giovani cultori italiani della Matematica non facessero difetto quei mezzi di rapidamente apprendere le più recenti scoperte

e di sottoporre al giudizio del pubblico i risultati delle proprie ricerche, i quali abbondavano in Francia, in Germania, in Inghilterra. Benchè un simil programma fosse assai più modesto di quello degli « Annali di Matematica » di Tortolini e Brioschi, destinati esclusivamente a ricerche originali, pure la sua attuazione avrebbe reclamato la continua collaborazione dei più autorevoli professori per esporvi i metodi più nuovi e fecondi, nonchè un diligente e severo esame dei lavori dei giovani autori prima di ammetterli alla inserzione; ma a ciò non erano adeguati i mezzi, nè bastava il lavoro di un solo. A ogni modo il Giornale fu palestra aperta a non pochi venuti poi in fama, e molto giovò alla diffusione della coltura matematica; e più ancora potrà giovare in avvenire, grazie alle migliorate condizioni della produzione scientifica e letteraria appo noi ed alle cure di chi ne continua la pubblicazione (1).

Divenuta Roma capitale del nuovo Regno, il Battaglini accettò nel 1871 di trasferirsi nel restaurato Ateneo della Sapienza, del quale fu anche Rettore nel 1873-74. Vi andò invitato dal Governo, per consiglio del Brioschi, il quale, avendo compreso che la nuova êra schiudentesi alla eterna città dovesse aver per insegna non più l'aquila della guerra ma quella della scienza, cercò di raccogliervi i campioni più gagliardi, e fra essi colui che in Napoli era stato l'aquilifero della nuova Geometria e della nuova Algebra. In Roma si esplicò più potentemente l'efficacia didattica di lui, avvalorata dal proposito di cooperare perchè fra i matematici di maggior fama la nuova Italia potesse contarne non pochi di suoi (2).

Le lezioni del Battaglini erano preparate con cura, e sovente anche scritte, sebbene egli non vi trattasse solitamente teorie ancora in via di formazione, e molto meno le sue proprie ricerche, come pur sarebbe stato desiderabile e giusto; ma diceva modestamente: « il nostro lavoro è zavorra per i venturi ». Sovente seguiva da vicino un trattato dei più cospicui (*Chasles*, *Salmon*, *Clebsch*, *Netto*, . . .). Discorreva alla buona; non si fermava in disquisizioni sui principî della scienza, nè si piccava di pieno rigore; a certi dubbî di un mio condiscepolo, lo udii una volta rispondere con l'impazienza di un artista: « ma bisogna pure abbandonarsi alla generalità delle formole »; un'altra volta mi scrisse a proposito di certe lunghe discussioni: « ma vi è tanto da fare nella scienza *vera*, che si potrebbero lasciar da parte le quistioni sui fondamenti della scienza ».

Ciò che sovrattutto rendeva prezioso frequentare il Battaglini era la sua conversazione, spirante giovanile ardore per la scienza, indicante le questioni che più gli parevano degne degli sforzi dei giovani, benevola verso tutti, e segnatamente verso i dotti che più onoravano il paese. Era poi così modesto da porre in dubbio perfino la sua vocazione per la Matematica, vocazione che pure era a tutti palese. È vero che essa non escludeva che egli coltivasse quasi segretamente, ma avidamente, la Filosofia

(1) È questi l'egregio prof. A. Capelli dell'Università di Napoli.

(2) Andò a Roma come ordinario di Geometria superiore e incaricato di Calcolo infinitesimale (Decr. 23 ott. e 25 nov. 1871). Poco di poi scambiò i due ufficî (Decr. 27 ag. e 25 nov. 1872). In seguito passò come ordinario alla Geometria analitica (Decr. 8 Ott. 1878). Come incaricato insegnò ora la Meccanica applicata alle costruzioni, ora l'Analisi superiore, ora indistintamente Matematiche superiori. Fu Preside della Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali per tre triennii, e Direttore della Scuola di Magistero della Facoltà.

e la Letteratura; nè certo poteva la marmorea serenità della Geometria riempiere tutta quanta l'anima sua, aperta ad ogni manifestazione del bello artistico.

A Roma durò parecchi anni l' operosità del Battaglini come scrittore. Eletto nel 1872 Socio di questa nazionale Accademia dei Lincei, pubblicò nei volumi di essa varî lavori, pur continuando a comunicarne all' Accademia di Napoli. È del 1879 l'elegantissima memoria inserita nelle « Collectanea mathematica in honorem D. Chelini ».

Nel 1885, cedendo ai voti ripetuti degli antichi colleghi, il Battaglini fece ritorno all'Università di Napoli, ove conservò il doppio insegnamento sotto le diverse denominazioni di Calcolo infinitesimale, di Analisi superiore, di Matematiche complementari, di Meccanica superiore. Lo persuase a ritornare la speranza di trovare nella dolcezza del clima nativo un riparo ai disordini che cominciavano a mostrarsi nel suo organismo, un ristoro all' affievolirsi della già robusta sua fibra. Ma non valse il clima, non valsero le cure dell'arte medica nè la vigile asssistenza de' suoi cari a vincere il morbo che lo travagliava.

Nel 1892 era già così svigorito da dover abbandonare il Consiglio superiore della pubblica Istruzione, al quale le Facoltà universitarie lo avevano eletto rappresentante. « Vi scrive un prossimo a morte », diceva in una lettera piena di benevolenza a chi ebbe l'onore di succedergli, « e pure speravo di poter lavorare ancora per qualche anno ». Ed accennando, pur fra i suoi dolori, alla « Teoria delle trasformazioni » del *Lie*, esclamava « io sono un'invalido di corpo e di spirito; non potendo lavorare io stesso, vedrei però con grandissimo piacere diffondersi tra noi le moderne teorie matematiche, nelle quali riposa l'avvenire della scienza ». L'entusiastico amore per gli studi non si smentì in lui sino all'ultimo, caro e illustre maestro! La mattina del 29 aprile 1894 espresse ancora il rammarico di non poter riprendere le antiche occupazioni, poi si assopì e spirò.

« La morte è per gli studiosi più angosciosa che per tutti gli altri; giacchè essi durante la vita hanno fatto un continuo chiedersi se questa basterebbe a raggiunger la meta che si proponevano, e la meta s'è sempre più dilungata da loro, e nel momento fatale a tutti gli altri strazî che la morte dà a ciascun uomo si vedono aggiunto quello di non aver percorsa tutta la via, al cui termine si affrettavano con lena affannata (¹) ». Purtroppo è così; ma la triste realtà non ci faccia ingiusti verso la scienza incolpandola di bancarotta: non imputiamo a sua colpa le nostre proprie illusioni.

Il Battaglini fu uomo di una grande semplicità e bontà di cuore, di carattere schiettissimo. Tutte coteste preclare sue doti apparivano manifeste nello sguardo vivace, nella parola oltremodo franca, nei modi bonarî. Fu sposo e padre affettuosissimo, specchio di virtù domestiche e civili. Alieno dal farsi avanti, nonchè dal soverchiare, non cercò onori e fasto, non visse che per lo studio e per la scuola. Per lui insegnare fu un bisogno della mente e del cuore. Perciò raccolse dovunque viva simpatia e profonda riverenza fra i colleghi e i tanti giovani che amorosamente indirizzò nelle vie della scienza; perciò sarà sempre ricordato con gratitudine ed affetto.

(¹) F. d'Ovidio, *Cenno necrologico di A. Sannia.*

Quadro dei lavori del Battaglini.

All'annunzio della morte dell'insigne uomo, d'ogni parte si elevarono voci a deplorarla; e sovra tutte quelle di antichi suoi discepoli sparsi nei molti sodalizî scientifici che, rendendo omaggio non meno al poderoso ingegno che all'infaticata opera sua nel promuovere gli alti studî, lo avevano iscritto fra i loro socî [1]. Esaltarono essi le salde virtù e le grandi benemerenze dell'estinto; ma delle tante Memorie e Note da lui pubblicate non poterono fare se non rapidi e sommarî accenni, quali il momento consentiva. Onorato dal nostro illustre Presidente del mandato di commemorare Giuseppe Battaglini, io l'accettai, non senza trepidazione, ma come un sacro dovere. Distribuire in varî gruppi i lavori del compianto nostro Socio, a seconda degli argomenti che trattano; prendere in diligente esame i singoli gruppi; porne in rilievo i risultati più cospicui e caratteristici; ecco quello che ancora era da fare. Ed era giusto ed utile che si facesse.

Invero le scritture del Battaglini avevano avuto meno attenti lettori di quel che meritassero, e però era atto di giustizia richiamare sopra di esse l'attenzione dei cultori della Geometria, e segnatamente dei più giovani. Inoltre, avendo egli scritto su diversi argomenti a varie riprese e considerandone or questa or quella parte, a chiunque abbia ad occuparsi di quegli argomenti medesimi riescirà più agevole riconoscere e stimare il contributo recato dal nostro quando ne abbia sott'occhio un riassunto.

Le scritture del Battaglini avrebbero certamente avuto maggior efficacia, se egli, facendo forza alla naturale modestia che lo tratteneva così dall'accennare alla propria opera come dal criticare l'altrui, avesse avuto cura d'indicare volta per volta quel ch'egli andava aggiungendo di nuovo al già noto, e quali erano le sue opinioni sui lavori precedenti di altri autori intorno ad analoghi soggetti; se non avesse spinto tant'oltre il culto per la legge di dualità che governa oggidì la Geometria, da dovere ad ogni piè sospinto alternare frasi, notazioni e formole duali, turbando il corso naturale dell'esposizione ed inducendo nella mente del lettore una certa inquietezza che presto lo stancava.

Ma, prescindendo da coteste esagerazioni, che vigore d'intuizione geometrica, che eleganza e sicurezza di calcolo, che unità di metodo, che spirito di generalizzazione! E si aggiunga, che operosità! Sono circa 90 lavori, pubblicati durante un quarantennio, dal 1851 al 1892; e molti fra essi sono ampie monografie, così coordinate da poter costituire una parte considerevole di un trattato; il quale, specie nel tempo cui esse

[1] Oltre che socio delle Accademie dei Lincei e di Napoli, fu uno dei XL della Società italiana delle Scienze, socio nazionale dell'Accademia delle Scienze di Torino, corrispondente dell'Istituto lombardo, del veneto e del bolognese, membro onorario delle Società di Bordeaux e Praga, ecc., professore onorario dell'Università di Kasan. Ebbe la croce di cavaliere dell'Ordine civile di Savoia.

Cenni necrologici comunicarono Pinto (Acc. di Napoli), d'Ovidio (Acc. di Torino), Torelli (Circ. mat. di Palermo), Pascal (Rivista mat.), Capelli (Giornale di mat.), ccc.

si riferiscono, sarebbe riuscito di molta importanza ed utilità, ed avrebbe allargata la cerchia dei lettori e degli ammiratori del dotto autore.

Tutti, o quasi, cotesti lavori furono inseriti negli Annali di Matematica del Tortolini, nei volumi dell'Accademia delle Scienze di Napoli e in quelli dei Lincei; e la maggior parte furono dall'autore riprodotti nel suo Giornale. Ivi egli propose anche, specie nei primi anni, parecchie quistioni geometriche e parecchie ne risolse di Cremona, Sylvester, Cayley e di sè stesso; ivi tradusse in italiano gli opuscoli di Lobatschewsky e Bolyai; ed ivi pubblicò la prima sezione di una « Geometria analitica cartesiana », che tratta di punti, rette, piani, circoli e sfere. A parte pubblicò per le scuole traduzioni di trattati inglesi di Todhunter ed altri (1), nonchè dell'importante « Teoria delle sostituzioni » del Netto.

I lavori del Battaglini si possono distribuire nei seguenti gruppi:

1° Sulle forme geometriche di 1ª specie;

2° Sulle forme algebriche binarie;

3° Sulle forme geometriche di 2ª specie;

4° Sulle forme algebriche ternarie;

5° Sui complessi di rette;

6° Sull'applicazione della Geometria della retta alla Meccanica, e su altre questioni di Meccanica;

7° Sulla Geometria non-euclidea;

8° Sui connessi;

9° Sulle curve e superficie di gradi superiori;

10° Sulle curve e superficie di 2° grado;

11° Lavori varî.

La nostra attenzione dee rivolgersi segnatamente ai primi sette gruppi, come quelli che comprendono i lavori più ampî ed organici, e che al tempo in cui comparvero destarono maggior interesse, sia per la novità dei risultati, sia per la introduzione di nuovi concetti, sia pel modo luminoso con cui coordinavano cose già acquisite alle singole teorie.

I lavori del 1° e 3° gruppo sulle forme geometriche, e quelli del 9° e 10° sulle curve e superficie, attestano come la mente geometrica del Battaglini si fosse educata principalmente sulle classiche opere di Chasles, Möbius, Steiner: dai due primi ritraendo la maniera analitica di trattazione, la copia delle relazioni basate su rapporti anarmonici; dal terzo il gusto delle quistioni brillanti e vitali sulle curve e superficie, specie di 2° grado. Il metodo puramente geometrico di Staudt meno si attagliava alla sua indole; ed anzi tentò egli di stabilire la Geometria proiettiva generale, cioè indipendente dal postulato delle parallele, sul concetto delle reti geometriche di Möbius, per via diversa da quella aperta da Staudt e compiuta poscia da Klein.

Il 2° e il 4° gruppo son dedicati alla teoria delle forme algebriche, della quale son fatte altresì continue applicazioni negli altri gruppi. In tale teoria la mente del

(1) Devo al mio amico prof. G. Torelli un elenco completo dei lavori del nostro maestro, ripartito secondo l'« Index du Répertoire bibliografique des sciences mathématiques », e lo riprodurrò in fine.

Battaglini si educò sulle opere di Cayley, Sylvester, Brioschi, recandovi di proprio una spiccatissima tendenza ed attitudine ad assegnare le interpretazioni geometriche degl'invarianti, covarianti, ecc.; molte infatti ne rinvenne di nuove ed ingegnose, appoggiandosi alla nozione di due forme armoniche fra loro, che a lui è dovuta (come mostrerò a suo tempo). In appresso trasse profitto eziandio dai metodi di Aronhold, Clebsch, Gordan, adoperando la notazione « ombrale » o « simbolica » con notevole larghezza di vedute. E da ultimo lo attrasse la teoria dei connessi di Clebsch, cui si riferiscono i lavori dell'8° gruppo e (se si vuole) uno del 5°. La teoria delle forme binarie adoprò inoltre abilmente nell' integrazione dell'equazione differenziale ellittica.

Alle ricerche del 5° e 6° gruppo, sulla Geometria della retta e sua applicazione alla Meccanica, il nostro alacre geometra si accinse non appena Plücker ebbe fatte note le idee fondamentali della nuova feconda dottrina; e il nome del Battaglini è ormai consacrato a quel notevole complesso quadratico particolare, del quale egli pel primo investigò le proprietà.

La Geometria non-euclidea ebbe in lui del pari un pronto divulgatore mediante la traduzione delle memorie fondamentali di Lobatschewsky e Bolyai, e un valido collaboratore mediante i lavori del 7° gruppo, e segnatamente mediante quelli che vertono sulle proprietà dei circoli non-euclidei.

Alla teoria degli spazî di quante si vogliano dimensioni, così strettamente connessa alla Geometria non-euclidea, il nostro autore non dedicò alcuna comunicazione, sebbene egli avesse serbato sino all'ultimo la mente e l'animo aperti ad accoglier le idee nuove, a svolgerle, a consigliarne altrui il proseguimento. È stato detto che a quella teoria non si volle mai adattare. Senonchè io non reputo ben fondata cotesta opinione; lo argomento dai miei ricordi personali, e lo desumo dalle seguenti parole che egli scrisse nell'album di una colta damigella:

« La supposizione che lo spazio, in cui gli esseri sono e si muovono, sia contenuto in uno spazio più ampio. può dare una naturale spiegazione di molti fenomeni, attribuiti falsamente ad agenti soprannaturali: fa inoltre sperare che lo spirito troverà finalmente la sua pace, venendo assorbito nella quarta dimensione dello spazio ».

La pace invocata dal nobile spirito del nostro geometra egli l'ha, troppo presto per i suoi cari e per la scienza, certamente ottenuta; come, a nessuno è dato sapere.

Lavori sulle forme geometriche di prima specie.

Dei lavori contenuti in questo gruppo. e dei quali mette conto dare un rapido cenno. il più importante è quello sulle « involuzioni dei diversi ordini »: poichè il nostro autore. se non fu il primo ad occuparsi di queste involuzioni, non fu tuttavia preceduto che dal Möbius, cui ne sembra dovuto il concetto (Ges. Werke. v. 2.); ma questo concetto è dal Battaglini svolto sotto tutt'altro aspetto. Posteriormente le studiò il Clebsch col nome di « proiettività cicliche », che poi è prevalso (Giornale di Crelle v. 68).

Sulla dipendenza scambievole delle figure (Mem. dell'Acc. di Napoli, 1858-60).

In questo lavoro, il Battaglini cercò di fondare la teoria dell'omografia sul solo concetto della biunivocità della corrispondenza, senza sussidio di rapporto anarmonico nè di altro; tentativo, che egli ebbe comune con molti eminenti geometri, ma che fallì per tutti. Ad ogni modo, egli fu il primo a Napoli, e fra i primi in Italia, che coltivassero la Geometria pura o proiettiva che dir si voglia; inaugurando così un nuovo indirizzo scientifico colà dove la Geometria era stata sino allora confinata nella rigida cerchia degli antichi metodi proprî della scuola greca, e dove la Geometria analitica ancor lottava per iscuoterne la tirannia.

Sulle forme geometriche (Rend. dell'Acc. di Napoli, 1862);
Sulla dipendenza equianarmonica (ib. 1863);
Sulla dipendenza di prim'ordine (ibid.);
Teoria elementare delle forme geometriche (Giorn. di Mat., v. I, 1863).

Premessa una copiosa raccolta di relazioni trigonometriche relative ai fasci di rette o di piani (dai quali si passa come caso particolare alla punteggiata), relazioni che in parte eran già note e in parte sono estensioni di relazioni note per le punteggiate, l'autore definisce la « dipendenza equianarmonica » fra due forme di 1ª specie; ed assumendo che una « dipendenza di 1° ordine » (cioè biunivoca) fra due tali forme sia esprimibile mediante una equazione bilineare fra le coordinate baricentriche dei loro elementi, conclude che la dipendenza di 1° ordine coincide con l'equianarmonica. Indi suppone le due forme sovrapposte, e dà relazioni fra gli elementi doppî, gli omologhi ortogonali, ecc., considerando anche il caso dell'involuzione.

Sulle involuzioni dei diversi ordini. Memoria (Atti di Napoli, v. I, 1863).

Dati due sistemi equianarmonici appartenenti ad una stessa forma fondamentale di 1ª specie, di un elemento ω_0 del 1° sistema si prenda l'omologo ω_1 nel 2°, di ω_1 considerato nel 1° l'omologo ω_2 nel 2°, e così via; ovvero di ω_0 come elemento del 2° sistema si prenda l'omologo ω_{-1} nel 1°, e così via: allora ω_μ, ω_ν sono omologhi in due sistemi equianarmonici; e se ω_0, $\omega_{\pm i}$ si chiamano appartenenti a due sistemi « consecutivi d'ordine $\pm i$ » (meglio sarebbe dire « d'intervallo $\pm i$ »), ω_μ, ω_ν apparterranno a due sistemi consecutivi d'ordine $\nu - \mu$. Questi sistemi consecutivi hanno gli stessi elementi doppî. In generale, al crescer di i, $\omega_{\pm i}$ tende ad uno dei due elementi doppî supposti reali. L'elemento ω_{-0} armonico di ω_0 rispetto a ω_i, ω_{-i} è tale anche rispetto ai due punti doppî, onde le coppie $\omega_0\,\omega_{-0}$ sono in involuzione ordinaria. Lo stesso se i due elementi doppî coincidono.

Ma se per un certo elemento ω_0 non doppio accade che $\omega_{\pm m}$ coincida con esso, lo stesso accadrà per ogni altro elemento, e si avrà quello che l'autore chiama « involuzione d'ordine $\pm m$ ». Allora gli elementi doppî non coincidono.

Queste proprietà vengono dimostrate fondandosi sull'equazione bilineare fra coordinate baricentriche riferite agli elementi doppî; ad esse tengon dietro varie relazioni pe' sistemi consecutivi, nelle quali intervengono or l'elemento centrale or la coppia degli elementi doppî E, F; p. e. $(E\,\omega_{i-1}\;\omega_i\;\omega_{i+1}) = \text{cost.} = \alpha$, $(F\,\omega_{i-1}\;\omega_i\,\omega_{i+1}) = \text{cost.} = \beta$, e $\alpha^m = \pm 1$, $\beta^m = \pm 1$ nell'involuzione d'ordine m pari o dispari.

Qui l'autore definisce un elemento a come « armonico di ordine α » di un altro b rispetto a un « ciclo » $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ dell'involuzione, quando è nulla la somma dei prodotti ad α ad α dei rapporti $\frac{\operatorname{sen} a\omega_i}{\operatorname{sen} \omega_i b}$; prova che gli armonici di ordine $n < m$ di un elemento a rispetto a un ciclo variabile costituiscono i cicli di un'altra involuzione d'ordine n avente gli stessi elementi doppî della primitiva; che, se $\alpha + \beta = m$ e a armonico di b d'ordine α, viceversa b sarà armonico di a d'ordine β rispetto al medesimo ciclo; che gli elementi doppî sono armonici dei diversi ordini rispetto ad ogni ciclo; che, se $(\Omega_1, .., \Omega_n)$ è il ciclo degli elementi armonici d'ordine n di un elemento ω rispetto al ciclo $(\omega_1, .., \omega_m)$ di un'involuzione d'ordine m, gli armonici dei diversi ordini di ω rispetto a $(\Omega_1, .., \Omega_n)$ saranno anche armonici de' diversi ordini di ω rispetto a $(\omega_1, .., \omega_m)$; che gli armonici di uno stess'ordine di due elementi arbitrarî rispetto a un ciclo variabile dell'involuzione formano due sistemi equianarmonici aventi gli stessi elementi doppî dell'involuzione. Da ultimo prova esser costante il rapporto anarmonico di quattro elementi armonici di uno stesso ordine di un elemento variabile rispetto a quattro cicli fissi, quando quei quattro elementi abbian lo stesso indice; questo rapporto anarmonico chiama « caratteristica » dell'involuzione, e dice due involuzioni « in dipendenza equianarmonica » quando i loro cicli si corrispondono in guisa da presentare eguali caratteristiche.

Sulle divisioni omografiche immaginarie. Nota (Rend. Napoli, 1864, fasc. 2.).

Da proprietà dei punti di una retta si deducono, come mostrò il Möbius, proprietà dei punti di un piano, ponendo numeri complessi ordinarî invece delle ascisse di quei punti. Indicando con O l'origine, con M un punto mobile, con OM la grandezza del segmento che li unisce, con (OM) il segmento considerato anche rispetto alla sua direzione, l'autore qui pone $(OM) = OM . F(\varphi)$, essendo φ l'angolo di una retta fissa uscente da O col segmento (ipotesi non abbastanza giustificata), e ne trae l'equazione funzionale $F(\alpha) F(\varphi - \alpha) = \text{cost.}$, che porge $F(\varphi) = e^{\varphi\sqrt{-1}}$. Allora vengono spontanee le relazioni fra più punti del piano, il « rapporto anarmonico », di quattro di essi, ecc. E dall'equazione dell'omografia di due punteggiate si assorge ad una corrispondenza fra due piani espressa da $(Op)(O'p') = p^2$, la quale è « l'affinità circolare » (« Kreisverwandtschaft » del Möbius).

Nel caso che i due piani coincidano, l'autore tratta dei due punti doppî della corrispondenza, dei sistemi consecutivi di varî ordini, delle involuzioni di varî ordini, dei relativi cicli, e così via, estendendo i risultati della Memoria precedente.

Lavori sulle forme algebriche binarie.

Scopo precipuo del presente gruppo di lavori è l'interpretazione geometrica degli invarianti e covarianti delle forme binarie. Le coordinate all'uopo adoperate sono le baricentriche.

Le Note:

Sulle forme binarie di 1° e 2° grado (Rend. Napoli, 1864);

Sulle forme binarie di 2° grado (Giorn., III, 1865);

Sulle forme binarie di 3° grado (Rend. Napoli, 1864);
Sulle forme binarie cubiche (ibid.).
riproducono in parte proprietà note del discriminante, degli emananti o polari, della involuzione quadratica. La 3ª contiene la nozione di « terna di elementi coniugati armonici rispetto ad una data terna di elementi »; nozione, che fu introdotta per la prima volta dal Battaglini, e che egli in seguito estese a gruppi di quanti si vogliano elementi. E precisamente, definito l'elemento armonico di 1° ordine di un dato elemento e i due di 2° ordine, rispetto ai tre elementi della forma cubica U, ed esposte le loro proprietà, l'autore definisce poi una « terna di elementi coniugati armonici » rispetto agli elementi della cubica U, supponendo che si annulli l'emanante misto di U rispetto a tre elementi.

La considerazione degli elementi armonici di 1° e 2° ordine e delle terne suddette permette di assegnare il significato geometrico di molti invarianti e covarianti di una o due forme cubiche.

Quindi passa a studiare le « involuzioni cubiche semplici, doppie », ossia i sistemi lineari $k_1U_1 + k_2U_2 = 0$, $k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 = 0$; ma di essi discorrerò in seguito nel caso generale di forme di grado n.

Sulle forme binarie di 4° grado (Rend. Napoli, 1864);
Sulle forme binarie biquadratiche (ibid.);
Sulle forme binarie biquadratiche in involuzione (ibid.).
Queste Note trattano questioni analoghe a quelle svolte nelle precedenti, appoggiandosi alla nozione di « quaterna di elementi coniugati armonici » rispetto a una data quaterna di elementi.

Sulle forme binarie miste di 3° e 4° grado. Nota (ibid.).
Contiene le proprietà fondamentali delle corrispondenze (1,2), (1,1,1), (1,3), (2,2), (1,1,2), (1,1,1,1) nel campo binario: la teoria delle corrispondenze era ancora al suo inizio quando il Battaglini le dedicò alcune pagine.

Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una ternaria quadratica. Nota 1ª (Rend. Napoli, 1865, fasc. 11.); Nota 2ª (ibid., 1866, fasc. 2.); Nota 3ª (ibid., 1866, fasc. 5.).

In queste tre Note il nostro autore considera il rapporto delle variabili di una forma binaria come la quantità che individua un elemento di una conica sferica (linea s, o inviluppo S), sicchè la considerazione degl'invarianti e covarianti delle forme binarie conduce a proprietà delle coniche sferiche, e (per proiezione) delle stelle di punti e piani, e (come caso particolare) delle coniche piane. La forma ternaria quadratica non interviene se non per mezzo della conica che da essa eguagliata a zero s'intende determinata.

Se a, b, m son tre punti di s, ogni altro ω sia individuato da $x = \frac{\operatorname{sen} a m \omega}{\operatorname{sen} a m b}$, $y = \frac{\operatorname{sen} \omega m b}{\operatorname{sen} a m b}$; e dualmente, se A, B, M son tre archi (di circoli massimi) tangenti

a S, ogni altro sia individuato da $X = \frac{\text{sen AM}\Omega}{\text{sen AMB}}$, $Y = \frac{\text{sen}\,\Omega\,\text{MB}}{\text{sen AMB}}$. Se p, q son due punti di s, $\frac{\text{sen}\, amp}{\text{sen}\, pmb} : \frac{\text{sen}\, amq}{\text{sen}\, qmb}$ è indipendente da m, e però può dirsi « rapporto anarmonico delle coppie ab, pq » e indicarsi un (ab, pq): dualmente si definisce (AB, PQ).

Se due coppie ab, cd su s sono « armoniche » c e d variando percorrono un'involuzione », di cui a, b sono gli elementi doppî.

Ciò promesso, l'autore rappresenta una o due forme binarie quadratiche e i loro invarianti e covarianti sulla conica s o S; e lo stesso fa per la forma mista bilineare esprimente una « dipendenza equianarmonica », per i « punti armonici dei successivi ordini », per i sistemi equianarmonici consecutivi d'ordine qualunque », per le « involuzioni d'ordine qualunque » e i loro « cicli », trattati in precedenti lavori. L'arco unente due punti in dipendenza equianarmonica inviluppa una conica bitangente a s, e dualmente; date più coniche bitangenti a s, si può iscrivere in s un poligono i cui lati tocchino quelle coniche (che ponno ridursi a punti, ovvero coincidere); ecc.

Segue la rappresentazione sopra s o S di una o due forme binarie cubiche coi loro covarianti ed invarianti, l'involuzione cubica semplice con la sua associata, l'involuzione doppia con la terna di punti armonica rispetto ad essa. Le terne di un'involuzione semplice son vertici di triangoli circoscritti ad una conica fissa; ecc.

Finalmente l'autore rappresenta una o due forme binarie biquadratiche coi loro covarianti od invarianti, e le involuzioni biquadratiche semplici doppie, triple. Le quaterne dell'involuzione semplice dànno quadrangoli circoscritti ad una curva fissa di 3ª classe e 6° ordine; esse sono intersezioni di s con le coniche di certi fasci; ecc.

Il presente lavoro recò un pregevole contributo alla teoria della rappresentazione delle forme binarie sulle curve, la quale ha raggiunto oggidì un grande sviluppo, ma allora era appena abbozzata.

Sulle forme binarie di grado qualunque. Memoria (Atti di Napoli, III, 1867).

Questa Memoria del Battaglini è la prima in cui egli abbia adoperato, sebbene in linea accessoria soltanto, la notazione « umbrale » o « simbolica » per le forme binarie. Così una stessa forma U « pura » è indicata indifferentemente da

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n, \quad b_0 y^n + \frac{n}{1} b_1 y^{n-1} x + \cdots,$$
$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n, \quad (b_0, b_1, \ldots, b_n)(y, x)^n, \quad (\xi x + \eta y)_n^n, \quad (\xi, \eta)_n (x, y)^n;$$

e se « mista » da

$$\text{U}(1, 2, \ldots, m), \quad (\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1)_{n_1}^{n_1} \ldots\ldots (\xi_m x_m + \eta_m y_m)_{n_m}^{n_m},$$
$$(\xi_1, \eta_1)_{n_1} \ldots\ldots (\xi_m, \eta_m)_{n_m} (x_1, y_1)^{n_1} \ldots\ldots (x_m, y_m)^{n_m};$$

notazioni tuttavia alquanto complicate.

Benchè lo scopo principale di questi lavori sulle forme binarie sia la interpretazione geometrica dei loro covarianti e invarianti, pure qui l'autore comincia col dare una base affatto algebrica alla ricerca di essi. Chiama « sistema binario » l'insieme dei valori di $x:y$; « rappresentazione » di esso il concetto del « continuo » nel quale si pongono le « determinazioni $x:y$ », a ciascuna delle quali corrisponde un « elemento » ω di « coordinate » x, y; « potenza » di ω rispetto a ω', ossia $P.\omega\omega_1$, il determinante $xy_1 - x_1y$ delle coordinate x, y di ω e x_1, y_1 di ω_1; « potenza » di ω rispetto al gruppo $(\omega_1, ..., \omega_m)$, ossia $P.\omega(\omega_1, ..., \omega_m)$, o $P(\omega\,\omega_i, m)$, il prodotto $(x\,y_1 - x_1\,y) ... (xy_m - x_m\,y)$. La sostituzione lineare $x = \alpha x' + \beta y', y = \gamma x' + \delta y'$ « trasforma linearmente » il sistema binario in un altro di elementi ω' corrispondenti a $x':y'$, e qui si definiscono i « concomitanti » (covarianti ed invarianti) e i « plessi-concomitanti ».

La $U = 0$ determina n elementi $\bar{\omega}_1, ..., \bar{\omega}_n$ del sistema binario.

L'emanante « puro » $\Theta^r{}_j\,U_i = \left(\frac{d}{dx_i}x_j + \frac{d}{dy_i}y_j\right)^r U(x_i, y_i) = 0$, ossia la somma eguagliata a zero dei prodotti ad r ad r di $P.\,\omega_j\,\bar{\omega}_1 : P.\,\bar{\omega}_1\,\omega_i$, $P.\,\omega_j\,\bar{\omega}_2 : P.\,\bar{\omega}_2\,\omega_i$,.., dà r elementi ω_j « armonici di ordine r » di ω_i rispetto al gruppo degli elementi di $U = 0$, ed indica le loro ovvie proprietà. L'emanante « misto » $\Theta_1{}^{n_1}.....\,\Theta_m{}^{n_m} = 0$ dà $n - n_1 - \cdots - n_m$ elementi « armonici di ordine $n - n_1 - \cdots - n_m$ del gruppo $(\omega_1, ..., \omega_m)$ »; in particolare $\Theta_1.....\Theta_n\,U = 0$, ossia $P.\omega_1\,\bar{\omega}_1\,P.\,\omega_2\,\bar{\omega}_2.....P.\,\omega_n\,\bar{\omega}_n + \cdots = 0$ (i cui termini differiscono per la permutazione degli $\bar{\omega}$), è la relazione che definisce un gruppo di n elementi $(\omega_1, ..., \omega_n)$ « coniugati armonici » rispetto a quelli di $U = 0$. Due forme di grado n, $U = a_0 x^n + ...$, $u = A_0\,x^n + \cdots$ « coniugate armoniche », cioè i cui gruppi di elementi siano coniugati armonici, han nullo l'invariante $A_0 a_n - n\,A_1\,a_{n-1} + \cdots \pm A_n\,a_0$; e però una forma di grado dispari è sempre coniugata armonica a sè stessa, ed una U di grado pari lo è se è nullo l'invariante $I.\,U = a_0\,a_n - n\,a_1\,a_{n-1} + \cdots \pm \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{1}{2}n} a^2_{\frac{n}{2}}$, che l'autore ha chiamato « armonizzante ». Esso vale $\Sigma\,P.\bar{\omega}_1\,\bar{\omega}_\alpha.....P.\bar{\omega}_n\,\bar{\omega}_\varkappa = 0$ (ove $\alpha\,\beta.....\varkappa$ sta per le permutazioni di $12.....n$).

Gli armonizzanti degli emananti puri sono nuovi covarianti, che determinano i punti i cui gruppi armonici de' varî ordini sono armonici con sè stessi; ed analogamente gli armonizzanti degli emananti misti. Così l'hessiano di U è l'armonizzante di $\Theta_k{}^2 U$, e i suoi $2(n-2)$ elementi son quelli i cui armonici di 2° ordine coincidono. L'armonizzante dell'emanante misto di U rispetto al gruppo di elementi di un'altra forma $V = f_0\,x^m + \cdots (m < n)$ è un invariante di 2° grado nei coefficienti di U e in quelli di V. Ecc.

Altri covarianti si ottengono come « associati » di un covariante già noto Φ (di grado $\varkappa$ nei coefficienti di U e ν nelle variabili x, y) rispetto a U, eliminando x, y fra $\Theta_k{}^{n-m}\,U = 0$ e $\Theta_k{}^{\nu-1}\,\Phi = 0$ per $m = 1, 2, ..., n-1$, il che dà

$$\left(\frac{d\,\Phi}{dy}\right)^m \frac{d^m U}{d\,x^m} - \frac{m}{1}\left(\frac{d\,\Phi}{d\,y}\right)^{m-1}\left(\frac{d\,\Phi}{d\,x}\right)\frac{d^m U}{dx^{m-1}dy} + \cdots \pm \left(\frac{d\Phi}{d\,x}\right)^m \frac{d^m U}{d\,y^m}.$$

Più generalmente da $\Theta_k{}^{n-m}U$, $\Theta_k{}^{\nu-\mu}\,\varphi$ si hanno i covarianti « associati di ordine μ » di φ rispetto a U.

Ancora, ogn'invariante di $F(x_i, y_i) = U_i U_j - \lambda (x_i y_j - x_j y_i)^n$, sviluppato per le potenze di λ, ha per coefficienti covarianti di U; e se $n = 2m$, lo stesso dicasi di $\Theta_i^m \Theta_j^m U - \lambda(x_i y_j - x_j y_i)^{2m}$.

Dopo aver mostrato come si costruiscano ed interpretino covarianti e invarianti di una forma binaria, il nostro autore passa a studiare la « involuzione $(r-1)^{pla}$ di grado n », così chiamando l'insieme dei gruppi di elementi delle forme di grado n $U = k_1 U_1 + \cdots + k_r U_r$ al variar delle k: forme « sizigetiche ». Estendendo i risultati ottenuti nei lavori precedenti, dimostra che, se un elemento è comune ad r gruppi dell'involuzione ed equimultiplo per essi, tale è per tutti; che una forma armonica con r forme dell'involuzione, lo è con tutte; che l'involuzione consta di forme armoniche con $n - r + 1$ forme, e quindi con le forme di un'involuzione $(n - r + 1)^{pla}$ « associata » alla prima, e per $r = n$ con un'unica forma associata.

Se $m < r$, sonvi infiniti elementi m^{pli} (in qualche gruppo dell'involuzione); se $m = r$ il numero è $r(n - r + 1)$. Tra' gruppi con $r - m$ elementi arbitrarî ve ne ha in generale $m(n - r + 1)$ con elemento m^{plo}. L'involuzione $(n - 1)^{pla}$ ha n elementi n^{pli}, cioè quelli della forma associata.

Date nello stesso sistema binario n involuzioni $(n - 1)^{ple}$ di grado n, evvi un gruppo comune. Se le involuzioni date di grado n sono m_1 $(r_1 - 1)^{ple}$, m_2 $(r - 1)^{ple}$,..., posto $n_1(n - r_1 + 1) + \cdots = s$, per $s < n$ sonvi infiniti gruppi comuni e in involuzione $(n - s)^{pla}$, per $s = n$ uno, per $s > n$ nessuno, salvo casi particolari.

I gruppi degli armonici d'ordine s di uno o più elementi fissi, rispetto ai gruppi di un'involuzione $(r-1)^{pla}$ di grado n, formano un'altra involuzione $(r-1)^{pla}$ di grado s, per $s = 1, 2, \ldots, n-1$; e detto « rapporto anarmonico » di quattro gruppi di armonici compagni quello che questi forniscono per $s = 1$, le suddette involuzioni sono « equianarmoniche ».

Il gruppo degli $n - s$ armonici di s elementi variabili, rispetto a una forma U d'ordine n, percorre un'involuzione s^{pla} quando $n > 2s$; quando $n = 2s$ un'involuzione $(s - 1)^{pla}$, purchè sia nullo il determinante circolante di $a_1, \ldots, a_n$, detto « cataletticante »; e quando $n < 2s$ un'involuzione $(n-s-1)^{pla}$, purchè sia nullo il « plesso-cataletticante », cioè sian nulli tutti i determinanti d'ordine $n - s + 1$ della matrice circolante di $a_1, \ldots, a_n$. Se $n < 2s$ e gli armonici di ordine $n-s$ di un elemento variabile sono in involuzione $(n-s-1)^{pla}$, anche gli armonici d'ordine s saranno in involuzione $(n-s-1)^{pla}$; se $n > 2s$, gli armonici d'ordine $n-s$ saranno in involuzione s^{pla}, riducibile a $(s-1)^{pla}$ se si annulla il plesso-cataletticante.

Applicando al cataletticante o plesso-cataletticante di un emanante le cose dette, si ottengono altri covarianti, fra' quali il cataletticante del 1° emanante o « canonizzante », il « cataletticante bordato » e il « canonizzante bordato ».

Da ultimo, il canonizzante di una binaria U di grado $n=2m-1$ o $n=2m$ fornisce gli m elementi m^{pli} dell'involuzione $(m-1)^{pla}$ di grado m dei gruppi armonici di ordine m di un elemento arbitrario, ossia fornisce il gruppo armonico con quelli dell'involuzione. I suoi fattori lineari $u_1, \ldots, u_m$ riducono U (com'è noto) alla forma « canonica » $u_1^{2m-1} + \cdots + u_m^{2m-1}$ se $n = 2m - 1$ dispari; e la riducono alla forma « canonica » $u_1^{2m} + \cdots + u_m^{2m}$, se $n = 2m$ pari, qualora sia nullo il cataletticante.

Per $n = 2m$ pari, senz' altro, suolsi assumere come forma « canonica » $u_1^{2m} + \cdots + u_m^{2m} + 2m(2m-1)\cdots(m+1)\lambda vw$, essendo λ dato da una certa equazione di grado $n+1$ detta « lamdoide ».

Sulla quintica binaria. Nota (Atti dei Lincei, II_2, 1875).

L'autore ricorda che una forma binaria di grado n può scriversi come una ternaria U nelle x, y, z legate dalla relazione $x + y + z = 0$, sicchè

$$\mathrm{U}\left(\frac{d}{dy} - \frac{d}{dz}, \ \frac{d}{dz} - \frac{d}{dx}, \ \frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)\mathrm{U}' = 0$$

dà gli elementi armonici d'ordine $n'-n$ degli elementi di U rispetto a quelli di U'; e studia la quintica $\mathrm{F} = ax^5 + by^5 + cz^5$, costruendone covarianti ed invarianti, ed assegnando il loro significato in base ai concetti svolti ne' precedenti lavori.

L'autore in queste ricerche non si occupa di distinguere gl'invarianti e covarianti appartenenti al sistema completo, nè d'indagare se di dati gradi ve ne sia più di uno; egli indica de' modi di costruire successivamente covarianti od invarianti e di assegnarne il significato geometrico, basandosi sulle nozioni di elementi armonici di varî ordini, di gruppi armonici con altri gruppi, di risultanti, ecc.

Due concetti vi dominano: quello di forme « coniugate armoniche fra loro » (« apolari » dette dal Reye, « coniugate » dal Rosanes), e quello di « involuzioni d'ordine qualunque » (« i sistemi lineari »). Subordinatamente al primo figura un terzo concetto: quello di « armonizzante », cioè dell'invariante che si annulla quando la forma è coniugata armonica rispetto a sè stessa (potrebbe dirsi « autoconiugata » o « autoapolare) ». Ciascuno dei tre concetti è largamente e felicemente adoperato in sussidio degli altri due, nonchè come strumento per costruire invarianti e covarianti e per assegnarne il significato geometrico.

Vuolsi anche rilevare il concetto dell'involuzione (o in particolare di forma) « associata » a una data involuzione (o forma).

Questi concetti furono introdotti dal Battaglini pel primo. Essi con le loro applicazioni costituiscono ciò che di sostanzialmente originale contengono le sue ricerche sulle forme binarie. E la estensione che egli ne fece al campo ternario costituisce del pari il merito principale dei suoi lavori sulle forme ternarie, dei quali tra poco schizzerò un cenno.

A conferma giova riportare la nota apposta dal compianto De Paolis a pag. 4 della sua Memoria « *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* » (Mem. dei Lincei, III_4, 1886):

« Battaglini, in alcune Memorie pubblicate fino dal 1864, considera « l'armonizzante » di due forme binarie cubiche o biquadratiche, ed i sistemi lineari « associati » che con queste forme si possono costruire. Più tardi, nel 1867, in un'altra Memoria definisce « l'armonizzante » di due forme binarie di grado qualunque, la « involuzione $(\nu-1)^{\mathrm{pla}}$ di grado n » o « forma sizigetica », cioè il sistema lineare ∞^{r-1} di forme binarie di grado n, ed i sistemi lineari « associati ». Ne trova poi le principali pro-

prietà e ne fa un'applicazione alla espressione delle forme binarie come una somma di potenze di forme binarie lineari. Questi ed altri importanti risultati sono estesi, dallo stesso Battaglini, alle forme ternarie nel 1868.

« Ordinariamente si attribuisce a Rosanes il merito di avere introdotto ed utilizzato, nelle questioni geometriche, il concetto di forme armoniche; però le citate ricerche del Battaglini, che meriterebbero di essere maggiormente conosciute dai geometri, sono anteriori a quelle di Rosanes, il quale, solamente nel 1872, in una piccola nota alla sua Memoria: « Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen (G. di Crelle, v. 75) » parla dell'armonizzante di due forme binarie, senza distinguerlo con un nome speciale, considerandolo come un invariante simultaneo il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè ciascuna delle due forme binarie possa esprimersi con una somma di potenze di fattori lineari dell'altra. In una Memoria posteriore: « Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen (G. di Crelle, v. 76) », pubblicata nel 1873, Rosanes considera le forme armoniche con p variabili, chiamandole « coniugate », e deduce i principali teoremi relativi ai loro sistemi lineari, teoremi che costituiscono una generalizzazione di quelli di Battaglini, relativi alle forme ternarie ».

Il sig. Schlesinger, nella « Note zu der Abhandlung: Ueber conjugirte Curven, etc. » (Math. Ann., v. 33, p. 315), alle osservazioni del De Paolis obietta:

« Ich kann nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit noch einer Bemerkung entgegenzutreten, die Herr De Paolis in einer Fussnote seiner Arbeit ausgesprochen hat. In derselben soll angedeutet werden, dass man mit Unrecht Herrn Rosanes die erste Einführung und Verwerthung des Begriffes der conjugirten Formen zuschreibe, dass vielmehr dies Verdienst Herrn Battaglini gebühre. Bei Prüfung der wohl vorzugsweise in Frage kommenden Arbeit des Herrn B. im Giornale di Matematiche di Napoli, t. X, habe ich jedoch nur die Benennung « harmonisch coniugirt » für die betreffende Relation auffinden können. — Von irgend einer Verwerthung (vorauf es doch hauptsachlich ankommt) des Begriffs ist dagegen an dem angegebenen Orte nirgends die Rede. Man findet daselbst weder eine Anwendung auf Potenzdarstellung, noch auf Abhängige Systeme von Punckten etc., vie sie von Herrn Rosanes und Anderen seither in ausgedehnten Masse gegeben worden sind ».

Ora da quanto ho dianzi esposto chiaro apparisce come lo Schlesinger abbia torto a voler ridurre a nulla i meriti del Battaglini.

Così pure non è giusto che il sig. Fr. Meyer, nè nel suo libro « Apolarität und rationale Curven » (Tübingen, Fuchs, 1883), nè nel suo « Bericht über den gegenwartigen Stand der Invariantentheorie » (nel Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, 1890-91), non nomini mai il Battaglini, anzi nel « Bericht » attribuisca al Rosanes alcune osservazioni che stima importanti, mentre si trovavano già nei lavori del nostro autore.

Quel che si potrebbe piuttosto notare, si è che questi non affacciò tutta l'importanza che l'armonia tra due forme aveva nel problema di rappresentare una forma binaria come somma di potenze di forme lineari, intorno al quale non ha detto nulla che non fosse già conosciuto.

Sull'equazione differenziale ellittica. Nota (Mem. dei Lincei, V_3, 1879).

Il problema qui risoluto affatto generalmente è di mostrare come una equazione fra tre variabili, quadratica rispetto a ciascuna di esse, possa sotto certe condizioni rappresentare un integrale particolare dell'equazione differenziale ellittica a tre variabili, ed anche l'integrale generale dell'equazione differenziale ellittica a due variabili qualora la terza variabile si ritenga come costante arbitraria.

L'autore cita il Cayley, che trattò la questione medesima nel suo volume sulle funzioni ellittiche, ma tiene una via diversa.

Egli assume l'equazione sotto la forma

$$\frac{(x, dx)}{\sqrt{f(x)}} + \frac{(y, dy)}{\sqrt{f(y)}} + \frac{(z, dz)}{\sqrt{f(z)}} = 0,$$

ove $x_1 : x_2, y_1 : y_2, z_1 : z_2$ sono le tre variabili, $(x, dx) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1, \ldots$, e f una forma biquadratica binaria.

Posto simbolicamente $\varphi(xyz) = a^2_x\, b_y^2\, c_z^2 = a'^2_x\, b'^2_y\, c'^2_z = \cdots = 0$, $\psi(v) = s_v^2 = s'^2_v = \cdots = 0$, si ha

$$2(v, dv)\sqrt{-\tfrac{1}{2}(ss')^2} = \frac{\partial\psi}{\partial v_1}\partial v_1 + \frac{\partial\psi}{\partial v_2}dv_2,$$

e però

$$(x, dx)\sqrt{(aa')^2\, b_y^2\, b'^2_y\, c_z^2\, c'^2_z} + \cdots = 0.$$

Supposta φ simmetrica (ossia abc permutabili) e posto (simbolicamente) $a_1 b_1 c_1 = S_1, \ldots$, nonchè $x_1 y_1 z_1 = s_1, \ldots$, si ha $\varphi = S_s^3$. E se φ è tale che $(aa')^2\, b_y^2\, b'^2_y\, c_z^2\, c'^2_z = f_y^4 \cdot f_z^4, \ldots$, ove $f(v) = f_v^4$ è una biquadratica, si ottiene l'equazione differenziale ellittica.

Viceversa, l'autore prova con abile uso della teoria delle forme biquadratiche, che, data questa equazione e quindi f_x^4, si può soddisfare le $(aa')^2\, b_y^2\, b_y'^2\, c_z^2\, c_z'^2 = f_y^4 \cdot f_z^4, \ldots$, rimanendo con ciò determinati i 10 coefficienti $S_1S_1, S_1S_2, \ldots$ di φ. Dunque $\varphi = 0$ è un'integrale particolare dell'equazione proposta; e se z si ritiene come costante arbitraria, $\varphi = 0$ è l'integrale generale di

$$\frac{(x, dx)}{\sqrt{f_x^4}} + \frac{(y, dy)}{\sqrt{f_y^4}} = 0.$$

La $\varphi = 0$ pone una dipendenza fra gli elementi di tre forme geometriche di 1ª specie, per cui, dati due di essi, son determinate due posizioni del rimanente; se queste coincidono, la dipendenza fra i primi due è stabilita da una delle equazioni $(aa')^2\, b_y^2, c_z^2\, c_z'^2 = 0, \ldots$; e se inoltre queste si scindono in $f_y^4 \cdot f_z^4 = 0, \ldots$, dato uno dei due elementi ad arbitrio, l'altro è uno dei quattro di $f_v^4 = 0$.

Intorno ad un'applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all'integrazione dell'equazione differenziale ellittica. Nota (Atti di Napoli, II_2, 1885).

L'autore mostra come costruire una corrispondenza (2, 2) nel campo binario, e quindi una equazione finita fra $x_1 : x_2$ e $y_1 : y_2$, che sia l'integrale completo della equazione differenziale ellittica.

Lavori sulle forme geometriche di 2ª specie.

Sulla dipendenza duplo-anarmonica. Nota (Rend. Napoli, 1863, fasc. 10.).

Ai punti di un piano si faccian corrispondere le rette di un altro piano, e viceversa, in una prima dipendenza equianarmonica (correlazione) e poi in una seconda: due rette corrispondenti ad uno stesso punto del 1° piano individuano un punto, che si farà corrispondere nel 2° piano a quel punto del 1° piano; e viceversa. Cotesta dipendenza fra i due piani l'autore chiama « duplo-anarmonica ». Per essa a una retta di uno dei due piani corrisponde nell'altro una conica passante per tre punti fissi: questa è la nota « dipendenza conica », e la più generale.

Se a, b, c e a', b', c' indicano i detti punti fissi, si possono trasformare le relazioni grafiche e metriche da un piano all'altro mediante alcune facili formole.

Notevole il caso che a, a' e b, b' siano i punti ciclici immaginarî all'infinito: allora si ha la « dipendenza circolare » (la « Kreisverwandtschaft » del Möbius).

Sulle forme geometriche di seconda specie. Nota (Rend. Napoli, 1865, fasc. 2.).

La presente Nota ha per oggetto d'indicare alcune relazioni metriche relative ai sistemi di punti e rette di un piano, o di piani e rette per un punto; e precisamente si considera la rappresentazione di una stella di rette e piani sulla sfera di raggio 1 avente il centro nel centro della stella, per passare poi al sistema piano mandando il centro della sfera all'infinito.

Siano a, b, c punti della sfera, A, B, C gli archi (di circoli massimi) che essi individuano. Sia poi ω un punto qualunque della sfera, e Ω un arco qualunque, e si ponga $(\omega, bc) = \frac{\text{sen}\,\omega\, b\, c}{\text{sen}\, a\, b\, c} = \frac{\text{sen}\,\omega\,\text{A}}{\text{sen}\, a\,\text{A}}, \ldots$ (aA indicando la distanza da a a A, ...), $(\Omega, \text{BC}) = \frac{\text{sen}\,\Omega\,\text{B C}}{\text{sen}\,\text{A B C}} = \frac{\text{sen}\,\Omega\, a}{\text{sen}\,\text{A}\, a}, \ldots$ Oltre queste due terne di « rapporti » di ω rispetto alla terna $a\,b\,c$ e di Ω rispetto ad A B C, si considerano i « doppî rapporti » $(\omega\omega', bc) = \frac{(\omega, b\, c)}{(\omega', b\, c)}, \ldots, (\Omega\Omega', \text{BC}), \ldots$; e se e, f, g cadono su A, B, C ovvero E, F, G passino per a, b, c, si considerino i « tripli rapporti » $(efg, abc) = \frac{\text{sen}\, be\,\text{sen}\, cf\,\text{sen}\, ag}{\text{sen}\, ec\,\text{sen}\, fa\,\text{sen}\, gb}$, (EFG, ABC), notando che, se e, f, g appartengono a E, F, G, è

$$(efg, abc)\,(\text{EFG}, \text{ABC}) = -1.$$

L, M, N indichino gli archi ea, fb, gc, e l, m, n i punti EA, FB, GC: se L, M, N concorrono in un ω e l, m, n sono in un Ω, può essere che e, f, g siano armonici di l, m, n, e allora ω e Ω diconsi « coniugati armonici » rispetto ad abc o ABC, ed e « armonico » di E rispetto a bc, e così via. Allora e, f, g, l, m, n sono vertici di un quadrilatero Q che ha A, B, C per archi diagonali, e E, F, G, L, M, N lati di un quadrangolo q che ha a, b, c per punti diagonali; e i vertici di Q sono armonici dei lati di q.

Se un Ω seca A, B, C, in l, m, n, conducendo da un ω gli archi $L', \ldots, A', \ldots$, ad $l, \ldots, a, \ldots$, le tre coppie (A',L'), (B',M'), (C',N') sono in involuzione, e viceversa; se poi e, f, g son punti di A, B, C e gli archi L, M, N che li uniscono ad a, b, c passano per un punto, conducendo da un ω gli archi $E', \ldots, A', \ldots$ ad $e, \ldots, a, \ldots$, si ha $(E'F'G', A'B'C') = -1$, e le tre coppie (A',E'), (B',F'), (C',G') si diranno in « contro-involuzione ». L'involuzione e la contro-involuzione si dicono « coniugate » se l'arco lmn e il punto LMN sono coniugati armonici rispetto a abc o ABC. Sono su un arco i coniugati armonici delle intersezioni di un arco con le diagonali di un quadrilatero.

Segue il teorema di Desargues per due triangoli (o trilateri), che allora sono « prospettivi ».

Se $e', \ldots, l', \ldots$, sono armonici di $e, \ldots, l, \ldots$, vertici di Q, e se e', f', g' sono su un arco Ω, anche l', m', n' sono su un arco O; se ae', bf', cg' passano per un punto ω, anche al', bm', cn' passano per un punto o: allora Ω e O, nonchè ω e o, si dicono « coniugati » rispetto a Q.

Esposte queste proprietà e le loro duali, l'autore passa a stabilire (col principio della proiezione normale di segmenti componenti e risultante) la relazione

$$\operatorname{sen} \omega\Omega = \frac{\operatorname{sen} \omega A \operatorname{sen} \Omega a}{\operatorname{sen} Aa} + \cdots,$$

che fornisce una equazione bilineare fra le « coordinate omogenee » $x = \frac{\operatorname{sen} \omega A}{\operatorname{sen} a A}, \ldots$ e $X = \frac{\operatorname{sen} \Omega A}{\operatorname{sen} A a}, \ldots$, di un punto ω e di un arco Ω che si appartengano, e ne deduce varie relazioni.

Sulle forme geometriche di seconda specie. Memoria (Atti di Napoli, II, 1865).

L'autore studia la « dipendenza equianarmonica » tra forme di 2ª specie rappresentate su due sfere; definendo « equianarmonica » la dipendenza in cui ad ogni punto e ad ogni arco dell'una sfera corrisponde nell'altra un punto e un arco, od anche un arco e un punto; e dicendo nel 1° caso le due forme « omografiche », nel 2° eterografiche » (denominazione quest'ultima poco espressiva, perchè affatto negativa). Dalla biunivocità egli trae senz' altro (come già nelle forme di 1ª specie) relazioni bilineari, onde conclude che il triplo rapporto di due terne di elementi dell'una forma è eguale a quello delle corrispondenti terne, e che il doppio rapporto di quattro elementi di una forma di 1ª specie contenuta in una delle due forme di 2ª specie è eguale a quello dei corrispondenti. Mercè le coordinate x, y, z, X, Y, Z definite nella Nota prec., si vede che le equazioni della corrispondenza sono $\frac{x_1}{x'} : \frac{y_1}{y'} : \frac{z_1}{z'} = u:v:w$ o $\frac{X_1}{X'} : \frac{Y_1}{Y'} : \frac{Z_1}{Z'} = U':V':W'$, ove $u, \ldots, U, \ldots$ costanti.

Siano S_1, S' le due forme omografiche; i_1, I_1 il luogo e l'inviluppo degli elementi all'infinito di S_1, e j', J' in S': la terna coniugata rispetto a i_1 e j_1 (ossia a I_1 e J_1) è reale ed ortogonale, come pure quella rispetto a i' e j' (o I' e J'), e le due sono omologhe: l'autore chiama « principali omologhe » le due terne, « centri » i loro punti,

« assi » i loro archi. Riferiti S_1, S' a due terne omologhe di terne ortogonali, sicchè :

$$i_1 = x_1^2 + \cdots + 2y_1z_1 \cos b_1c_1 + \cdots, \quad j_1 = u_1^2x_1^2 + v_1^2y_1^2 + w_1^2z_1^2,$$
$$i' = x'^2 + \cdots, \quad j' = u'^2x'^2 + \cdots,$$

i centri son dati (sopprimendo per brevità l'indice o l'accento delle lettere) dall'equazione $x(1 - r^2u^2) + y \cos ab + z \cos ac = 0$ e dalle due ottenute permutandovi circolarmente $x\,y\,z$ e $a\,b\,c$, insieme con

$$\begin{vmatrix} 1 - r^2u^2 & \cos ab & \cos ac \\ \cos ba & 1 - r^2v^2 & \cos bc \\ \cos ca & \cos cb & 1 - r^2w^2 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale ha le tre radici reali e negli intervalli α a β, β a γ, γ a α, ove

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen} ab \operatorname{sen} ac \cos \mathrm{BC}}{u^2 \cos bc}, \ldots.$$

... Due radici coincidono in ϱ se $\alpha = \beta = \gamma = \varrho$; allora sonvi infiniti centri sull'arco $x : \cos bc + \cdots = 0$, e la dipendenza dicesi « circolare ». Le tre radici coincidono in ϱ se $\cos bc = \cos ca = \cos ab = 0$, $u^2 = v^2 = w^2 = 1 : \varrho$; allora ogni punto è centro e i sistemi sono eguali. Dualmente per gli assi.

Su due archi omologhi esistono due coppie omologhe « principali » (ortogonali) di punti, che son doppî per le involuzioni simmetriche segnate sui due archi dalle coniche circoscritte al quadrangolo θ dei punti $i_1 . j_1$ e a quello θ' dei punti $i' . j'$. L'autore chiama archi « ciclici » le coppie di lati di θ_1, θ', « omocicliche » le coniche circoscritte a θ_1, θ'; ed ha che le coppie principali omologhe di punti su archi omologhi bisecano internamente ed esternamente le parti di questi archi comprese fra due archi ciclici, od anche sono le coppie di punti doppî nelle involuzioni simmetriche segnate su i due archi dalle coniche omocicliche di S_1 e S'; salvo se i due archi sian ciclici, chè allora vi è indeterminazione.

Dualmente si definiscono le coppie omologhe « principali » di archi, i quadrilateri Θ_1, Θ' delle rette $I_1 . J_1$, $I' . J'$, i punti « focali » (vertici), le coniche « omofocali », e si ha che le coppie principali omologhe di archi condotti per due punti omologhi bisecano gli angoli sotto i quali dai due punti son visti due punti focali, ecc.

Riferendo S_1, S' alle terne principali omologhe, si ha $i_1 = x^2 + \cdots$, $j = u^2x^2 + \cdots$, $u_1u' = \cdots$, $I = X^2 + \cdots$, $J = U^2X^2 + \cdots$, $U_1U' = \cdots$, $u_1 : U' = \cdots$, $U_1 : u' = \cdots$; per le coppie di archi ciclichi e pe' vertici di θ

$$\frac{y^2}{v^2 - w^2} - \frac{z^2}{u^2 - v^2} = 0, \ldots, \frac{x^2}{v^2 - w^2} = \cdots;$$

e dualmente per le coppie di punti focali e i lati di Θ. E le equazioni della corrispondenza sono

$$\frac{x_1}{x'} : \frac{y_1}{y'} : \frac{z_1}{z'} = \alpha : \beta : \gamma = \frac{X_1}{X'} : \frac{Y_1}{Y'} : \frac{Z_1}{Z'}.$$

Di quanto si è dianzi accennato è facile enunciar l'analogo per forme eterografiche (cioè reciproche o correlative).

Quando due forme omografiche hanno lo stesso sostegno, vi è una terna efg di punti doppî e una EFG di archi doppî, ove E è l'arco $fg, \cdots$; l'autore dà le equazioni in x, y, z e un'ausiliaria di 3° grado che li determinano, e le discute, notando il caso della « prospettiva » od « omologia » ed altri. Determina inoltre gli archi ciclici e i punti focali, discutendo i casi particolari. Dimostra che gli archi per un ω_1 e gli omologhi per un ω' s'incontrano su una conica per e, f, g, e che quattro fra tali coniche son bitangenti a i e j; e dualmente. Ma troppo lungo sarebbe riassumere le considerazioni dell'autore.

Da ultimo egli tratta di due sistemi eterografici con lo stesso sostegno. Trova tre punti « doppî » (cioè aventi ciascuno uno stesso arco omologo, sia considerato in S_1 sia in S') e tre archi « doppî »; dà le equazioni della corrispondenza e degli elementi doppî; esamina i casi particolari.

Questa Memoria è importante, così per l'accurata ed acuta disamina che l'autore fa dei varî casi che l'argomento presenta, come per le proprietà degli archi ciclici e dei punti focali, le quali sono interessanti e non erano state date anteriormente.

Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie. Memoria (Atti di Napoli, II, 1865).

Estendendo i principî posti nell'omonimo lavoro sui sistemi di 1ª specie, il Battaglini qui considera due sistemi omografici di 2ª specie con lo stesso sostegno. Se $\omega_0, \omega_1, \ldots$ come elementi del 1° sistema hanno omologhi nel 2° $\omega_1, \omega_2, \ldots$, ovvero come elementi del 2° hanno $\omega_{-1}, \omega_{-2}, \ldots$, nel 1°, dice ω_μ, ω_ν omologhi in due sistemi « equianarmonici consecutivi d'ordine $\nu - \mu$ »; e dualmente per archi $\Omega_0, \ldots$. Riferiti i due proposti sistemi alle terne di elementi doppî efg, EFG, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} E\,\omega_i}{\operatorname{sen} E\,\omega_{i-1}} : \cdots = \alpha : \beta : \gamma = \frac{\operatorname{sen} e\,\Omega_{i-1}}{\operatorname{sen} e\,\Omega_i} : \cdots,$$

e quindi due sistemi consecutivi qualunque hanno quei medesimi elementi doppî, e due punti doppî e due archi doppî reali sono i limiti dei punti ed archi omologhi consecutivi di un punto od arco qualunque.

Se ω_0, ω_{-0} son coniugati rispetto al quadrilatero avente per vertici i punti bisettori interni ed esterni degli archi fg, ge, ef, tali sono anche ω_i, ω_{-i}, « simmetrici » rispetto ai bisettori; essi son coniugati altresì rispetto al quadrilatero avente per diagonali E, F, G e per un lato l'arco armonico di ω_0 rispetto a EFG; onde nei sistemi consecutivi l'arco ω_{-0}, armonico di un punto ω_0 rispetto alla coppia di archi $\omega_i e, \omega_{-i} e$, è anche armonico di ω_0 rispetto agli archi doppî fe, ge. E dualmente.

Se $\alpha^m = -\beta^m$, le coppie di punti consecutivi d'ordine m su G sono in involuzione, nonchè le coppie di archi consecutivi d'ordine m per g, e si ha una « involuzione parziale d'ordine $2m$ relativa a (g, G) ».

Se $\alpha^m = \beta^m$, due punti consecutivi d'ordine m sono sempre in un arco con g, e dualmente per gli archi, e si ha « involuzione parziale d'ordine m » o « prospettiva d'ordine m » con g e G per « centro » ed « asse ».

Se $\alpha^m = \beta^m = -\gamma^m$, si accumulano i due casi precedenti, e si ha « involuzione totale d'ordine $2m$ »: le coppie di punti consecutivi d'ordine m giacenti su uno stesso Ω per g fanno un'involuzione con punti doppî g, ΩG. E dualmente.

Se $\alpha^m = \beta^m = \gamma^m$, coincide ω_m con ω_0 e Ω_m con Ω_0, e si ha « involuzione totale d'ordine m » o « identità d'ordine m ». « Cicli » di essa sono $(\omega_0, \ldots, \omega_{m-1})$, $(\Omega_0, \ldots, \Omega_{m-1})$.

Un'involuzione, parziale o totale, « relativa a m » contiene quelle relative ai summultipli di m. Se l'ordine supera 2, due punti doppî e due archi doppî sono imaginari.

In un'involuzione parziale d'ordine $m > 2$ relativa a (g, G), se o_i, O_i indicano il punto G. $g\omega_i$ e l'arco g. GΩ_i, $(o_0, o_1, \ldots, o_{m-1})$ è ciclo in un'involuzione d'ordine m su G, e $(O_0, O_1, \ldots, O_{m-1})$ ciclo in un'involuzione d'ordine m intorno a g. Detti « armonici dei diversi ordini » di un Ω rispetto a $(o_0, \ldots, \omega_{m-1})$ gli armonici di ΩG, e dualmente, si ottengono subito varie proprietà, applicando le già conosciute per forme di 1ª specie.

In un'involuzione totale d'ordine $m > 2$, i cicli di punti e di archi appartengono a coniche tangenti E,F in e, f, elementi doppî imaginarî. Detti ω', ω'' « armonici fra loro di un certo ordine rispetto a un ciclo » se gli archi che li proiettano da e, f o g son tali rispetto agli archi proiettanti il ciclo, e dualmente, si ha: gli armonici di un punto di ordine $n < m$ rispetto a un ciclo variabile formano un'altra involuzione totale di ordine n con gli stessi punti doppî della proposta; se $m' = m'' = m$ e ω' è armonico di ordine m' di ω'' rispetto a un ciclo della proposta, viceversa sarà ω'' armonico d'ordine m'' di ω' rispetto a quel ciclo; gli armonici de' diversi ordini di un punto, rispetto al gruppo de' suoi armonici di ordine n presi rispetto a un ciclo della proposta, sono armonici anche rispetto a questo ciclo; e due armonici dello stess'ordine di due altri punti, rispetto a un ciclo variabile, descrivono due sistemi equianarmonici aventi gli stessi elementi doppî della proposta involuzione. Dualmente per gli archi.

Circa due sistemi omografici in generale, l'autore osserva che la curva passante pei punti omologhi consecutivi $\omega_0, \omega_1, \ldots$ ha l'equazione $(x:x_0)^{\xi}(y:y_0)^{\eta}(z:z_0)^{\zeta} = 1$, ove $\xi = \log\beta - \log\gamma, \ldots$; che essa non muta mentre ω_0 si muove su di essa; che, se sussiste una relazione $\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0$ con λ, μ, ν interi, l'equazione del luogo diviene $(x:x_0)^{\mu-\nu}(y:y_0)^{\nu-\lambda}(z:z_0)^{\lambda-\mu} = 1$, che è algebrica; che in particolare, se due punti consecutivi d'ordine qualsiasi sono su una conica per due punti doppî e ivi tangente due archi doppî, vi saranno tutti i consecutivi di ciascuno di quelli (p. e. nell'involuzione totale). E dualmente.

Circa due sistemi eterografici, si ha

$$\frac{\text{sen E}\,\omega_{2i}}{\text{sen E}\,\omega_0} : \cdots = \mu^{2i} : \nu^{2i} : \mu^i\nu^i = \frac{\text{sen}\,e\,\Omega_0}{\text{sen}\,e\,\Omega_{2i}} : \cdots;$$

e però, se $\mu^m = \pm\nu^m$, si ha involuzione d'ordine $2m$ o $4m$ per due sistemi consecutivi d'ordine $2m$; e se $\mu^{2m+1} = \nu^{2m+1}$, si ha involuzione d'ordine $4m+2$ per due sistemi consecutivi di ordine dispari (i quali sono eterografici).

Ho già anteriormente osservato che la teoria delle involuzioni d'ordine superiore (o proiettività cicliche) nelle forme di seconda specie, come in quelle di prima, fu

fondata in gran parte dal Battaglini. Egli fu anche il primo a considerare le curve cui appartengono gli elementi consecutivi di una omografia qualsiasi, assegnandone le proprietà qui riportate ed altre che per brevità si tralasciano. Soltanto nel 1868 Clebsch e Gordan presero in esame tali curve (« Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln », Math. Ann. v. 1), ma non citarono il nostro autore nè altri.

Nel 1871 le stesse curve furono poscia studiate da Klein e Lie come quelle che l'omografia trasforma in sè stesse (« Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich wielen linearen Transformationen in sich übergehen », Math. Ann. v. 4); gli autori citano soltanto il lavoro di Clebsch e Gordan.

Intorno ai momenti geometrici di primo grado. Nota (Rend. Napoli, 1866).

Oggetto del lavoro è di stabilire i principî della teoria meccanica dei momenti indipendentemente dalla considerazione delle forze, nelle forme geometriche di 1ª e 2ª specie. Ciò che esso presenta di originale si è l'estensione della teoria dal piano (euclideo) ad una forma geometrica qualunque di 2ª specie, la quale è qui rappresentata, come nei lavori precedenti, su una sfera.

Lavori sulle forme algebriche ternarie.

Sulle forme ternarie quadratiche. Memoria I (Atti di Napoli, III, 1867).

L'autore comincia col delineare una teoria astratta del « continuo a due dimensioni », senza necessario intervento di considerazioni geometriche. « Elemento » s del continuo è ogni « determinazione » posta in esso da valori attribuiti ai rapporti fra tre variabili $s_1\ s_2\ s_3$, e queste sono le « coordinate » dell'elemento. Ad esse si contrappongono dualmente altre tre variabili $S_1\ S_2\ S_3$, che forniscono una specie di elementi S, ciascuno dei quali si suppone aver per coordinate i coefficienti di una equazione lineare fra le tre prime variabili $s_1S_1 + s_2S_2 + s_3S_3 = 0$. Si appartengono » due elementi s S legati da questa equazione, e si possono distinguere dicendoli rispettivamente di « 1ª classe » e di » 1° ordine ».

« Potenza » di una terna $s\,s'\,s''$ o $S\,S'\,S''$ è il determinante delle loro coordinate, ed è nulla se la terna appartiene a un S o s. Con la nozione di potenza si costruiscono le altre di « terna fondamentale » di elementi, di coordinate « rispetto » a una terna data, di « rapporto anarmonico » od « armonico » fra due coppie, di coppie in « involuzione » e di « serie equianarmoniche ».

Premesse queste nozioni, l'autore considera il « luogo » d'insieme degli elementi caratterizzati dall'annullarsi di una forma quadratica ternaria di $s_1\ s_2\ s_3$, per la quale adopera la notazione ordinaria, e talora anche la notazione « ombrale » o « simbolica », e che chiama « quadrica ». Ne studia il discriminante e la forma « congiunta » (cioè la reciproca od aggiunta). Assegna la condizione di « armonia » di due elementi (che è data dall'emanante), nonchè l'elemento duale cui appartiene l'insieme degli elementi armonici di un dato; e tratta di due terne « armoniche fra loro » e delle terne « armoniche in sè ». Indi cerca gli elementi comuni a una forma quadratica e una lineare.

Segue un'esposizione generale della « metrica analitica » del sistema ternario secondo i concetti del *Cayley*, dei quali il nostro autore riconosceva tutta la grandissima importanza.

La rappresentazione del sistema ternario mediante le forme geometriche di 2ª specie, e l'applicazione ad esse della metrica anzidetta, chiudono il lavoro.

Sulle forme ternarie quadratiche. Memoria II (ibid.).

Qui passa l'autore a trattare una « serie semplice e di 1° grado » di forme quadratiche ternarie, definita da due tali forme U′ U″ (fascio di coniche, ecc.). Tratta delle tre forme degeneri della serie e dei loro elementi doppî; del « rapporto anarmonico di quattro forme della serie » (quello delle polari di un medesimo punto), delle coppie di elementi armonici rispetto a tutte le forme della serie; della terna coniugata rispetto alle medesime; della forma quadratica luogo degli armonici degli *s* di un S, che chiama « quadrica dei nove elementi » (i tre doppî e gli armonici di S rispetto alle coppie di elementi comuni alle forme della serie); dell'involuzione che la serie segna su ogni S; della genesi « proiettiva » delle quadriche.

La cubica binaria esprimente il discriminante di una forma della serie, il suo invariante e i due suoi covarianti forniscono il significato degl'invarianti delle due quadriche U′ U″, e determinano le quadriche equianarmoniche o armoniche con le tre quadriche degeneri; altri significati dei detti invarianti fornisce la considerazione delle « serie multiple » di quadriche « armoniche » con una data; ed è pure assegnata la condizione perché, date quattro quadriche della serie, una terna di elementi possa esser iscritta in una e circoscritta alle altre.

Mediante le quadriche congiunte u', u'',... a quelle della serie, si ottiene il controvariante che dà i quattro elementi-base della serie e il contravariante fondamentale w delle U′ U″ col suo significato, nonchè dualmente il covariante W. Gli elementi s armonici degli S appartenenti a u', rispetto a u'', formano la quadrica « armonica congiunta » (polare-reciproca) di u' rispetto a u''. Indi si calcola il covariante e il contravariante fondamentali delle coppie U′W, $u'w$, e si mostra il modo di calcolare la forma congiunta e il discriminante di ciascun covariante o contravariante di 2° grado del sistema di due quadriche, nonchè le forme invariantive di due quadriche qualunque della serie, applicandole ad una quadrica che può dirsi « dei quattordici elementi » e che presenta proprietà notevoli.

Segue la ricerca di parecchie forme invariantive di grado superiore al 2°; p. es. quelle che determinano la terna delle quadriche degeneri, la coppia delle equianarmoniche, la terna delle armoniche, ed altre. Indi sono determinati e discussi gli elementi comuni a due quadriche.

Chiude l'applicazione alle coniche ed ai coni di 2° grado, e specialmente alla serie determinata da una conica (o cono) e dall'assoluto del suo piano supposto euclideo (o della stella), il che conduce alle ben note formole per determinare i diametri e i piani principali, i fuochi e le rette focali.

Come ognun vede, in questi due lavori sulle forme quadratiche ternarie si trova un'abbondante raccolta di proprietà già prima conosciute, ma esposte con unità di metodo, con felice spirito di generalità, e con l'aggiunta di proprietà nuove note-

voli. Non vi è fatto cenno del « sistema completo » di due forme quadratiche; solo vi è osservato, come cosa già assodata, che esse ammettono un solo covariante ed un solo contravariante simultanei. La determinazione del sistema completo fu poi fatta dal Gordan.

Sulle forme ternarie di grado qualunque. Memoria I (Atti di Napoli, IV, 1868).

Oggetto è la rappresentazione geometrica di alcuni tra gl'invarianti, i covarianti e i contravarianti delle forme ternarie di grado qualunque, appoggiandosi ai concetti posti nelle precedenti Memorie.

Definite le forme pure e miste con le loro notazioni « ombrali », e le sostituzioni lineari su variabili cogredienti o contragredienti, si assegna il carattere analitico dei relativi concomitanti e plessi-concomitanti.

Indi si dànno le condizioni per gli elementi multipli di una forma a tre variabili; si discorre del discriminante, della forma congiunta, del contravariante risultante di due forme (che ne dà gli elementi comuni), e dell'invariante risultante di tre forme.

Seguono le proprietà dei sistemi armonici dei diversi ordini di una forma ternaria rispetto a un elemento; onde le formole di Plücker e la nozione di « genere ».

Lo studio degli emananti puri e misti e delle loro forme congiunte conduce ai gruppi coniugati armonici rispetto ad una forma ternaria; specialmente son messi in rilievo « l'invariante armonizzante » di due forme a variabili contragredienti, « il contravariante armonizzante » di due forme a variabili cogredienti (insieme degli S che determinano con esse due gruppi armonici fra loro), e « l'invariante armonizzante » di tre forme di variabili cogredienti o contragredienti (esprimente che il contravariante armonizzante di due è armonico rispetto alla rimanente).

Quindi si passa a trattare degli armonizzanti degli emananti, dei « concomitanti associati » e di altri concomitanti.

Finalmente sono discusse le forme « sizigetiche », cioè di un sistema lineare, e le involuzioni multiple cui dànno luogo; con ispeciale riguardo ai loro elementi multipli ed alle forme comuni a più involuzioni.

Oltre a partecipare ai pregi che abbiamo ravvisati nelle due Memorie sulle forme quadratiche ternarie, la presente ne offre uno particolare: ed è l'uso ampio e sistematico che vi è fatto della notazione ombrale o simbolica, la quale è qui intesa in senso più lato del comune, poichè una forma di ordine n vi è denotata da $(A_1x + B_1y + C_1z)\,(A_2x + B_2y + C_2z)\ldots$ Inoltre è degno singolarmente di nota il procedimento con cui qui l'autore suole assorgere da invarianti binarî a contravarianti ternarî, il quale è in sostanza quel medesimo « Uebertragunsprincip » che il Clebsch formulò nel 1860 (Journ. Crelle, v. 59), ma che il Battaglini trovò da sè, come si argomenta dalla dimostrazione che ne dà per i singoli casi nei quali lo adopera senza enunciarlo in generale, e dall'assenza di ogni citazione intorno alla provenienza di esso.

Lavori sui complessi di rette.

Ai complessi di rette si riferiscono i seguenti lavori:

Intorno ai sistemi di rette di prim'ordine. Nota (Rend. Napoli, 1866, fasc. 6.).

Intorno ai sistemi di rette di secondo grado. Memoria (Atti di Napoli, III, 1866).

Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque. Memoria (Atti di Napoli, IV, 1868).

Nell'anno 1865 il Plücker fece la prima comunicazione intorno ai « complessi » di rette nello spazio, enunciando alcune proprietà generali dei complessi, delle congruenze e delle rigate da essi originate, nonchè alcune proprietà particolari dei complessi e delle congruenze lineari.

Primo a seguirlo nel nuovo fecondo campo di ricerche fu il Battaglini, il quale non soltanto dimostrò le proprietà enunciate da lui, ma molte ne aggiunse relative ai complessi di 2° grado (1866), e poscia anche a quelli di grado qualsiasi (1868). Secondo il Plücker, le dimostrazioni dovevano esser condotte con lo strumento delle « coordinate di una retta nello spazio », che egli aveva introdotte come una concezione sua prop ria; ma il Battaglini, prima di servirsi di esse, diè loro una forma più generale, omogenea e simmetrica, definendole come i determinanti della matrice delle coordinate omogenee di una coppia di punti o di piani individuanti la retta. Più tardi si riconobbe che già il Cayley (1859) aveva adoperati questi determinanti, con lo scopo di rappresentare mediante una sola equazione qualunque curva dello spazio.

Morto intanto l'illustre fondatore della teoria dei complessi, fu pubblicata nel 1868 a cura del Clebsch la 1ª parte della sua opera « *Neue Geometrie des Raumes* », e nel 1869 a cura del Klein la 2ª parte. Il Clebsch nella prefazione alla 1ª parte citò i due primi lavori del Battaglini, per dichiarare che il Plücker aveva trovato da sè i risultati sui complessi di 2° grado già pubblicati dal nostro autore: ma non è perciò meno da ammirare la prontezza con cui questi si era impossessato dei concetti del Plücker; la maestria che addimostrò nell'uso delle coordinate della retta, dopo averne perfezionata la struttura; la rapidità ed eleganza dei calcoli e delle formole, che al certo non si riscontrano nell'opera del Plücker. Ed al nostro autore spetta altresì il gran merito di essere stato il primo a recare sistematicamente e largamente nelle ricerche sui complessi il potente sussidio della teoria delle forme algebriche; al qual merito si aggiunga quello di essere stato il primo a introdurre nello studio dei complessi la notazione « ombrale » o « simbolica », che il Clebsch poscia (Math. Ann., 1869) perfezionò, rendendo i simboli più snodati e più atti al passaggio da formole in coordinate di rette a quelle in coordinate di punti o di piani.

Il Klein nella prefazione alla 2ª parte della *Neue Geometrie* dichiarò di aver preso cognizione della ricca Memoria del Battaglini sui complessi di 2° grado, ma di non aver potuto tenerla come norma nell'elaborare l'opera del Plücker, poichè il Battaglini aveva assunto come equazione semplificata di un complesso di 2° grado

un' equazione che presupponeva una duplice particolarizzazione del complesso; circostanza, sulla quale il Klein si proponeva di ritornare. Ed infatti egli provò la censura mossa al Battaglini mediante la sua Dissertazione inaugurale « *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form* » (Bonn, 1868). Ma, sebbene il nostro autore avesse posto a base dello studio dei complessi di 2° grado un' equazione che non rappresenta il più generale complesso di quel grado, pure è giustizia convenire che i suoi ragionamenti (eccetto quelli concernenti la superficie singolare, che per lui è il tetraedroide), valgono anche pel complesso più generale, non dipendendo dalla forma dell'equazione; e del resto anche gran parte delle sue formole si adattano al complesso più generale con lievi modificazioni.

Insomma, il nome del Battaglini non potrà venir pretermesso da chiunque voglia scriver la storia della teoria dei complessi; e ciò non solo a cagione del particolare complesso di 2° grado cui quel nome è oggidì attribuito, ma anche a cagione del contributo recato alla teoria generale.

Poichè la via lunga mi sospinge, io non darò, come per altre scritture del Battaglini, un sunto di queste sui complessi; rimandando a quello che della 2ª e 3ª diede egli stesso (Rend. Napoli, 1886 e 1868). Mi basta notare che, rispetto ai complessi quadratici, egli considera, oltre i coni e le coniche e le superficie « meridiane » o « equatoriali » del complesso, anche la quadrica luogo di un punto le cui congiungenti a due punti fissi siano coniugate rispetto al cono corrispondente al punto, e la superficie di 3° ordine luogo delle coppie di rette passanti per un punto mobile di una retta fissa e giacenti su quella quadrica che nel modo suddetto corrisponde al punto mobile e ad un punto fisso della retta fissa. Insieme a questi due luoghi considera del pari i due inviluppi loro duali.

E rispetto ai complessi superiori, accennerò che il nostro autore, assunta l'equazione or come potenza di una forma lineare simbolica, or (più arditamente) come prodotto di distinte forme lineari simboliche, trae abilmente dalla considerazione del discriminante di una forma binaria una rappresentazione dei coni del complesso come inviluppi e delle curve come luoghi; che parimente del risultante di due binarie si serve per determinare le rette comuni a due complessi ed appartenenti a un punto o piano, e dal risultante di tre binarie deduce l'equazione della rigata comune a tre complessi. In seguito gli emananti di una forma ternaria forniscono la rappresentazione dei coni armonici di diversi ordini rispetto ai coni del complesso; e gl'invarianti lineari ne' coefficienti di due binarie o di due o tre ternarie di egual grado conducono al cono che seca i coni corrispondenti al suo vertice in due complessi di egual grado secondo gruppi di rette coniugati armonici, ed anche alle relazioni fra' punti i cui coni nei due complessi siano armonici, ed alla superficie luogo di un punto i cui coni in tre complessi di egual grado siano armonici fra loro. Per tre complessi di grado pari e coincidenti in uno l'ultima superficie ancora sussiste; anzi pel complesso quadratico essa diviene la superficie singolare, la quale così appare come prima di una famiglia di superficie: tal' è infatti giusta l' estensione del concetto di superficie singolare data dal Pasch.

Infine sono discusse: la serie dei coni corrispondenti ai punti di una retta in

un complesso, le serie de' coni armonici di diversi ordini della retta rispetto ai precedenti, gl'inviluppi di tali serie, le serie de' gruppi di piani tangenti ad essi coni e condotti per la retta, la superficie dei loro lati di contatto.

È superfluo enunciare le questioni duali alle precedenti.

Sui complessi di secondo grado. Nota (Memorie dei Lincei, vol. III, serie 3ª, 1878-79).

Questo lavoro si potrebbe ascrivere anche alla teoria dei « connessi », cui il nostro autore ha dedicato più di una comunicazione.

Se per ogni punto dello spazio un cono di ordine n sia definito, le rette di tutti i coni così ottenuti non costituiscono in generale un complesso, ma possono appartenere a diversi complessi. Così è dei coni di 2° ordine che proiettano cinque punti fissi da un punto mobile, e così delle coniche tangenti cinque piani fissi; come l'autore mostra con una interessante analisi.

L'equazione di un cono di 2° ordine proiettante quattro punti fissi, vertici di un tetraedro (che si assume come fondamentale) palesa che tali coni si distribuiscono tra infiniti (∞^1) complessi di 2° grado « tetraedrali », e che i coni di 2° ordine proiettanti cinque punti fissi (quei quattro e un altro) si distribuiscono tra quei complessi (e ciò in cinque modi), e i vertici di quei coni pei cinque punti che appartengano a uno assegnato di quei complessi sono su un cono di essi. La rappresentazione analitica di tutti i coni di 2° ordine proiettanti cinque punti fissi da un punto mobile è un « connesso » (estendendo la definizione del Clebsch) di punti e rette, in cui ad ogni punto corrisponde un complesso di 2° grado e ad ogni complesso un cono di 2° ordine.

Il luogo dei vertici dei coni di 2° ordine per sei punti fissi è una superficie di 4° ordine, contenente le rette per due dei sei punti, le rette comuni alle coppie di piani pei sei punti, la cubica gobba pei sei punti.

Tutto ciò si trasforma per dualità quando si parla di coniche tangenti a quattro, cinque o sei piani fissi. I complessi cui tali coniche appartengono non differiscono dai precedenti, qualora quattro dei piani fissi sian le facce del tetraedro avente per vertici quattro dei punti fissi.

I vertici dei coni di 2° ordine passanti per cinque punti fissi e tangenti a un piano fisso sono su una curva di 6° ordine nel piano fisso; e dualmente.

Lavori sull'applicazione della Geometria della retta alla Meccanica e su altre questioni di Meccanica.

Certi problemi della Meccanica dei corpi rigidi stanno in intima connessione con i concetti della Geometria della retta; specialmente la composizione di un sistema di forze agenti su un corpo rigido e il movimento infinitesimo di un corpo rigido. Di tale connessione parlò il Plücker fin dalla prima comunicazione del 1865 relativa alla Geometria della retta; poscia le dedicò un'apposita Memoria nel 1866, e vi ritornò in alcuni passi della « Neue Geometrie ». Egli si proponeva di svolger l'appli-

cazione dei suoi principî geometrici alla Meccanica in un' opera che avrebbe dovuto far seguito alla « Neue Geometrie »; ed è tanto più a deplorare che non abbia attuato il suo proponimento, in quanto i pochi passi ove accenna ai suoi concetti meccanici sono troppo brevi e di difficile intendimento, e a volte anche vaghi.

Son queste presso a poco le parole con cui il Klein comincia la sua « Notiz betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper » (Math. Ann., IV, 1871), nella quale egli esplicitamente ricorda come il Battaglini avesse già svolto in una serie di lavori del 1869 e 1870 le cose relative alle forze ed alle rotazioni infinitesime considerate mediante le loro « coordinate ».

I primi tre di tali lavori trattano la Statica dei sistemi di forma invariabile, i tre seguenti la Cinematica, i due ultimi la Dinamica; lavori elaborati, che in sostanza contengono risultati già acquisiti alla scienza, ma li presentano sotto un aspetto nuovo e interessante.

La dualità, che regna fra le proprietà dei sistemi di forze e dei sistemi di rotazioni infinitesime, è dal nostro autore accuratamente messa in rilievo; essa fu poscia più intimamente studiata e spiegata dal Klein (l. c.), con l'introduzione del concetto di « coordinate di un complesso lineare », e con l' interpretazione di « lavoro di un sistema di forze per effetto di un movimento infinitesimo » attribuita a quell'invariante bilineare nelle coordinate di due complessi lineari, che è nullo quando i due complessi sono « in involuzione » (secondo il Klein) « o armonici » (secondo il Battaglini).

Sulla composizione delle forze. Nota (Rend. Napoli, 1869, fasc. 2.).

Riferiti i punti **p** e i piani P a un tetraedro **abcd** o ABCD mercè le coordinate $a=\frac{\mathbf{p}\mathrm{A}}{\mathbf{a}\mathrm{A}}$,... e $\mathrm{A}=\frac{\mathrm{P}\mathbf{a}}{\mathrm{A}\mathbf{a}}$,..., l'autore vi riferisce anche le rette raggi ed assi mercè sei coordinate, ed esprime ciascuna coordinata per mezzo del prodotto della distanza fra la retta e uno spigolo del tetraedro pel seno dell'angolo fra la retta e lo spigolo stesso (prodotto che il Cayley chiama « momento » della retta e dello spigolo indefinito).

Ammesso che due forze eguali concorrenti abbiamo una risultante lungo la bisettrice del loro angolo, e che nella composizione di più forze sussista la proprietà commutativa ed associativa, perviene a comporre tre forze l, m, n applicate a **d** lungo gli spigoli **l**, **m**, **n** in una r, e trova $r^2 = l^2 + \cdots + 2mn\cos\mathbf{mn} + \cdots$, $l : \mathrm{sen}\,\mathbf{rmn} = \cdots = r : \mathrm{sen}\,\mathbf{lmn}$ (se **r** è la retta di r); indi dimostra che per forze concorrenti il momento della risultante rispetto a un piano è la somma dei momenti delle componenti. Sei forze eguali lungo gli spigoli del tetraedro dànno così a tre a tre nei vertici quattro risultanti, che secano le facce opposte in quattro punti, vertici di un tetraedro iscritto e circoscritto al proposto; ma nel caso che essi siano in una retta le sei forze hanno una risultante agente lungo tale retta, e si conoscono l'intensità della risultante e le coordinate della retta. Viceversa, ogni forza si può decomporre in sei lungo gli spigoli espresse da $f.\mathbf{bc}$,..., (se f,... son le coordinate della retta di azione della forza, formate con quelle degli estremi del segmento rappresentante la forza), e quindi anche ogni sistema di forze; quando il sistema ammette una risultante, questa è determinata,

e il suo momento rispetto a un asse è eguale alla somma di quelli delle forze date; quando il sistema si riduce a una coppia, la risultante è nulla ed all'infinito.

Dualmente, tre forze L, M, N lungo i tre spigoli del tetraedro posti nel piano D hanno una risultante R, e si ha $R^2 = L^2 + \cdots$, L : senRMN $= \cdots$; e per più forze in un piano il momento della risultante rispetto a un punto è la somma dei momenti delle componenti. Sei forze lungo gli spigoli del tetraedro dànno nelle facce quattro risultanti; e così via, analogamente a quel che si è detto innanzi.

Il duplice procedimento di composizione delle forze (conclude l'autore), rispecchia il principio meccanico di dualità, il quale trae origine dal doppio modo di considerar le forze, cioè come produttive di traslazione di punti o di rotazione di piani.

Sulla teorica dei momenti (Rend. Napoli, 1869).

Sulle serie di sistemi di forze (ibid.).

Dimostrato il teorema di Möbius « se di due sistemi rigidi uno è in equilibrio, è nulla la somma dei momenti dell'altro sistema rispetto alle rette delle forze del primo », si parla del complesso lineare degli assi di momento nullo; indi si fa variare il sistema in modo che questo complesso descriva un sistema lineare ∞ o ∞^2 di complessi.

Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido (Rend. Napoli, 1870).

Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido (ibid.).

Sulle dinami in involuzione (Atti di Napoli, IV, 1869).

Decomponendo le rotazioni infinitesime (dualmente alle forze) in sei intorno agli spigoli di un tetraedro, si ha il complesso lineare delle rette di velocità virtuali nulle, l'asse di rotazione strisciante, il complesso quadratico degli assi coniugati ortogonali. Indi si ritrovano i teoremi di Chasles sul moto finito di un sistema rigido.

Dette con Plücker « coordinate di una dinamе » le somme delle componenti parallele a tre assi di più forze agenti su un sistema rigido, e le somme de' loro momenti rispetto ai medesimi assi, l'autore sostituisce a tali coordinate le somme delle componenti delle forze secondo i sei spigoli di un tetraedro, cioè il sistema di sei forze agenti secondo gli spigoli ed equivalente al sistema delle forze date. Suo scopo è la ricerca delle proprietà delle dinami le cui coordinate verifichino una o più equazioni lineari omogenee.

Considera primieramente una forma bilineare nelle coordinate di due dinami, la quale rappresenta la somma dei tetraedri aventi per due spigoli opposti due segmenti rappresentanti rispettivamente forze qualunque dei due sistemi equivalenti alle due dinami. Quando essa è nulla, le due dinami son dette « armoniche ». Ogni dinamе che verifichi $n (< 6)$ equazioni lineari omogenee nelle sue coordinate è armonica con n dinami assegnate; le sue coordinate si esprimono linearmente mediante le coordinate di $6 - n$ dinami assegnate, e variando i coefficienti di queste si ha una « involuzione $(6-n)^{pla}$ » di dinami. A questa corrisponde un'involuzione n^{pla} « associata »; e due dinami qualunque di due involuzioni associate sono armoniche.

Esaminando i diversi casi dell'involuzione, si discutono le particolarità relative ai complessi degli assi di momento nullo ed alle rette « coniugate » rispetto alle

diverse dinami dell'involuzione come anche le proprietà speciali delle dinami aventi una risultante. E da ultimo si assegnano le condizioni perchè le dinami di un'involuzione siano in equilibrio.

Sulla teorica dei momenti d'inerzia. Nota (Rend. Napoli, 1871, fasc. 3.).

Nota sugli assi principali (Giorn., IX, 1871).

Sono studiati i momenti d'inerzia di un sistema rispetto a un punto, a un piano, a una retta, dando l'espressione di essi mediante le coordinate riferite a un tetraedro fondamentale, o più elementarmente in coordinate cartesiane.

Sul movimento di un sistema di forma invariabile (Rend. Napoli, 1871).

Sempre riferendosi a un tetraedro, si esibiscono le equazioni del movimento, onde le coordinate dell'asse centrale ad ogn'istante e le velocità di rotazione e di traslazione. S'indica altresì come determinare le coordinate di ciascun punto del sistema ad ogn'istante.

Sul movimento per una linea di 2° ordine. Nota (Atti dei Lincei, I_3, 1877).

Il Bertrand propose la questione: conoscendo che i pianeti descrivono coniche, e non supponendo altro, trovare l'espressione delle componenti della forza che li sollecita in funzione delle coordinate del suo punto di applicazione.

Per rispondervi in modo generale, il Battaglini considera le coordinate di un punto della conica come funzioni di un parametro, il quale sia alla sua volta funzione del tempo; e questa funzione è semplicemente periodica, se periodico è il movimento. Questa considerazione fornisce immediatamente le formole che determinano ad ogn'istante la posizione del mobile, la velocità e l'accelerazione; la funzione arbitraria del tempo contenuta nella formola verrà determinata integrando un'equazione differenziale, quando si imponga una condizione alla forza acceleratrice. Così, se si vuole che la forza passi per un punto fisso arbitrario, la forza è proporzionale alla distanza del mobile da quel punto e al cubo inverso della distanza del mobile dalla retta polare del punto fisso rispetto alla conica; onde i noti risultati, quando il punto fisso è centro o fuoco della conica. Viceversa, scelti un punto e una retta, si può determinare la conica che sarebbe percorsa da un mobile sollecitato da una forza conforme alla legge suddetta rispetto al punto ed alla retta, con date condizioni iniziali di posizione e di velocità del mobile. In generale, quando un mobile percorre una conica, l'autore trova che la forza accelatrice si può considerare come risultante di due forze, l'una diretta secondo il raggio vettore condotto da un punto fisso qualunque, l'altra secondo la tangente della curva; la prima forza è proporzionale al raggio vettore, al cubo inverso della distanza del mobile dalla retta polare del punto fisso, e ad una funzione arbitraria del parametro da cui dipende la posizione del mobile sulla curva; la seconda forza è proporzionale alla distanza inversa del punto fisso dalla tangente, al quadrato inverso della distanza del mobile dalla polare del punto fisso, e ad un'altra funzione del parametro (semiderivata della prima). Per ogni posizione del mobile si può determinare una conica (a doppio contatto con la proposta sulla polare del punto fisso), alla quale la direzione della forza è tangente; e la forza stessa

è proporzionale alla distanza inversa della sua direzione dal punto fisso, al quadrato inverso della distanza del mobile dalla polare del punto fisso, ed a quella funzione del parametro che entra nella espressione della componente della forza secondo la tangente.

Lo svolgimento delle enunciate proprietà è fatto con abile analisi, assumendo per assi cartesiani due rette coniugate rispetto alla conica ed ortogonali.

Siacci (Atti di Torino v. 14, e Comptes rendus v. 88) estese a linee piane qualunque i risultati del Battaglini, e poscia alle linee gobbe (Atti di Torino. v. 14).

Nota sul parallelogrammo delle forze (Giorn., I,, 1863).

Intorno alle condizioni di equilibrio di un sistema di forma invariabile (ibid.).

Intorno ad una Memoria del Sig. D. Turazza (Giorn., II, 1864).

Sull'equilibrio di quattro forze nello spazio, e dimostrazione di un teorema di A. Cayley (Giorn., IV, 1886).

Lavori sulla Geometria non-euclidea.

Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky. Nota (Rend. Napoli, 1867, fasc. 6.), tradotta nelle Nouvelles Annales de Mathématiques, VII_2, 1868).

Quando la traduzione francese, fatta dall'Hoüel, delle « Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien » del Lobatschewsky richiamò l'attenzione dei geometri sul sistema di Geometria fondato da costui sopra una teoria delle parallele diversa dalla ordinaria od « euclidea », e denominato « Geometria immaginaria » o « Pangeometria », il Battaglini si occupò bentosto di stabilire direttamente il principio che serve di base alla nuova dottrina, e pervenne per via diversa da quella tenuta dal Lobatschewsky alle formole che esprimono le relazioni fra le parti di un triangolo.

In verità più felice che rigoroso può dirsi il procedimento del Battaglini, che è il seguente:

In un piano P intorno a un punto p roti una retta Ω per una « quantità di rotazione » z a partir da una posizione iniziale Ω_0 fino alla posizione generica Ω_z: egli conviene di adoperare il simbolo

$$\Omega_z = \Omega_0 \, F(z) ,$$

essendo F funzione da determinarsi. All'uopo osserva che dev'essere

$$\Omega_x = \Omega_0 \, F(x) , \; \Omega_y = \Omega_0 \, F(y) , \; \Omega_z = \Omega_x F(z-x) , \; \Omega_z = \Omega_y F(z-y) ,$$

onde

$$F(x) \, F(z-x) = F(y) \, F(z-y) .$$

Sicchè, ponendo $x = 0$, osservando che $F(0) = 1$, e mutando z in $x + y$, risulta

$$F(x+y) = F(x) \, F(y) .$$

Qui suppone derivabile F, e da questa relazione funzionale trae

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{F'(z)}{F(z)} = k \text{ (costante)},$$

e però

$$F(z) = e^{kz} = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

Girando Ω intorno a p in P, passerà periodicamente per ogni determinata posizione, il che servirà a determinare k; ma, siccome per z reale e^{kz} non sarebbe periodica se k non fosse immaginaria pura, così scrive ik per k, essendo reale il nuovo k.

Qui definisce i « coseni, seni, tangenti, cotangenti ciclici » (o « di rotazione ») rispetto alla « base k », cioè

$$\cos z = 1 + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \cdots, \quad \operatorname{sen} z = \frac{kz}{1} - \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

e stabilisce la relazione $e^{\pm ikz} = \cos z \pm i \operatorname{sen} z$; le espressioni di $\cos(x+y), \ldots$, ecc.

Detto 2π il valor di kz per cui $e^{ikz} = 1$, sarà $2\pi : k$ il « periodo » di e^{ikz}, $\cos\,(2n+1)\frac{\pi}{2k} = 0$, $\operatorname{sen} 2n\,\frac{\pi}{2k} = 0$; onde deduce senz'altro

$$\cos z = \left(1 - \frac{4k^2 z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2 z^2}{9\pi^2}\right)\ldots, \quad \operatorname{sen} z = kz\left(1 - \frac{k^2 z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{k^2 z^2}{4\pi^2}\right)\ldots,$$

e per $kz = \frac{\pi}{2}$ anche $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots} = 3{,}14159\ldots$

Se dunque per unità di rotazione scelgasi la quarta parte del periodo, ossia pongasi $\frac{2\pi}{k} = 4$, cioè $k = \frac{\pi}{2}$, z misurerà l'angolo $\Omega_0\,\Omega_z$ riferito al retto come unità. Per semplicità suppone $k = 1$, ossia prende per unità angolare il retto diviso pel numero $\frac{\pi}{2}$.

Tutto ciò vale anche per un fascio di piani.

Quanto a un punto ω mobile su una retta L, adopera il simbolo

$$\omega_z = \omega_0\,F(z),$$

z essendo « la quantità di progressione »; e trova dal pari $F(z) = e^{kz}$. Ma qui non vi è periodo, onde k è indeterminata.

Definiti i « coseni, seni, tangenti, cotangenti iperbolici » (o « di progressione »)

$$\operatorname{Cos} z = 1 + \frac{k^2 z^2}{1.2} + \cdots, \quad \operatorname{Sen} z = \frac{kz}{1} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \cdots\cdots,$$

ha $e^{\pm kz} = \text{Cos}\, z \pm \text{Sen}\, z$, $\text{Cos}(x+y), \ldots$ Inoltre $\cos z = \text{Cos}\, i \frac{k}{z}, \ldots$; sicchè le funzioni iperboliche hanno il periodo immaginario $2i \frac{\pi}{k}$.

Qui z è la misura del segmento $\omega_0 \omega_z$ riferito a un segmento unità arbitrario: l'autore sceglie $k = 1$, ossia divide il segmento unità per k.

Ciò premesso: se Ω, M, N da P proiettano ω, m, n su L, evvi corrispondenza univoca fra $\frac{\text{Sen}\, m\, \omega}{\text{Sen}\, \omega\, n}$ e $\frac{\text{sen M}\, \Omega}{\text{sen}\, \Omega\, \text{N}}$; e in base a questo l'autore ritiene evidente la relazione $\frac{\text{Sen}\, m\, \omega}{\text{Sen}\, \omega\, n} = \lambda \frac{\text{sen M}\, \Omega}{\text{sen}\, \omega\, \text{N}}$. Scelti poi m, n equidistanti da o, piede della perpendicolare O condotta da p a L, è MO = ON, $\lambda = 1$; e posto $o\omega = \theta$, $\text{O}\Omega = \Theta$, la relazione diviene

$$\frac{\text{Tg}\, \theta}{\text{tg}\, \Theta} = \frac{\text{Tg}\, \frac{1}{2} mn}{\text{tg}\, \frac{1}{2} \text{MN}} = \text{tg} \Delta \, (\text{costante}).$$

Percorrendo ω la L, $\text{Tg}\theta$ varia fra $+1$ e -1, e alle due posizioni limiti di ω corrisponde $\Theta = \Delta$ (non retto); dunque per p passano due rette parallele a L (cioè secanti L all' infinito). Da $\text{Tg}\theta = \text{tg}\Theta : \text{tg}\Delta$ segue che una retta per p interna all'angolo 2Δ delle due dette parallele seca L a una distanza finita da o ed espressa da $\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\text{tg}\, \Delta + \text{tg}\, \Theta}{\text{tg}\, \Delta - \text{tg}\, \Theta}$, e che una retta per p esterna a quell'angolo seca L in un punto a una distanza « ideale » $\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\text{tg}\, \Delta + \text{tg}\, \Theta}{\text{tg}\, \Theta - \text{tg}\, \Delta} + i \frac{\pi}{2k}$, punto « al di là dell'infinito ».

L'« angolo di parallelismo » Δ varia con distanza d fra p e L, e l'autore pone $\cot \Delta = \Phi(d)$.

(Per $k = 0$ si ha la Geometria euclidea: i due punti all'infinito di ogni retta coincidono, e così le due parallele; e la retta rientra in sè all'infinito).

Considerando intorno a un punto p le rette ω di un piano P per p e i piani Ω per le ω e per una retta fissa l contenente p, l'autore asserisce che si ha, come dianzi, $\frac{\text{sen}\, m\, \omega}{\text{sen}\, \omega\, n} = \lambda \frac{\text{sen M}\, \Omega}{\text{sen}\, \Omega\, \text{N}}$, che può ridursi a $\frac{\text{tg}\, \theta}{\text{tg}\, \Theta} = \text{tg}\Delta$. Qui $\text{tg}\theta$ varia fra $+\infty$ e $-\infty$, e così $\text{tg}\Theta$; sicchè non sussiste più quanto si era detto innanzi circa l' incontro a distanza finita, infinita, ideale di Ω e P. Qui, se δ è l'angolo fra l e P, può porsi $\cot \Delta = \varphi(\delta)$.

Indi l'autore cerca le relazioni della Trigonometria piana. Per un triangolo infinitesimo vale la Trigonometria euclidea.

Pel triedro si ponga $ia:k$ per a, e così via.

La costante k non può determinarsi « a priori »; ma basterebbe una sola esperienza per determinare $1:k$, che è un segmento. Così, se si considera un triangolo equilatero, si ha

$$ka = \log \frac{1 + \sqrt{4 \cos^2 \frac{1}{2} \text{A} - 1}}{1 - \sqrt{4 \cos^2 \frac{1}{2} \text{A} - 1}};$$

sicchè, misurati a e A, si avrebbe k, il quale (per l'imperfezione dei nostri mezzi di osservazione) riescirebbe inferiore ad ogni grandezza misurabile, riconducendoci in pratica alla Geometria euclidea.

E così è riassunto quanto la presente Memoria offre di caratteristico.

Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche. Nota (Atti dei Lincei, 1873).

Nella Geometria non-euclidea (che qui è distinta in iperbolica ed ellittica secondo Klein) i circoli sono coniche bitangenti a una data conica fissa (conica all'infinito); quindi sorge la questione di cercare quale proprietà proiettiva corrisponda alla proprietà dei circoli euclidei di segarsi sotto angoli eguali, e perciò conviene considerare i rapporti anarmonici determinati dalle coppie di tangenti a due circoli non-euclidei in ciascun punto comune con le tangenti condotte dal punto medesimo alla conica all'infinito.

Assunte le equazioni delle tre coniche nella forma generale come luoghi U' U'' U o inviluppi u' u'' u, l'autore costruisce l'equazione ai rapporti anarmonici ϱ relativi a uno dei punti comuni a U' U'' o a una tangente comune a u' u''.

Se le tre coniche hanno un triangolo coniugato comune, il rapporto anarmonico è lo stesso pei quattro elementi $U'.U''$ o $u'.u''$. Se w è il contravariante di U' U'' e W quello di u' u'', osserva che posto $\omega = \varrho + \varrho^{-1}$, rispetto alla conica $u = k'u' + kw + k''u''$ sarà ϱ il rapporto anarmonico per ciascuno dei punti $U'.U''$, qualora si abbia la relazione $(\omega + 2)\, k'k'' = 4k^2$.

Se U' U'' sono bitangenti a U, non vi è un triangolo coniugato comune a tutte tre, la retta dei poli delle due corde di contatto rispetto a U seca U in due punti tali che ogni conica ivi bitangente a U secherà U' sotto uno stesso rapporto anarmonico rispetto a U, e lo stesso farà con U''. Che se vi è quel triangolo, allora, dato il rapporto anarmonico sezionale di U' U'', ad ogni U' corrisponde una U'', e viceversa. E se U' U'' U''' sono bitangenti a U e vi è un triangolo coniugato a tutte, dati i rapporti sezionali di U' U'' U''' a due a due, queste coniche sono determinate.

Se U' U'' non hanno un triangolo coniugato comune con U', i punti $U'.U''$ non presentano uno stesso rapporto anarmonico; senonchè può darsi che un vertice del triangolo coniugato a U' U'' e il lato opposto siano polo e polare per U, ed allora due dei quattro rapporti anarmonici sezionali risultano eguali, e così gli altri due. Questo caso comprende quello di U' U'' bitangenti a U, e sarà discusso in altra Nota.

Dualmente pei rapporti anarmonici tangenziali.

Nota sui circoli nella Geometria non-euclidea (Atti dei Lincei, 1873).

In questa Nota è trattato il caso accennato in fine della precedente. Si trovano due valori per ω, uno relativo a due dei punti $U'.U''$, l'altro agli altri due, le due coppie essendo allineate col punto comune alle corde di contatto con U; la quale proprietà costituisce la generalizzazione di quella del secarsi due circoli euclidei sotto angoli eguali in due punti al finito.

E qui sono ricercati i circoli non-euclidei secanti tre dati circoli in coppie di

punti sotto dati angoli, (p. es. i circoli ortogonali a tre circoli dati); ma non è agevole riassumere le considerazioni svolte dall'autore.

Dualmente per i rapporti anarmonici tangenziali.

Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche (Atti dei Lincei, 1874).

L'autore comincia estendendo alle quadriche le cose dette nella Nota analoga sulle coniche. Qui considera il rapporto anarmonico sezionale ϱ dei piani tangenti a due quadriche $U' U''$ in un punto comune coi due piani tangenti a una terza quadrica U faciente fascio con essi, e forma l'equazione in $\omega = \varrho + \varrho^{-1}$ per un assegnato punto $U'.U''$. Indi si limita al caso che $U' U'' U$ abbiano un tetraedro coniugato comune (che assume per fondamentale), e trova che nei punti che $U' U''$ han comuni con ciascun'altra quadrica U''' coniugata al medesimo tetraedro, il rapporto anarmonico di $U' U''$ rispetto a U è lo stesso: assegnato questo, i punti relativi $U'.U''$ si trovano su una certa superficie di 4° ordine.

Se $u\, u'\, u''$ sono di una schiera, cioè iscritte nella stessa sviluppabile, il rapporto è armonico per tutti i punti $U'.U''$.

Scelte $U_i\, U_j$ nel fascio $U' U''$ in guisa che il rapporto anarmonico dei piani tangenti di $U_i\, U_j\, U' U''$ nei punti comuni sia dato, si potrà in certi casi determinare una quadrica (tangente ai detti piani tangenti di $U_i\, U_j$) rispetto alla quale $U' U''$ avranno quel dato rapporto anarmonico sezionale.

Dualmente pel rapporto anarmonico tangenziale.

Infine l'autore nota che si potrebbero altrimenti definire i rapporti anarmonici sezionali e tangenziali, immaginando una tangente comune alle due quadriche $U' U''$, e per essa tirando i 4 piani tangenti a $U' U'' U$, o su essa considerando i punti di contatto con $u'\, u''$ e d'intersezione con u.

Sull'affinità circolare non-euclidea. Nota (Rend. Napoli, 1876, fasc. 11.).

Volle il Battaglini studiare nel presente lavoro una corrispondenza fra due piani, tale che a coniche bitangenti a una data conica corrispondano coniche anch'esse bitangenti a una data conica, estendendo così l'affinità circolare del Möbius alla Geometria non-euclidea; ma egli si limitò ad esibire le formole della trasformazione e la costruzione dei punti corrispondenti, rimettendo ad altro scritto, che non fu poi pubblicato, le relazioni che la trasformazione ha con la rappresentazione geometrica delle variabili complesse nella Geometria non-euclidea, a quel modo che la trasformazione del Möbius è espressa da una relazione lineare fra due variabili complesse nella Geometria euclidea.

Poste le formole generali esprimenti la dipendenza proiettiva fra due spazî tridimensionali, considera in essi due quadriche corrispondenti. Proiettando due coniche corrispondenti di queste da punti corrispondenti su piani corrispondenti fissi, ha due coniche bitangenti a due coniche fisse e coi punti in dipendenza (2 , 2); e dualmente.

Viceversa: dati due piani e in essi due coniche, fa passare per queste due quadriche, e tre coppie di due punti delle due quadriche assume comunque in guisa che così le due coniche come le due quadriche si corrispondano in una proiettività.

Osservando che il rapporto anarmonico sezionale di certe coniche nei due piani risulta lo stesso, riesce ad emanciparsi dalle quadriche operando soltanto nei due piani. In questa trasformazione sono eguali i rapporti anarmonici sezionali cui dànno luogo coniche corrispondenti; proprietà, che corrisponde alla conservazione degli angoli nella affinità circolare del Möbius.

Sulla Geometria proiettiva. Memoria I (Atti di Napoli, VI, 1873).

Il Battaglini si propose di stabilire le proprietà proiettive delle figure con un metodo diverso da quello di v. Staudt, giovandosi del concetto delle « reti geometriche » esposto dal Möbius nel *Barycentrische Calcül.* Egli prescinde da ogni ipotesi circa l' infinito dello spazio, in modo che i risultati possano applicarsi alle tre Geometrie dette dal Klein « ellittica, iperbolica, parabolica ».

In questa prima Memoria considera le proprietà di posizione.

Siano a b c tre punti non di una retta: essi determinano tre rette $f \equiv bc$, $g \equiv ca$, $h \equiv ab$, e un piano P. Sia p_0 un quarto punto di P: le rette p_0a, p_0b, p_0c secano f g h in tre nuovi punti a_0 b_0 c_0, i quali determinano tre nuove rette b_0c_0, c_0a_0, a_0b_0, che secano f g h in tre nuovi punti a^0 b^0 c^0, appartenenti (come si proverà poi) a una retta R^0. Le rette così ottenute si secano in nuovi punti, e questi individuano nuove rette, e così via, formando così una « rete geometrica ». L'autore asserisce potersi ogni punto p di P intendere individuato costruendo con una certa legge una rete geometrica, per modo che, partendo da quattro punti fondamentali a b c p_0, si pervenga, mediante una serie finita o infinita di costruzioni di rette per due punti e punti di due rette, al punto proposto; ma non mi pare che la brevissima dimostrazione che accenna sia sufficiente. La medesima asserzione si trova nel Möbius, ma ampiamente giustificata coll' attribuire ai singoli punti dei « pesi »; mentre il nostro autore ha voluto emanciparla da ogni corrispondenza fra punti e numeri.

Ogni retta di P sarà poi individuata da due punti.

Dualmente si ha una rete geometrica per la stella.

Nello spazio, analogamente, cinque punti dànno origine a una rete geometrica per individuare i singoli punti; e così pure cinque piani per individuare i piani. Una retta verrà individuata da due punti o due piani, e così via.

Due reti sono o « omografiche » o « duali », quando gli elementi iniziali si assumano a due a due corrispondenti, e corrispondenti si assumano due elementi dedotti da essi col procedimento esposto, operando sempre su elementi corrispondenti, omonimi o no.

La suaccennata retta R^0 (di cui si prova l'esistenza) e il punto p_0 son definiti « armonici » rispetto ad a b c, ed analogamente si definiscono una retta e un piano « armonici » nella stella, un punto e un piano « armonici » nello spazio.

Sulla Geometria proiettiva. Memoria II (Atti di Napoli, VI, 1874).

Scopo del lavoro è stabilire i principî con i quali si possa trattare analiticamente la Geometria proiettiva.

Essendo lo spazio una varietà triplamente infinita di punti o di piani, e tale essendo anche la varietà dei valori che possono attribuirsi a una terna di numeri

reali, si concepisce (dice l'autore) che si possano « coordinare » ai singoli punti o piani le singole terne di numeri reali, o meglio i rapporti di tre numeri reali ad un quarto; inoltre, essendo un piano individuato da tre punti, si può supporre (aggiunge l'autore) che la relazione fra le coordinate di un punto variabile in un dato piano sia lineare, e i coefficienti di essa siano le coordinate del piano; e dualmente. Senonchè coteste asserzioni non sembrano abbastanza giustificate.

Ciò posto, son definite le « coordinate » di una retta per due punti o in due piani, e sono esibite le formole esprimenti le relazioni fondamentali di posizione di punti, rette e piani.

Si passa alla costruzione dei punti, rette e piani di date coordinate, con un procedimento in sostanza simile a quello del Möbius.

Seguono alcune relazioni geometriche, le quali possono servire in certo modo come base alla Meccanica razionale. A ciascun elemento (punto, retta, piano) è annesso un coefficiente, detto « diname »; le dinami si « compongono » e « decompongono » con certe leggi; e le formole esprimenti i loro « momenti » si fondano su una forma quadratica, che compare nell'espressione della « risultante » delle dinami degli elementi di un tetraedro.

Cotesta forma quadratica è poi adoperata nel trattare dell' « assoluto » o « limite » dello spazio.

Fissato ad arbitrio questo limite, che è rappresentato da una equazione di 2° grado nelle coordinate del punto o delle rette o del piano, e distinti gli elementi dello spazio in « proprî » e « improprî », ossia in interni ed esterni al limite, si trovano le relazioni fra gli elementi polari rispetto al limite, e si distinguono le varie Geometrie secondo le ipotesi fatte sul limite, cioè secondo che due elementi polari sono entrambi proprî o entrambi improprî o l'uno proprio e l'altro improprio.

Da ultimo sono date le formole per la « trasformazione lineare » dello spazio, le nozioni di variabili « cogredienti » e « contragredienti », e quella di « concomitante »; ed è dimostrata la proprietà del rapporto anarmonico, di non alterarsi per trasformazioni lineari dello spazio.

Sulla Geometria proiettiva. Memoria III (Atti di Napoli, VII, 1875).

L'autore si occupa della forma generale quaternaria bilineare nelle coordinate di un punto e un piano. Eguagliata a zero essa rappresenta un connesso di 1° grado di punti e piani, il quale dà luogo alla trasformazione omografica delle figure dello spazio. Di questa omografia si esibiscono le formole generali e si determinano gli elementi uniti, distinguendo i principali casi speciali dell' omografia e dando la costruzione degli elementi uniti. Indi è discusso il complesso quadratico tedraedrale delle rette di due punti o piani corrispondenti (Reye « Geometrie der Lage »), e son risolute diverse questioni relative al medesimo.

Segue lo studio delle figure omografiche consecutive cui dà origine la proposta omografia applicata più volte, e in particolare delle involuzioni parziali o totali dei varî ordini; determinandosi altresì le curve o sviluppabili o superficie cui appartengono i punti o piani o rette successivamente omologhi a un assegnato punto o piano o retta.

Da ultimo sono esposte le proprietà delle figure omografiche in relazione all'assoluto. La « metrica proiettiva » è rimandata ad altro lavoro, il quale non fu poi pubblicato.

Dai cenni che precedono apparisce che lo scopo propostosi dal Battaglini in queste tre Memorie era di disciplinare cose già note, coordinandole al concetto delle reti geometriche del Möbius. Ho notato quali punti della trattazione avrebbero bisogno di esser più solidamente stabiliti. In recenti lavori sui fondamenti della Geometria proiettiva essi sono stati da parecchi geometri studiati con la diligenza che il delicato argomento esige.

Lavori sui connessi.

Sui connessi ternari di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione. Nota (Atti di Napoli, VIII, 1879).

Il connesso generale (2,2) nel piano fu studiato dal Clebsch pel primo analiticamente, e fu poscia costruito da Armenante e da Peano; ma qui si tratta di un particolare connesso, di quello cioè la cui equazione può ridursi alla forma $\Phi_a \varphi_a + \Phi_b \varphi_b = 0$ (essendo $\Phi_a = 0$, $\Phi_b = 0$ le equazioni di due coniche-luoghi e $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 0$ di due coniche inviluppi), e che il Battaglini dice « in involuzione semplice ». Siccome l'equazione risulta dall'eliminare $\lambda : \mu$ fra $\lambda \Phi_a + \mu \Phi_b = 0$, $\mu \varphi_a - \lambda \varphi_b = 0$, così lo studio del connesso si riduce sostanzialmente a quello delle relazioni fra un fascio e una schiera di coniche proiettivi fra loro: a un punto qualunque di una conica del fascio va accoppiata una tangente qualunque della conica corrispondente nella schiera, per comporre un « elemento » del connesso; salvo i punti base del fascio cui può accoppiarsi ogni retta, e le rette base della schiera cui può accoppiarsi ogni punto.

A una Φ del fascio corrisponde (in un'altra proiettività) una φ della schiera che è armonica con essa; e queste coppie di coniche formano un altro connesso, che è detto « delle linee armoniche ». Il primo connesso possiede due coppie di coniche Φ, φ comuni col secondo; le Φ, φ che nel primo corrispondono a due φ, Φ corrispondentisi nel secondo formano un terzo connesso, « associato » al primo.

Il proposto connesso è « ciclicamente proiettivo secondo n » o « in involuzione di grado n », se, prendendo di una Φ l'armonica φ, di questa la Φ corrispondente nel connesso, di questa la φ armonica, e così via per n volte, la $(n+1)^{\text{ma}}$ Φ coincide con la prima; e lo stesso sarà delle φ.

Nel proposto connesso la « locale singolare » (dei punti le cui φ degenerano in due punti) consta di tre coniche del fascio. Quelle Φ su cui i punti base sono armonici od equianarmonici son date dai covarianti di una certa cubica binaria. Vi è un connesso (4,4), nel quale ciascuna retta fa elemento con l'insieme delle due coniche φ le cui corrispondenti Φ toccano la retta.

Una « coincidenza » del connesso proposto ha per elementi un punto fisso insieme alle singole coppie di tangenti da esso condotte alle φ, e il luogo dei contatti di queste è di 6° ordine; ecc.

Sui connessi ternarî di 1° ordine e di 1ª classe. Nota (Atti di Napoli, IX, 1880).

Si tratta della proiettività definita da un connesso (1,1), cioè da una forma bilineare nelle coordinate dei punti di un piano e delle rette di un altro piano.

Due connessi (1,1) e i loro coniugati determinano una coincidenza e la sua « coniugata »; essi dànno origine ad una « serie semplice » (o fascio) di connessi, aventi una coincidenza comune. Di questa e delle « serie doppie e triple » si esibiscono le proprietà elementari.

L'autore discute l'equazione che determina i punti uniti nella proiettività fra due piani sovrapposti, dà la forma canonica del connesso, parla degli elementi successivamente corrispondenti e delle proiettività cicliche, sulla scorta di precedenti sue ricerche.

Il connesso (1,1) era stato già studiato dal Clebsch e dal Gordan mediante la notazione simbolica; il nostro autore adotta anch'egli tale notazione, con qualche modificazione che permette di dare all'equazione del connesso coniugato un aspetto più semplice, e completa lo studio del connesso medesimo con intenti più geometrici.

Sulle forme ternarie bilineari. Nota (Mem. dei Lincei, IX_3, 1880).

Qui si tratta di una forma lineare nelle coordinate dei punti di due piani, la quale con l'annullarsi stabilisce una correlazione fra i due piani; correlazione che viene ad essere stabilita anche dalla forma « congiunta » alla proposta, in cui figurano le coordinate delle rette.

Questa esposizione della teoria della correlazione è fatta mediante la notazione simbolica, conforme alla Nota precedente e subordinatamente alla teoria dei connessi. Dello stesso genere è il seguente lavoro.

Sulle forme quaternarie bilineari. Nota (Mem. dei Lincei, XII_3, 1881).

Questa Nota contiene la teoria della correlazione fra due spazî tridimensionali, rappresentata analiticamente dall'annullarsi di una forma bilineare nelle coordinate di due punti; forma, che è assunta in notazione simbolica ed è trattata mediante i procedimenti della teoria dei connessi. I risultati, se non riescono nuovi (p. e. le varie quadriche e i complessi lineari che si presentano furon trovati da Sturm, il complesso tetraedrale da Reye), sono qui offerti tuttavia sotto nuovi aspetti e meglio coordinati fra loro.

La correlazione è rappresentata dalla forma « congiunta » della proposta in coordinate di due piani; mentre in coordinate radiali o assiali di due rette è espressa da due forme « intermedie » rispetto alle due prime. Tutte queste forme si riducono a canoniche riferendole a tetraedri corrispondenti. Secondo che la caratteristica del determinante della proposta forma è 3, 2, 1, esiste un punto, una retta, un piano singolare; e dualmente per la congiunta.

Se i due spazî sono sovrapposti, i punti e i piani appartenenti ai piani o ai punti corrispondenti formano due quadriche; esse hanno in comune un quadrilatero, i cui elementi sono involutorî, e che dipende da una equazione di 4° grado, della quale sono interpretati i casi speciali. La retta comune ai due piani corrispondenti

a un punto nei due sensi genera un complesso lineare; e dualmente. Due rette corrispondenti che si sechino generano un complesso di 2° grado e involutorio. Su una retta data, un punto mobile, la traccia del piano corrispondente, e i due punti tracce della prima quadrica dànno un rapporto anarmonico determinato, e tutte le rette per cui esso è costante formano un complesso di 2° grado (valido anche pel rapporto anarmonico reciproco); dualmente si ha il complesso correlativo.

Gli elementi successivamente corrispondenti nella correlazione ripetuta, se punti o piani, appartengono ad una quadrica; se rette, ad un complesso tetraedrale. Può esservi periodicità.

Sulle forme binarie bilineari. Nota (Atti di Napoli, II_2, 1885).

Una forma bilineare nelle coordinate di due elementi di una punteggiata o di un fascio determina una proiettività; e gl' invarianti della forma si annullano rispettivamente se la proiettività è involutoria o singolare o parabolica o ciclica, ecc.

Due forme binarie bilineari determinano una serie semplice di proiettività, fra le quali si determinano le involutorie, ecc. Un invariante delle due forme si annulla se le due coppie di elementi uniti delle loro proiettività sono armoniche, un altro se uno degli elementi uniti ha per corrispondenti quelli dell'altra coppia nell'altra proiettività e nella sua inversa; ecc.

Tre forme determinano una serie doppia di proiettività, tra le quali infinite involutorie, ecc. Le forme della serie sono armoniche a una forma bilineare individuata.

Quattro forme determinano una serie tripla, ed esiste una forma armonica ad esse se il determinante dei loro cofficienti è nullo.

Date tre forme bilineari delle stesse coppie di variabili, ed assunti i loro valori come coordinate omogenee di un punto in un piano (o di un elemento di una forma geometrica di 2ª specie), sicchè a una coppia di elementi della retta o fascio corrisponda un punto del piano, l'autore fa percorrere a quest' ultimo una retta, sicchè la coppia percorre una proiettività, ed esamina le particolari proiettività dovute a particolari rette del piano: alle rette di un certo fascio corrispondono involuzioni, alle tangenti di certe coniche (tutte bitangenti) proiettività singolari o paraboliche o periodiche, e così via.

A una quaterna di forme corrispondono soltanto quei punti (o piani) dello spazio che appartengono ad una certa quadrica. Se il punto percorre una conica della quadrica, la coppia di elementi cui esso corrisponde percorre una proiettività; se il piano della conica è di una certa stella, la proiettività è involutoria; se il piano è tangente alla detta quadrica o a certe due altre (tutte tangenti lungo una conica), la proiettività è singolare o parabolica o periodica; ecc.

Fra gl'invarianti di quattro forme binarie bilineari passa una notevole relazione.

Lavori sulle curve e superficie di gradi superiori.

Sopra una curva di 3ª classe e di 4° ordine. Nota (Rend. Napoli, 1865, fasc. 12.).

Oggetto di questa Nota è dimostrare analiticamente varie proprietà di una curva di 3ª classe e 4° ordine, le quali in un caso particolare si riducono a quelle dell'*ipo-*

cicloide tricuspide, enunciate dallo Steiner (Giorn. di Crelle, t. 53) e dimostrate con metodo geometrico dal Cremona (ibid., t. 64).

Abbiasi una conica s e su di essa tre punti uvw; i lati del triangolo uvw e le tangenti ne' vertici opposti si secano su una retta G, la quale sechi s in $e\ f$, ed abbia per polo g rispetto a s. Un punto m di s ha rispetto al gruppo uvw due punti armonici di 2° ordine $\mu\ \mu'$ allineati con g, e se m è a sua volta armonico di 2° ordine di m_1, la retta mm_1 passa pel polo di $\mu\mu'$. Or $m\mu$, $m\mu'$, mm_1 inviluppano una stessa curva Γ di 3ª classe e 4° ordine, che tocca doppiamente G in $e\ f$ e semplicemente s in uvw, ed ha gu, gv, gw per tangenti cuspidali in tre punti $u_1\ v_1\ w_1$ di una conica bitangente a s in $e\ f$. Di questa curva sono qui ricercate le proprietà, e presentate con molta eleganza.

Se s è un circolo di centro g, uvw è un triangolo regolare, e si ottiene l'ipocicloide tricuspide.

Sulle serie di curve d' indice qualunque. Nota (Rend. Napoli, 1863, fasc. 6.).

Occasione di questo lavoro fu una rettificazione portata dal Jonquierès ad alcuni suoi teoremi (Giorn., I, 1863), suo scopo dare le ragioni di tale rettificazione.

L'autore suppone espresse le condizioni imposte alla curva generica della serie mediante equazioni intere fra i coefficienti dell'equazione della curva: con esse e con due equazioni ausiliarie prova che, se una C_n è soggetta a $\frac{n(n+3)}{2}-1$ condizioni e N è il prodotto dei gradi $n_1\ n_2, \ldots$, delle equazioni fra i coefficienti, l'equazione di C_n, resa razionale in un parametro $\xi:\mu$, può sempre ottenersi di grado N in esso e di grado Nn nelle coordinate (proiettive). Quando s'introduca un altro parametro $\xi':\mu'$, e l'equazione fra $\xi:\mu$ e $\xi':\mu'$ sia dei gradi k e k', l'equazione di C_n sale al grado Nk' in $\xi':\eta'$ e Nnk nelle coordinate: tal serie va considerata come la primitiva contata k' volte.

Dice « irreducibile » una serie S di C_n se non consta di serie parziali con ripetizione; anche se « composta » di più serie « semplici » S_i, nel qual caso N sarà somma degl'indici N_i delle S_i. E trova che, se due serie S′S″ di $C_{n'}C_{n''}$, d'indici N′ N″ e gradi $n'\ n''$, sono in dipendenza di 1° ordine (ossia biunivoca, che egli al solito asserisce dover esser espressa da una equazione bilineare fra i parametri), il luogo Γ dei punti comuni a $C_{n'}\ C_{n''}$ sarà di grado $N'N''(n'+n'')$.

Dice « razionale » una serie S se i coefficienti di C_n sono razionali in $\xi:\eta$, e prova che, se S′ S″ sono razionali nel teorema ora enunciato, Γ è di grado $N'n'+N''n''$, e questo è somma degli $N_i'n''+N_i''n'$, gradi di tante curve Γ_i in cui Γ si scompone quando S′ e S″ constano di serie parziali semplici $S'_i\ S_i''$ d'indici $N_i'\ N_i''$.

Da ultimo sono considerati dei casi particolari, e indicate le cautele occorrenti nel valutare l'indice N e il grado di Γ.

Di questa Nota fu pubblicata anche una traduzione tedesca (Archiv für Mathematik del Grunert, t. 41, 1863, p. 26). Essa reca al delicato argomento una contribuzione utile, benchè fosse non definitiva, a causa dei dubbî che lascia la valutazione del grado delle risultanti di cui l'autore fa uso, le quali non sono le più generali. Suo merito principale è di aver mostrato come si possa modificare la proposizione

del Jonquières « le curve di una serie di ordine n e indice N possono esser rappresentate da un' equazione ordinaria di grado n, i cui coefficienti sono funzioni intere e di grado N di un parametro λ'' nel caso che la serie non sia razionale ». La modificazione consiste nel rappresentare con una equazione non una curva sola, ma un « gruppo » di curve della serie (cfr. Segre « Intorno alla storia del principio di corrispondenza » nella Biblioteca mathematica di Eneström, 1892).

Intorno ad una superficie di 8° ordine. Nota (Atti dei Lincei, II_2, 1875).

L'oggetto di questa breve Nota si è d' indicare un modo di generazione della superficie F di potenziale nullo relativamente a tre centri $p_1 p_2 p_3$ di forze attrattive o ripulsive proporzionali direttamente alle masse e inversamente ai quadrati delle distanze. Se r_1 r_2 r_3 denotano le distanze pp_1 pp_2 pp_3, l'equazione di F è

$$\frac{k_1}{r_1} + \frac{k_2}{r_2} + \frac{k_3}{r_3} = 0.$$

Per ogni terna di parametri $u_1 u_2 u_3$ tali che $\frac{k_1}{u_1} + \ldots = 0$, si hanno tre sfere $\frac{r_2}{u_2} - \frac{r_3}{u_3} = 0, \ldots$, che l'autore dice S_u, di un fascio, il cui circolo base s_u sta su F; sfere ortogonali alla sfera S avente per equatore il circolo $p_1 p_2 p_3$, coi centri su una retta R_u. La F è anallagmatica rispetto a S.

L'inviluppo Σ di R_u è di 3° ordine e di 4ª classe: il punto doppio e la tangente d'inflessione sono armonici rispetto a $p_1 p_2 p_3$. La F è di 8° ordine, con due punti quadrupli immagina.i (comuni a tutti i circoli s_r) e con una linea quadrupla (il circolo assoluto).

Segue il modo di costruire i circoli s_u di F. Indi si prova che F può considerarsi come l'inviluppo delle sfere che hanno i centri su Σ e sono ortogonali a S.

Sulle cubiche ternarie sizigetiche. Memoria (Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini, 1879-1881).

Questa scrittura, una delle più belle ed interessanti del Battaglini, pose in nuova luce la reciprocità che regna fra le proprietà dei flessi di un fascio sizigetico di curve del 3° ordine e quelle delle polari armoniche dei flessi medesime (tangenti cuspidali della curva Cayleyana). L'autore ricercò le coniche rispetto a cui i flessi e le polari-armoniche sono elementi corrispondenti in un sistema polare (polari-reciproche), e sviluppò la importante corrispondenza fra le cubiche del fascio e le rispettive Cayleyane, generalizzando inoltre alcuni teoremi del Clebsch intorno alle coniche polari ed alle poloconiche relative alle medesime cubiche.

Nella 1ª parte del lavoro l'autore definisce come sizigetiche due cubiche di un piano quando secano ciascuna retta del piano in due terne di punti « armoniche fra loro » (ossia apolari). Ad ogni cubica ne corrispondono infinite sizigetiche, e formano con quella un sistema lineare o fascio « sizigetico »; tutte hanno i medesimi nove flessi. E qui l'autore passa in rassegna le note proprietà delle quattro terne « sizi-

getiche » di rette (ossia di rette contenenti tre flessi), delle polari-armoniche dei flessi, delle quattro terne « sizigetiche » di punti (ossia dei punti comuni a tre di esse), riferendo le coordinate omogenee ad un triangolo « sizigetico », ossia avente per lati una di quelle terne di rette (e quindi per vertici una di queste terne di punti). Ciò gli permette di formare le equazioni di nove coniche, rispetto a ciascuna delle quali i flessi hanno per polari le polari-armoniche in vario ordine, il triangolo di riferimento è coniugato (a sè stesso), altri due triangoli analoghi sono coniugati fra loro, e il rimanente consta di due tangenti e della corda di contatto [1]; la quale corda e il vertice opposto sono asse e centro di omologia dei due triangoli coniugati fra loro. Ciascuna conica è quella « dei quattordici punti » rispetto al quadrilatero avente come vertici le intersezioni di una delle rette per tre flessi coi lati del triangolo di riferimento e i punti armonici di queste intersezioni sui lati medesimi; e dualmente. Su ciascuna retta per tre flessi tre delle nove coniche hanno doppio contatto, e le tangenti comuni passano pel vertice opposto del triangolo cui quella retta appartiene; quindi le nove coniche si distribuiscono in tre terne. In ogni terna: due coniche qualunque sono polari-reciproche rispetto alla terza; ciascuna è luogo dei punti onde escono tangenti armoniche alle altre due, e dualmente; ciascuna ammette infiniti triangoli iscritti e circoscritti, che siano circoscritti ed iscritti all'una ed all'altra delle due coniche della terna. Una tale terna di coniche è detta « coniugata ».

Mutando il triangolo di riferimento si hanno altri tre gruppi di nove coniche; in tutto dunque sono trentasei coniche distinte, delle quali tre reali e formanti una terna.

Tutto ciò si applica per dualità alle curve di 3ª classe.

La 2ª parte è dedicata allo studio di una curva del 3° ordine e di una della 3ª classe « associate » in un piano, cioè tali che la conica polare di un punto qualunque del piano rispetto all'una sia armonica con la conica polare di una retta qualunque del piano rispetto all'altra (cioè la prima ammetta triangoli iscritti che rispetto all'altro siano coniugati, e dualmente). Per due cubiche associate è brevemente dimostrata la nota proprietà, che l'Hessiana e la Cayleyana dell'una sono rispettivamente la Cayleyana e l'Hessiana dell'altra.

Indi sono investigate le proprietà di due sistemi « associati », ossia di un fascio e di una schiera di cubiche, i cui individui sono a due a due associati. Le curve della schiera sono le Cayleyane di quelle del fascio, e viceversa; e però i due sistemi associati hanno le stesse terne sizigetiche di rette e di punti. Una tangente d'inflessione di una curva del fascio passa per una cuspide della curva associata.

La relazione fra una curva del fascio e la sua Hessiana è del tipo

$$\frac{\partial G}{\partial M} P + \frac{\partial G}{\partial N} Q = 0,$$

ove $M:N$, $P:Q$ sono i parametri individuanti le loro tangenti in uno dei flessi considerate come elementi di un fascio di rette, e $G=0$ è la forma quadratica binaria

[1] L'autore la dice tuttavia coniugata di sè stessa, ma è un « lapsus calami ».

in M : N determinante le quattro rette passanti per quel flesso e per le quattro coppie degli altri flessi.

Tralasciando le altre considerazioni che l'autore fa sulle curve associate, accenneremo soltanto che nella 3ª parte vien determinata quella cubica f_1 del fascio sizigetico, che è il luogo dei punti le cui coniche polari rispetto a due cubiche f, f' del fascio stesso siano armoniche; e dualmente per la schiera. Inoltre è dimostrato che, se F, F', F_1 sono le associate di f, f', f_1, la conica polare di una tangente qualunque di F_1 rispetto a F' è armonica con la poloconica della medesima tangente rispetto a f.

Sui punti sestatici di una curva qualunque. Nota (Rend. dei Lincei, IV, 1888).

Cayley e Spottiswoode risolsero la questione dei punti sestatici, nei quali una data curva C_r di ordine r ha un contatto sipunto con una conica C_2 da determinarsi.

Se $f(x, y) = 0$ è l'equazione cartesiana di C_r, e $y' y'' \dots, x' x'' \dots$ sono le derivate di y rispetto a x e di x rispetto a y ricavate dalla equazione, il Battaglini trova pei punti sestatici (esclusi i flessi, pei quali C_2 è la tangente contata due volte)

$$\Gamma_x = 9y'y^{\mathrm{v}} - 45y''y'''k^{\mathrm{iv}} + 40y'''^3 = 0 \text{ od anche } \Gamma_y = 9x'x^{\mathrm{v}} - \dots = 0.$$

Queste $\Gamma_x \Gamma_y$ sono « reciprocanti », secondo la definizione del Sylvester, e si ha $\Gamma_x = y'^{12} \Gamma_y$, $\Gamma_y = - x'^{12} \Gamma_x$.

Se in coordinate omogenee l'equazione di C_r è $F = (f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3)^r = f_s^r = a_s^r = b_x^r = \dots = 0$ simbolicamente, considerando le coordinate $s_1 s_2 s_3$ come funzioni di un parametro t, e ponendo $s_1' = \frac{ds_1}{dt}, \dots,$ onde $f_s^{r-1} f_{s'} = 0$, si può assumere $s_1' s_2' s_3'$ proporzionali a $f_s^{r-1}(fv)_1, f_s^{r'-1}(fv)_2, f_s^{r-1}(fv)_3$, ponendo $(fv)_1 = f_2 v_3 - f_3 v_2, \dots,$ e $v_1 v_2 v_3$ essendo le coordinate di una retta (che l'autore dice esser qualunque, ma che a me pare sia la tangente).

Ma a questo punto non è possibile riassumere le formole che l'autore svolge: basti accennare che egli trasforma Γ_x ponendo $x = \alpha_1 s_1 + \dots, y = \beta_1 s_1 + \dots,$ e dopo lunghi calcoli giunge ad una espressione di Γ_x di grado $15r - 21$; grado che può esser ridotto, per ragioni che in questa prima Nota non sono svolte se non in parte, nè furono in seguito completate. Forse l'autore ebbe ad accorgersi che la complicazione dei calcoli deludeva le speranze da lui comcepite.

Lavori sulle curve e superficie di 2° grado.

Iscrivere in una superficie di 2° grado un poligono, in modo che i lati passino per punti dati (Annali di Tortolini, II, 1851).

Prima si risolve il problema per la sfera, adoperando coordinate cartesiane. Si perviene ad una costruzione, che è valida per ogni quadrica. Come caso particolare, col sussidio di una quadrica, si risolve l'analogo problema per le coniche; e da ultimo s'indica una costruzione attuabile tutta nel piano.

Soluzione di un problema di Geometria a tre coordinate: descrivere una sfera in modo che interseghi quattro altre sfere ad angoli dati. Nota (Ann. Tortolini, II, 1851).

La soluzione è ottenuta per mezzo della Geometria analitica cartesiana.

Sul problema d'iscrivere in una curva di 2° grado un poligono, in modo che i lati passino per punti dati. Nota (Ann. Tortolini, II, 1851).

È indicata una soluzione più semplice di quella data in occasione dell'analogo problema sulle quadriche, partendo dal caso del circolo e poscia estendendo il risultato a qualsiasi conica.

Intorno ai sistemi di 2° ordine e di 2ª classe (Giorn., I, 1863).

Son dati dei criterî per distinguere varî casi, non tutti, che possono presentare gli elementi comuni a due cotali sistemi (p. es. i punti comuni a due coniche), con considerazioni di Geometria pura.

Sulla conica di minima area circoscritta ad un quadrigono. Nota (Ann. Tortolini, V, 1854).

Rammentate le proprietà polari di un fascio di coniche, l'autore esprime l'area di una conica del fascio mediante le coordinate del centro, ne cerca il minimo, e determina alcune coniche che si secano nei centri delle coniche minime.

Questione di geometria (Giorn., V, 1867).

Determinazione, per via sintetica, degli assi di una superficie di 2° ordine, conoscendone tre diametri coniugati.

Sopra alcune proprietà delle linee di 2° grado (Rend. Napoli, 1862, fasc. 1.).

Espressa la potenza di un punto rispetto a un circolo in coordinate omogenee, forma l'equazione ai quadrati dei semiassi di una conica, considerando tali quadrati come le potenze cambiate di segno del centro rispetto ai due circoli bitangenti alla conica. Esamina i casi di circoli e di coniche coniugate (di sè stesse) o circoscritte o iscritte al triangolo di riferimento. Quindi ritrova quattro teoremi di Faure e due di Steiner, esprimenti la somma dei quadrati dei semiassi di una conica coniugata o circoscritta o iscritta ad un triangolo mediante la potenza del suo centro rispetto al circolo coniugato o circoscritto o iscritto al triangolo medesimo e mediante alcune distanze (1).

Sulle superficie di 2° grado. (Rend. Napoli, 1862, fasc. 2.).

Estende allo spazio la ricerca precedente, fin dove non si presentino troppe complicazioni, col sussidio di tre sfere bitangenti a una superficie di 2° grado; ed ottiene così per una superficie di 2° grado coniugata ad un tetraedro tre teoremi

(1) Per gli accennati teoremi di Faure e Steiner si vegga un lavoro del sig. Cazamian (Nouv. Ann. 1894).

sulla somma de' quadrati de' semiassi, sulla somma de' prodotti a due a due di questi quadrati, e sul prodotto dei tre semiassi.

Nota sopra alcune questioni di Geometria (Rend. Napoli, 1862, fasc. 5.).

Appoggiandosi a formole delle Note precedenti, trova l'equazione in coordinate omogenee dei luoghi dei centri delle coniche iscritte o circoscritte ad un quadrilatero, e ne svolge varie proprietà note (Newton, Steiner), aggiungendone delle nuove; quali le proprietà di certe coniche, i cui punti comuni sono i centri delle coniche minime o massime iscritte o circoscritte al quadrilatero.

Nota di Geometria (Rend. Napoli, 1862, fasc. 6.).

In simil modo, completando ricerche di Steiner, trova i luoghi dei centri delle coniche coniugate o iscritte o circoscritte ad un triangolo, ed aventi costante la somma dei quadrati dei semiassi o il prodotto o il rapporto dei semiassi; per coniche coniugate o iscritte si ottiene un circolo nel 1° caso, una cubica nel 2°, una quartica nel 3°. Per coniche circoscritte si ottiene rispettivamente una quintica, una sestica, una quartica. Indi cerca i luoghi dei centri comuni a due coniche delle tre sorti, per le quali sia la stessa la somma dei quadrati dei semiassi o il prodotto o il rapporto: di tali luoghi uno è una retta, uno una coppia di circoli, altri sono curve di 3°, 5°, 7° ordine.

Sopra una questione di massimi e minimi. Nota (Rend. Napoli, 1863, fasc. 3.).

Fra le superficie di 2° ordine passanti per otto punti assegnati, ossia costituenti un fascio, cerca quelle per le quali il prodotto dei semiassi è massimo o minimo, e ne trova cinque, e ne determina i centri. Incidentalmente dà parecchie proprietà dei fasci di quadriche.

Nota intorno alla conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche tra di loro (Atti dei Lincei, 1872).

La questione era stata risoluta sinteticamente dal Cremona nella *Introduzione*, ed analiticamente dal Ruffini mediante coordinate cartesiane, che conducevano a formole complicate. Il nostro autore volle applicarvi le coordinate omogenee, come le più appropriate.

Le due coniche date U' U'' e la chiesta U ammettono in generale un triangolo coniugato comune; sicchè può assumersi $U' = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2$, $U'' = A''x^2 + ,...,$ $U = Ax^2 + ...$; e considerando le coniche come inviluppi $u' = a'X^2 + ...$, $u'' = a''X^2 + ...$, $u = aX^2 + ...$, (ove $a = BC, ...$). Si trova subito $A:B:C = \sqrt{A'A''}:\sqrt{B'B''}:\sqrt{C'C''}$; e scelti A B C proporzionali a tre valori dei radicali, si ottengono quattro coniche U U_1 U_2 U_3, o u u_1 u_2 u_3, che risolvono il problema.

L'autore esprime U U_1 U_2 U_3 mediante U' U'' e i loro invarianti e il loro contravariante W, facendo dipendere i moltiplicatori di U' U'' W da tre equazioni di 4° grado i cui coefficienti sono funzioni dei detti invarianti (dualmente per u u' u'' w); e questa è la parte più importante del lavoro.

Senonchè egli si fonda sulle forme canoniche; onde le espressioni che ottiene non convengono a tutti i casi che la mutua posizione di U' U'' può presentare.

Al medesimo argomento si riferisce un pregevole lavoro del Siacci (Atti di Torino, VII, 1872), nel quale è mostrato come due forme quadratiche U V ad n variabili si possano mediante una stessa sostituzione lineare trasformare in AV′ e BU′, essendo A B i loro discriminanti, U′ V′ le loro forme reciproche o aggiunte: il determinante C′ della sostituzione è simmetrico e medio proporzionale fra i discriminanti A′ B′ di U′ V′. Considerando C′ come discriminante di una nuova forma quadratica W′, si può con una stessa sostituzione lineare ridurre U′ V′ W′ a contenere i soli quadrati delle variabili, e se G_r H_r sono due coefficienti omologhi di U′ V′ così trasformate, l'omologo coefficiente di W′ sarà medio proporzionale fra G_r H_r. Per $n = 3$, W′ è una conica rispetto a cui U′ V′ sono polari reciproche.

Questi risultati, proposti dal Siacci come questione (Giorn., X, 1872), furono da me svolti (ib.); e ciò mi diede occasione di osservare che la questione della conica rispetto a cui due coniche sono polari reciproche ha le sue analoghe nel campo binario e nel campo quaternario, e queste si risolvono sia con le formole generali del Siacci sia con considerazioni sintetiche.

Poco di poi comparve la seguente:

Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche tra di loro (Atti dei Lincei, 1872).

Contiene l'estensione della precedente ricerca alle quadriche.

Essendovi in generale un tetraedro coniugato alle due quadriche date U′ U″ ed alla richiesta U, si assume $U' = A'x^2 + \cdots$, $U'' = A''x^2 + \cdots$, $U = Ax^2 + \cdots$, e si trovano A, ..., proporzionali a $\sqrt{A'A''}, \ldots$, onde si ottengono otto quadriche.

Dopo alcuni notevoli casi particolari, è trattata la questione generale, assumendo per U′ U″ U le equazioni generali, e si trovano sei equazioni lineari nei coefficienti di U, che permettono esprimere sei coefficienti linermente negli altri quattro, ed altre quattro equazioni di 3° grado in questi coefficienti, nelle quali entra anche il discriminante $\varDelta$ di U. Od altrimenti, si possono avere 21 equazioni lineari nei minori di 2° ordine di $\varDelta$, dalle quali si passa a tre equazioni quadratiche omogenee fra quattro coefficienti di U.

La questione, cui si riferisce il presente lavoro ed il mio dianzi citato, fu in seguito ripresa e svolta ampiamente col metodo sintetico del Thieme nella Dissertazione inaugurale « *Ueber die Flächen zweiten Grades, fur welche zwei Flächen zweiten Grades zu einander polar sind* ». (Dresda, Teubner, 1877). Ivi sono studiati separatamente i casi che il tetraedro coniugato rispetto alle due quadriche date abbia quattro, due, nessuno vertice reale; ma i casi dei contatti sono tralasciati.

Sopra una quistione di Geometria proiettiva (Atti dell' Istituto d' Incoraggiamento, Napoli, 1882).

Una conica, come luogo di punti, può ridursi a due rette coincidenti in una con un punto singolare ivi; e come inviluppo, può ridursi a due punti coincidenti in uno con una retta singolare per esso. Sono questi i concetti che l'autore illustra con due esempî propostigli dal Sannia.

Intorno ad una serie di linee di 2° grado. Nota (Rend. Napoli, 1892, fasc. 2.).

È questo l'ultimo lavoro pubblicato dall'operoso nostro autore, quando già la salute sua era irreparabilmente compromessa; ed egli, presago della sua fine, lo inviava in dono agli amici e colleghi con la parola *ricordo*, non prima da lui adoperata in simili invii.

Egli studia qui una serie di coniche più generale della serie omofocale. Sono coniche aventi lo stesso centro e gli stessi assi, e i quadrati delle lunghezze dei loro assi sono quozienti di due coppie di funzioni lineari di un parametro. Variando questo, le lunghezze degli assi, tra i valori zero e infinito, incontrano alcuni valori notevoli, cui corrispondono le coniche degeneri della serie. Ad ogni conica della serie si può far corrispondere una certa retta del piano, che nel variare segna sugli assi due punteggiate proiettive; e costruita questa retta, sono subito determinate le lunghezze degli assi della conica corrispondente. La serie è d'indice due, ossia due sue coniche passano per un punto assegnato. L'inviluppo delle coniche della serie è costituito da due coniche, simmetriche rispetto agli assi; esso è toccato da ogni conica della serie in due punti, simmetrici rispetto al centro delle coniche della serie.

Due coniche della serie sono circoli. Vi sono infiniti punti, e sono i punti di un certo circolo, pei quali passano coppie di coniche mutuamente ortogonali; e due coniche ortogonali sono anche omofocali.

Il luogo dei poli di una data retta rispetto alle coniche della serie è una conica, che incontra la retta in due punti, nei quali la retta è toccata da due coniche della serie; sicchè la serie è d'indice due, anche quando le sue coniche si considerano come inviluppi. Ciò permette di trattare le questioni sulla serie da due punti di vista duali, ma in modo analogo.

Infine sono date le formole che esprimono i quadrati delle coordinate di un punto o di una retta qualunque del piano mediante i semiassi delle due coniche della serie che passano pel punto o toccano la retta.

La ricerca è svolta analiticamente, riferendo le coniche della serie ai loro assi, e i risultati sono interessanti.

Al gruppo di lavori che stiamo esaminando ponno ascriversi complessivamente le questioni proposte dal nostro autore nel suo Giornale, e le soluzioni ivi date di questioni proposte da altri: scopo delle une e delle altre divulgare l'uso delle forme algebriche e del metodo proiettivo.

Lavori varii.

Sulla partizione dei numeri (Mem. di Napoli, 1858-60).

Il teorema del Sylvester, che fornisce il coefficiente di x^n nello sviluppo di $1:(1-x^a)(1-x^b)\ldots(1-x^k)$, e che esprime il numero delle partizioni di n in altri interi i cui prodotti per $a, b, \ldots, k$ diano per somma n, fu dimostrato dal Brioschi (Ann. di Tortolini) mediante i residui del Cauchy. Il Battaglini ne espone qui una dimostrazione di carattere elementare e semplice.

Nota sui determinanti (Rend. Napoli, 1862, fasc. 3.).

L'autore mostra come la somma dei minori di un dato ordine $k - h$ in un determinante di ordine k possa esser espressa mediante un unico determinante di ordine $k - h$; seuonchè vi è la restrizione, che alla somma non contribuiscano quei minori i cui complementari contengono due linee parallele di posti congrui rispetto al modulo $h - 1$.

La trattazione è ingegnosa, ma alquanto complicata.

Osservazione intorno ad una formola relativa all'elettrometro bifiliare (Rend. Napoli, 1866).

Geometria analitica cartesiana (Giorn., XXIX, 1891).

Epilogo.

Ho descritto i lavori pubblicati dal Battaglini con una certa ampiezza, e perchè temevo di sagrificare alla brevità cose degne di menzione, e perchè la forma ad essi data dall'autore non mi rendeva agevole riassumerli in breve discorso. Mi sono studiato di additarne i molti e grandi pregi, come meglio ho saputo, valutandoli sempre in relazione ai tempi in cui videro la luce. Vorrei esser così riuscito nell'intento di far sorgere innanzi alla mente del lettore la geniale figura scientifica di Giuseppe Battaglini. A ogni modo mi è sommo conforto aver pagato un modesto tributo di riverenza e di affetto alla memoria di un mio dotto e incoraggiante maestro, di un uomo illustre, che spese tutto il nobile ingegno a prò dell'incremento della scienza, che onorò la patria con opere egregie ed efficacemente contribuì ad accrescerla nella estimazione dei dotti d'ogni nazione, sicchè il suo nome sarà ricordato fra quelli dei più chiari matematici italiani fioriti nel secolo che volge al tramonto.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI GIUSEPPE BATTAGLINI
classificate secondo
L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Indicazioni abbreviate delle Raccolte.

Ann. T.	Annali di Scienze matematiche e fisiche compilati da B. Tortolini. Roma.
Mem. A. N.	Memorie della R. Accademia delle Scienze di Napoli.
Rend. A. N.	Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli.
Atti A. s. f. m. N.	Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli.
Rend. A. s. f. m. N.	Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli.
G. B.	Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane diretto da G. Battaglini. Napoli.
Atti L.	Atti della R. Accademia dei Lincei.
Mem. s. f. m. n. L.	Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei.
Rend. L.	Rendiconti delle sedute della R. Accademia dei Lincei.
Atti I. N.	Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di Napoli.
Coll. M.	In Memoriam Dominici Chelini. Collectanea Mathematica nunc prima edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami, 1881.

Pubblicazioni.

B 1 *a*.	Sui determinanti, pag. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1862, G. B. IX 136.
B 4 *f*.	B 10, K 7 *e*. Sulle forme binarie di 1° e 2° grado, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. II 170.
"	B 10. Sulle forme binarie di 2° grado, p. 2. G. B. III 22.
"	B 7 *a*. Sulle forme binarie di 3° grado, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. II 170.
"	B 7 *a*, B 7 *f*, M¹ 2 *a* α. Sulle forme binarie cubiche, p. 12. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. II 170.
"	B 7 *b*. Sulle forme binarie di 4° grado, p. 13. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. II, 170.
"	B 7 *b*, B 7 *f*. Sulle forme binarie biquadratiche, p. 8. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. III 24.
"	B 7 *b*, B 7 *f*, M¹ 2 *a* α. Sulle forme binarie biquadratiche in involuzione, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. III 24.
"	B 7 *c*. Sulla quintica binaria, p. 10. Atti L. II_2, G. B. XIV 54.
"	M¹ 2 *a* α. Sulle forme binarie di grado qualunque, p. 34. Atti A. s. f. m. N. III, G. B. IX 9.
B 4 *h*.	Sulle forme binarie miste di 3° e 4° grado, p. 11. Rend A. s. f. m. N. 1864, G. B. III 24.
B 8.	Sulle forme ternarie di grado qualunque, p. 38. Atti A. s. f. m. N. IV, G. B. IX 152.
B 10 *d*.	L¹. Sulle forme ternarie quadratiche. Nota I p. 26, Nota II p. 32. Atti A. s. f. m. N. III, G. B. VIII 38.

H 2 *c* β.	H 6. Sull'equazione differenziale ellittica, p. 8. Mem. f. m. n. L. V_3, G. B. XIX 65.
"	B 10. Intorno ad un'applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all'integrazione dell'equazione differenziale ellittica, p. 11. Atti A. s. f. m. N. II_2, Rend. L. 1885, G. B. XXIV 128.
I 10.	Sulla partizione dei numeri, p. 11. Rend. A. N. 1858-60.
K*.	Geometria analitica cartesiana, p. 168. G. B. XXIX 3.
K 7.	Sulle forme geometriche, p. 11. Rend. A. s. f. m. N. 1862.
K 7.	P 1 *a*, P 1 *f*. Teoria elementare delle forme geometriche, p. 46. G. B. I 1.
K 7 *d*.	B 4 *f*. Soluzioni di tre questioni proposte da L. Cremona, G. B. I 311.
"	K 7 *e*. Soluzione d'una questione proposta da L. Cremona, G. B. II 52.
"	" Soluzioni di due quistioni proposte da L. Cremona, G. B. II 186.
K 7 *e*.	Soluzione di una quistione proposta da L. Cremona, G. B. I 369.
K 19 *b* α.	Soluzione di un problema di Geometria a tre coordinate: Descrivere una sfera in modo che interseghi quat'ro altre sfere ad angoli dati, p. 8. Ann. T. II 373.
L^1 1 *c*.	Soluzione d'una quistione proposta da V. Janni, G. B. I 369.
L^1 1 *f*.	L^1 1 *d*. Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una forma ternaria quadratica. Nota I p. 7, Nota II p. 7, Nota III p. 9, 1865-66, Rend. A. s. f. m. N., G. B. V 39.
L^1 2 *b*.	L^1 10, L^1 11. Soluzione d'una quistione proposta da L. Cremona, G. B. I 369.
L^1 3 *a*.	Sopra alcune proprietà delle linee di 2° grado, p. 11. Rend. A. s. f. m. N. 1862.
L^1 3 *b*.	Quistione, G. B. I 63.
L^1 8 *a*.	Sopra una quistione di Geometria projettiva, p. 4. Atti I. N. 1882.
L^1 12 *c*.	Quistione, G. B. I 63.
L^1 16 *a*.	K 7 *e*. Soluzione d'una quistione proposta da L. Cremona, G. B. I 369.
L^1 17.	B 10 *d*. Soluzioni di quattro quistioni proposte da L. Romance, G. B. I 369.
L^1 17 *e*.	L^2 2 *g*. Due quistioni, G. B. I 256.
L^1 9.	L^1 18. Sulla conica di minima aja circoscritta ad un quadrigono, p. 8. Ann. T. V 193.
L^1 14 *a*.	Sul problema di iscrivere in una curva di 2° grado un poligono in modo che i lati passino per punti dati, p. 3. Ann. T. II 380.
L^1 16 *a*.	Dimostrazione d'un teorema di Desargues, G. B. II 52.
L^1 17.	Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche, p. 12. Atti L. 1873, G. B. XII 193.
L^1 17 *b*.	Intorno alla conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche fra loro, p. 8. Atti L. 1872.
L^1 18 *c*.	Sopra alcune quistioni di Geometria, p. 11. Rend. A. s. f. m. N. 1862.
L^1 20 *c* α.	Nota di Geometria, p. 8. Rend. A. s. f. m. N. 1862.
L^2 4 *a*.	Sulle superficie di 2° grado, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1862.
"	Quistione di Geometria, p. 1. G. B. V 192.
L^2 4 *b*.	Quistione, G. B. I 63.
L^2 14 *a*.	Iscrivere in una superficie di 2° grado un poligono in modo che i lati passino per punti dati, p. 19. Ann. T. II 20.
L^2 15 *b*.	Quistione, G. B. I 63.
L^2 17 *a*.	L^2 17 *b*. Sopra alcune proprietà delle superficie di 2° grado, p. 8. Mem. A. N. 1857.
L^2 17 *c*.	Nota intorno alla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche, p. 12. Atti L. 1872.
L^2 17 *g*.	Sopra una quistione di massimi e minimi, p. 8. Rend. A. s. f. m. N. 1863.
L^2 18.	Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche, p. 15. Atti L. 1874, G. B. XII 266.
M^1 5.	M^1 6, M^1 5 *b*. Sopra una curva di 3ª classe e di 4° ordine, p. 9. Rend. A. s. f. m. N. 1865, G. B. IV 214.
M^1 5 *h*.	Soluzione d'una quistione proposta da J. J. Sylvester, G. B. I 86.
M^1 5 *i*.	M^1 5 *g*, M^1 5 *e* α. Sulle cubiche ternarie sizigetiche, Coll. M.

M^1 5 *j*. Soluzione d'una quistione proposta da J. J. Sylvester, G. B. I 86.

N^1 1. Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque, p. 27. Atti A. s. f. m. N. IV, G. B. X 55.

N^1 1 *b*. Intorno ai sistemi di rette di 1° ordine, p. 15. Rend. A. s. f. m. N. 1866, G. B. VI 24.

N^1 1 *h*. Sui complessi di 2° grado, p. 10. Mem. f. m. n. L. III$_2$, G. B. XVIII 1.

N^1 1 *i*. Sui sistemi di rette di 2° grado, p. 45. Atti A. s. f. m. N. III, G. B. VII 55.

N^3 *b*. Sui connessi ternarii di 1° ordine e di 1ª classe, p. 16. Atti A. s. f. m. N. IX, G. B. XX 230.

N^3 *d*. Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice, p. 10. Atti A. s. f. m. N. VIII, G. B. XIX 316.

N^4 1 *b* α. Intorno ad una serie di linee di 2° grado, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1892, G. B. XXX 287.

N^4 1 *e*. Sulle serie di curve d'indice qualunque, p. 5. Rend. A. s. f. m. N. 1863, G. B. I 170.

O 2 *i*. Sui punti sestatici di una curva qualunque, p. 9. Rend. L. 1888.

P 1. Intorno ai sistemi di 2° ordine e di 2ª classe, p. 4. G. B. I 287.

P 1. B 11. Sulle forme binarie bilineari, p. 14. Atti A. s. f. m. N. II$_2$, Rend. L. 1885, G. B. XXV 281.

P 1 *a*. Sulla dipendenza equianarmonica, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1863.

» Sulla dipendenza di 1° ordine, p. 8. Rend. A. s. f. m. N. 1863.

» P 1 *b*. Sulla dipendenza scambievole delle figure, p. 22. Rend. A. N. 1858-60.

P 1 *b*. Sulle forme geometriche di 2ª specie. — Nota I p. 14. Rend. A. s. f. m. N. 1865, Nota II p. 28. Atti A. s. f. m. N. II.

P 1 *c*. Quistione, G. B. IX 179.

P 2 *c*. B 11. Sulle forme ternarie bilineari, p. 14. Mem. f. m. n. L. IX$_2$, G. B. XXI 50.

» B 11. Sulle forme quaternarie bilineari, p. 23. Mem. f. m. n. L. XII$_2$, G. B. XXI 293.

P 3 *c* α. Sulle divisioni omografiche immaginarie, p. 11. Rend. A. s. f. m. N. 1864, G. B. II 442.

P 4 *b*. Sulla dipendenza duplo-anarmonica, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1863, G. B. I 321.

P 6 *c*. Involuzioni dei diversi ordini, p. 14. Atti A. s. f. m. N. I.

» Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di 2ª specie, p. 15. Atti A. s. f. m. N. II

Q 1. Sui circoli nella Geometria non euclidea, p. 10. Atti L. 1873, G B. XII 213.

» Sulla Geometria projettiva. Nota I, p. 10. Atti A. s. f. m. N. VI, G. B. XII 300; Nota II, p. 21. Atti A. s. f. m. N. VI, G. B. XIII; 49, Nota III, p. 21. Atti A. s. f. m. N., G. B. XIV 110.

» P 3 *c* α. Sull'affinità circolare non euclidea, p. 5. Rend. A. s. f. m. N. 1876, G. B. XVI 256.

Q 1 *b*. Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky, p. 17. Rend. A. s. f. m. N. 1867, G. B. V 217.

R 1 *c*. N^1 1. Sul movimonto geometrico infinitesimo di un sistema rigido, p. 12. Rend. A. s. f. m. N. 1870, G. B. X 207.

» N^1 1. Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido, p. 9. Rend. A. s. f. m. N. 1870, G. B. X 295.

R 2 *b*. Soluzione d'una quistione proposta da A. Dorna, G. B. II 255.

R 2 *c*. Sugli assi principali, G. B. IX 38.

» N^1 1. Sulla teorica dei momenti d'inerzia, p. 11. Rend. A. s. f. m. N. 1871, G. B. XI 62.

R 3. Intorno ai momenti geometrici di 1° grado, p. 12. Rend. A. s. f. m. N. 1866.

R 4 *a*. L^2 7. Sull'equilibrio di quattro forze nello spazio, e dimostrazione d'un teorema di A. Cayley, G. B. IV 93.

» Sul parallelogrammo delle forze, p. 3 G. B. I 365.

» Intorno alle condizioni di equilibrio di un sistema di forma invariabile, p. 2. G. B. I 367.

R 4 *a*.	Nⁱ 1. Sulla composizione delle forze, p. 11. Rend. A. s. f. m. N. 1869, G. B. X 133.
"	Nⁱ 1. Sulla teorica dei momenti, p 7 Rend. A. s. f. m. N. 1869. G. B. X 175.
"	Nⁱ 1. Sulle serie di sistemi di forze, p. 3. Rend. A s. f. m N. 1869, G. B. X 180.
"	Nⁱ 1 Sulle dinami in involuzione, p. 15. Atti A. s. f. m. N. IV.
R 4 *a α*.	Intorno ad una memoria del sig. Turazza, p. 2. G. B. II 295.
R 5 *a*.	Intorno ad una superficie di 8° ordine, p. 6. Atti L. 1875, G. B. XIII 155.
R 7 *a α*.	Sul movimento per una linea di 2° ordine, p. 8. Mem. f. m. n. L. I_3.
R 8 *a* N 7.	Sul movimento di un sistema di forma invariabile, p. 10. Rend. A. s. f. m. N. 1871, G. B. XI 359.
T 5.	Osservazione intorno ad una formola relativa all'elettrometro bifiliare, p. 3. Rend. A. s. f. m N. 1866.

Del moto permanente di un gas perfetto in un tubo, e del suo efflusso.
Memoria del Corrispondente G. B. FAVERO

letta nella seduta del 5 maggio 1895.

INTRODUZIONE

1. L'efflusso dei fluidi elastici formò oggetto d'una Memoria letta nel 1829 all'Accademia di Francia da Navier [1], e le formole date da lui per rappresentare il fenomeno concordano abbastanza bene coll'esperienza, qualora la differenza di pressione fra l'interno e l'esterno del vaso sia piccola: se ne discostano invece fortemente, e dànno luogo a risultati strani, quando tale differenza sia notevole. Questa discordanza fu già notata dal Coriolis [2] nel 1838, e confermata dalle esperienze dei signori Barré de Saint Venant ed L. Wantzel [3]; cosicchè si sollevò la questione se la pressione nell'orificio d'efflusso fosse da ammettersi eguale a quella nell'esterno del vaso, come l'avea fatto il Navier, o se nell'orificio vi fosse una pressione differente. Ai signori De Saint Venant e Wantzel la determinazione analitica di tale speciale pressione nell'orificio pareva impossibile nello stato d'allora dell'Idrodinamica, ed essi risolsero d'abbandonare la formola teorica d'efflusso, sostituendone una del tutto empirica [4], dedotta dalle esperienze da essi fatte. Dopo il notevole lavoro dei signori De Saint Venant e Wantzel altri autori tornarono sulla questione dell'efflusso dei fluidi elastici, sia per giustificare teoricamente una speciale pressione nell'orificio [5], sia per rile-

(1) Mémoires de l'Académie Royale des sciences, tome IX (1830).

Prima del Navier si occuparono della questione Daniele Bernoulli *(Hydrodynamica)*, D'Alembert (*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*), Bossut (*Hydrodynamique)*, riconducendo il problema al caso di un liquido. Navier considerò l'espansione isotermica del fluido.

(2) Compte rendu des séances de l'Académie, 19 février 1838, p. 229.

(3) *Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air*, nel Journal de l'École royale polytechnique, tome XVI, 27ème cahier (1839), p. 85, 86.

I signori De Saint Venant e Wantzel considerarono, oltre l'isotermica, anche l'espansione adiabatica, e diedero una formola, che più tardi (1855) fu trovata anche da Weisbach, il quale certo ignorava il lavoro dei signori De Saint Venant e Wantzel, ed al quale la formola venne in seguito attribuita.

(4) L. c., p. 102, 103.

(5) Kolster, nella Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Band XI (1867), p. 433.

vare le varie incoerenze della formola così detta di Weisbach (1). — Una discussione sull'argomento fra i signori Hirn, Hugoniot, Parenty, Haton de la Goupillière (2) prese carattere talvolta vivace, senza aver prodotto, a quanto sembra, un accordo fra le differenti opinioni. Altri scrittori, fra cui è da rilevarsi lo Zeuner (3), senza entrare nella discussione teorica sulla speciale pressione, si attengono ad una formola dedotta dai principî della termodinamica, e sostanzialmente formata come quella data dal Weisbach; ma la applicano solamente entro certi limiti di differenza fra la pressione esterna e la interna, abbandonando la formola quando quella differenza diventa forte, per attenersi alle norme empiriche suggerite dai signori De Saint Venant e Wantzel.

La presente Memoria ha lo scopo di chiarire un po' più la questione dal punto di vista teorico. In essa si premette un esame delle condizioni che devono essere verificate, affinchè sia possibile il moto permanente a falde parallele di un fluido elastico in un tubo rettilineo, per dedurre da queste condizioni le modalità in cui si può effettuare l'efflusso e stabilirne le formole.

Risulta da questo studio che i movimenti fisicamente possibili sono più d'uno, e che ciascuno è regolato da speciali formole, e da speciali limiti di possibilità fisica. Risulta anche che quella specie d'incoerenza che fu osservata nella formola detta di Weisbach, e nelle formole analoghe, trova la sua spiegazione nelle condizioni analitiche di validità delle formole stesse, le quali diventano incoerenti rispetto all'esperienza solamente allorquando vengono applicate fuori dei limiti entro i quali conservano la loro validità analitica.

Qui però dobbiamo esplicitamente notare, che per evitare difficoltà analitiche forse insuperabili, si ebbe ricorso ad alcune supposizioni che rendono i calcoli più semplici. In tal modo si poterono studiare qualitativamente i fenomeni fisici del moto considerato; ma le formole ottenute, quando vengano adoperate a valutare quantitativamente i fenomeni stessi, non dànno che il valore d'una prima approssimazione. Ciò vale naturalmente anche per la valutazione di vari limiti assegnati (num. 11, 12), e per le formole d'efflusso.

Lo studio è diviso nelle seguenti parti: *Deduzione delle formole.* — *Esame delle formole.* — *Alcuni casi particolari.* — *Efflusso.*

I. Deduzione delle formole.

2. Entro un tubo rettilineo si muove un gas perfetto di moto permanente, senza ricevere nè emettere calorico. Si ammette che sia trascurabile l'azione della gravità e quella d'ogni specie d'attrito, e che manchino altre forze sollecitanti. Preso l'asse del tubo per asse delle x, si ammette che le componenti della velocità normali ad x

(1) Illeck, nel Civilingenieur, Band XXIII (1877), p. 343. — Vedi anche: Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Band I, p. 554 e sgg.

(2) C. R. des séances de l'Académie des sciences, vol. 102, 103, 104 (1886, 1887), passim.

(3) Technische Thermodynamik, Dritte Auflage, Leipzig (1887-1890), I e II vol.

siano trascurabili, e che sia pure trascurabile, nei limiti dello spazio interno del tubo, l'influenza che le altre due coordinate possno avere sul valore u della componente parallela ad x. La u dunque si riguarda come funzione della sola x. Questo moto sarà detto per brevità a falde parallele.

Sono date le dimensioni del tubo, e vuolsi considerare un tronco di esso compreso fra due sezioni A_0 ed A_1, alla distanza l una dall'altra, indicando con A_0 la maggiore e con A_1 la minore delle due sezioni. Detta A una sezione qualunque intermedia, alla distanza x da A_0, supporremo $A = \varphi(x)$, funzione data, finita e continua di x, da $x = 0$ fino ad $x = l$, compresi i limiti, che dà per A valori reali, positivi, diversi da zero.

È data la costante R spettante all'equazione del fluido

$$pv = RT \tag{1}$$

dove al solito p è la pressione, v il volume specifico, e T la temperatura assoluta. Sono pure date le pressioni p_0 e p_1 nelle sezioni A_0 ed A_1 rispettivamente, ed è data la temperatura T_0, nella sezione A_0.

Per una sezione qualunque A domandasi la pressione p, il volume specifico v, la temperatura T, il peso γ per unità cubica, la densità ϱ, la velocità u, colla quale le molecole attraversano la sezione, la portata ossia il peso totale Q di fluido, che passa per la sezione nell'unità di tempo, la portata specifica, ossia il peso q di fluido che passa nell'unità di tempo per ogni unità superficiale di sezione, e finalmente il tempo t occorrente ad una molecola per percorrere l'intervallo x.

Per maggiore semplicità di calcolo faremo frequente uso dei rapporti

$$y = \frac{A_0}{A}, \quad z^\mu = \frac{p}{p_0}, \quad r = \frac{y}{z} \tag{2}$$

dove μ è il noto rapporto fra i due calorici specifici, spettanti al fluido, e si ha sempre $\mu > 1$.

Coll'apporre ad una quantità l'indice 0 oppure l'indice 1 s'intenderà riferirla alla sezione A_0 oppure alla sezione A_1 rispettivamente. Così avremo p. es.

$$y_1 = \frac{A_0}{A_1}, \quad z_1{}^\mu = \frac{p_1}{p_0}, \quad r_1 = \frac{y_1}{z_1} \tag{3}$$

3. Contando le x positive a partire da A_0 verso A_1, la nota equazione generale d'idrodinamica relativa a quell'asse, essendo nulle le componenti della velocità normali ad x, diverrà

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx}\right)$$

dove X è la forza sollecitante nel senso positivo delle x. Essendo nel nostro caso nulla la forza X ed il moto permanente, cioè $\frac{du}{dt} = 0$, l'equazione si riduce a

$$\frac{dp}{dx} + \varrho u \frac{du}{dx} = 0 \tag{4}$$

Per gli altri due assi si ha $\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0$, cioè la p funzione della sola x.

D'altra parte fra la densità ϱ ed il peso unitario γ, e fra questo e il volume specifico v hanno luogo le note relazioni

$$g\varrho = \gamma\,,\ \gamma v = 1 \tag{5}$$

dove g è la gravità.

Tra il volume specifico v, e la pressione p, giacchè il volume del fluido si modifica, per supposto, adiabaticamente, ha luogo l'equazione

$$pv^{\mu} = p_0 v_0^{\mu} \tag{6}$$

Siccome poi nell'unità di tempo, attesa la permanenza del moto, passa per ogni sezione lo stesso peso Q di fluido, avremo

$$Q = A_0 u_0 \gamma_0 = Au\gamma \tag{7}$$

Eliminando fra le (4), (5) e (6) le v, ϱ e γ, e tenendo conto della seconda delle (2), si ha

$$\mu p_0 z^{\mu-2} \frac{dz}{dx} + \frac{u}{gv_0} \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

la quale integrata dà

$$u^2 + \frac{2g\mu p_0 v_0}{\mu - 1} z^{\mu-1} = C \tag{8}$$

essendo C una costante. Eliminando invece la v e la γ fra le (5), (6) e (7), tenendo conto delle (2) si ha

$$u = u_0 r \tag{9}$$

Per cui ponendo $\lambda = \frac{2g\mu p_0 v_0}{\mu - 1}$, la (8) diventa

$$u_0^2 r^2 + \lambda z^{\mu-1} = C \tag{10}$$

Applicando questa alle sezioni A_0 ed A_1, e notando che si ha $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, e quindi $r_0 = 1$, si ottengono le due

$$u_0^2 + \lambda = C\,,\ u_0^2 r_1^2 + \lambda z_1^{\mu-1} = C$$

e da queste cavando i valori di u_0^2 e di C, posto

$$m = z_1^{\mu-1} - r_1^2\,,\ n = 1 - r_1^2 \tag{11}$$

si ottiene

$$u_0^2 = \frac{\lambda(m-n)}{n}\,,\ C = \frac{\lambda m}{n} \tag{12}$$

Con questi valori la (10) si trasforma con facili riduzioni, avuto riguardo alle (2), e ponendo

$$a = \frac{m}{A_0^2(m-n)}\,,\ b = \frac{n}{A_0^2(m-n)} \tag{13}$$

nella

$$A^2 z^2 (a - b z^{\mu-1}) = 1 \tag{14}$$

Notiamo inoltre che applicando la (1) e la seconda delle (5) alla sezione A_0 si ha

$$p_0 v_0 = RT_0 \,, \quad \gamma_0 v_0 = 1$$

e quindi $u_0 \gamma_0 = \frac{u_0 p_0}{RT_0}$, $\lambda = \frac{2\mu g RT_0}{\mu - 1}$. La prima delle (7) e delle (12) possono dunque scriversi anche

$$Q = \frac{u_0 p_0 A_0}{RT_0} \,, \tag{15}$$ e (16) $$u_0^2 = \frac{2\mu g (m-n) RT_0}{(\mu - 1) n}$$

Dalla seconda delle (2) si ha

$$p = p_0 z^{\mu} \tag{17}$$

col che la (6), la (1) e le (5) diventano

$$v = \frac{RT_0}{p_0 z} \,, \quad T = T_0 z^{\mu-1} \,, \quad \gamma = \frac{p_0 z}{RT_0} \,, \quad \varrho = \frac{p_0 z}{g RT_0} \tag{18}$$

Dalle (7) si ha poi

$$u = \frac{u_0 y}{z} = \frac{u_1 z_1 A_1}{z A} \tag{19}$$

e quanto alle incognite q e t, si ha evidentemente

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{p_0 u_0 y}{RT_0} = \frac{p_0 z u}{RT_0} = \frac{u}{v} \tag{20}$$

e $t = \int_0^x \frac{dx}{u}$, ossia

$$t = \frac{1}{u_0} \int_0^x \frac{z\,dx}{y} = \frac{1}{A_0 u_0} \int_0^x A z\,dx \tag{21}$$

4. Le formole superiori formano un sistema atto a determinare le incognite del problema, insieme alle altre quantità che furono introdotte per opportunità di calcolo.

Infatti partendo dalle quantità date

$$A_0 \,, A_1 \,, A = \varphi(x) \,, p_0 \,, p_1 \,, T_0 \,, R \,, \mu \,, g$$

si otterrà un primo gruppo di quantità, indipendenti dalla variabile x, cioè le

$$y_1 \,, z_1 \,, r_1 \,, m \,, n \,, a \,, b \,, u_0 \,, Q \tag{I}$$

facendo uso successivamente delle equazioni

(3), (11), (13), (16), (15)

e si otterrà un secondo gruppo di quantità, dipendenti dalla x, cioè le

$$\text{(II)} \qquad z\,,\ p\,,\ v\,,\ T\,,\ \gamma\,,\ \varrho\,,\ u\,,\ q\,,\ t$$

facendo uso successivamente delle equazioni

$$(14)\,,\ (17)\,,\ (18)\,,\ (19)\,,\ (20)\,,\ (21)$$

Se invece della temperatura T_0 nella sezione A_0 fosse data la temperatura T_1 nella sezione A_1, si passerebbe facilmente dall'una all'altra, mediante la relazione, dedotta dalla seconda delle (18),

$$\text{(22)} \qquad T_0 = T_1 z_1^{1-\mu}$$

Il segno della u_0 dovrà dedursi da note condizioni iniziali. Quanto alla scelta fra i due valori della z, dati dalla (14), vedi num. 14.

II. Esame delle formole.

5. Nelle formole superiori le quantità T_0, R, μ, g sono naturalmente positive, finite, diverse dal limite zero. E tali pure si sono tacitamente supposte le A_0, A_1, p_0, p_1. Manteniamo ora esplicitamente tale supposizione, e riteniamo inoltre che le quantità $m = z_1^{\mu-1} - r_1^2$, $n = 1 - r_1^2$ siano diverse da zero, e siano diversi dall'unità i rapporti y_1 e z_1. Esamineremo più avanti qualche caso in cui queste supposizioni non abbiano luogo (vedi III).

Ciò premesso osserviamo che la possibilità fisica del moto considerato viene espressa analiticamente dalla possibilità di assegnare ai due gruppi (I), (II) d'incognite sopra esposte y_1, z_1, r_1, ecc., e z, p, v, ecc. un sistema di valori reali soddisfacenti alle equazioni da cui esse dipendono. E siccome nel secondo gruppo figura la variabile x, la quale può avere qualsiasi valore da $x = 0$ ad $x = l$, bisognerà che il sistema di valori assegnato alle incognite che dipendono dalla x si mantenga reale continuo e finito per qualunque dei valori che la x può assumere.

Se un tale sistema di valori reali non esiste, vuol dire che il moto nelle condizioni supposte è fisicamente impossibile.

6. Ponendo mente alle equazioni che legano le incognite colle quantità date, si vede senz'altro che le incognite indipendenti da x sono date da equazioni di primo grado, ad eccezione della u_0, che è data da un'equazione di secondo, ed ha due valori, numericamente uguali, ma di segno diverso. Ora le incognite Q, q, u, t sono proporzionali alla u_0 direttamente od inversamente. Ne viene che se la totalità delle equazioni determinanti le incognite è soddisfatta da un certo sistema di valori y_1', z_1', r_1', ecc. ... u_0', Q', e z', p', ... u', q', t', essa sarà soddisfatta anche dal sistema y_1', z_1', r_1', ... $-u_0'$, $-Q'$, e z', p', ... $-u'$, $-q'$, $-t'$. E se il primo sistema di valori è reale, sarà reale anche il secondo. Ma questi due sistemi reali determinano due movimenti possibili del fluido, eguali in tutto, ad eccezione degli elementi u_0, Q, q, u, t, che per l'un movimento hanno i valori u_0', Q', q', u', t',

mentre per l'altro hanno i valori $-u_0'$, $-Q'$, $-q'$, $-u'$, $-t'$. Questi valori caratterizzano i due movimenti, ed è facile riconoscere che se le molecole nel primo vanno dalla sezione A_0 verso la sezione A_1, nel secondo vanno dalla A_1 verso la A_0, restando del resto inalterate in ogni sezione, ed anche nelle estreme, la pressione p, il volume specifico v la temperatura T, il valore numerico della velocità u, ecc. Se noi chiamiamo diretto il movimento dalla sezione maggiore A_0 verso la minore A_1, ed inverso quello da A_1 verso A_0, come sopra caratterizzati, potremo dire:

Se nel tronco contemplato di tubo è possibile il movimento diretto, è possibile anche l'inverso.

Questo risultato può a prima giunta parere strano, poichè qualora fosse $p_1 < p_0$, e si dimostrasse possibile il movimento dalla sezione A_0, dove regna la maggiore pressione verso la sezione A_1, dove la pressione è minore, sembra strano l'asserire che mantenendo quelle condizioni di pressione inalterate, il fluido possa anche muoversi in senso opposto, cioè dalla sezione A_1 verso la sezione A_0. È però facile rendersi ragione della giustezza dell'asserto, riferendosi alla direzione della velocità iniziale. Un caso analogo si presenta nel moto verticale di un corpo sotto l'azione della gravità. Contando le x dal basso, ed il tempo dal momento in cui il grave è al basso, le formole

$$v_0^2 = 2gh\,,\quad v = v_0\sqrt{1-\frac{x}{h}}\,,\quad t = \frac{1}{v_0}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{h}}}$$

rappresentano tanto il moto di un corpo che cade dall'altezza h, con velocità iniziale nulla, quanto il moto d'un corpo lanciato verso l'alto con velocità v_0 (1). Noi potremo perciò senza nulla togliere alla generalità, limitarsi in seguito a ricercare in quali condizioni sia possibile il moto da A_0 verso A_1, cioè dalla sezione maggiore verso la minore.

7. Analiticamente trattasi di sapere in quali condizioni esista per le incognite cercate un sistema di valori reali, soddisfacenti alle rispettive equazioni. Osservando la forma di quelle equazioni si vede tosto, che qualunque siano le quantità date A_0, A_1, p_0, p_1, ecc. le y_1, z_1, r_1, m, n, a, b saranno sempre reali: la Q sarà reale se lo sia la u_0. Similmente le p, v, T, γ, ϱ, saranno reali se lo sia la z; la q lo sarà se lo sia la Q; e le u e t lo saranno se lo siano la u_0 e la z. Riassumendo si vede che un sistema di valori reali per le incognite esiste, qualora esistano valori reali per le due incognite u_0 e z. Trattasi dunque di vedere in quali condizioni le due equazioni

$$u_0^2 = \frac{2\mu g(m-n)\mathrm{RT}_0}{(\mu-1)n}\,,\quad A^2z^2(a-bz^{\mu-1}) = 1$$

(1) La possibilità dei moti diretto ed inverso, rappresentati da un medesimo sistema di formole, è molto estesa in meccanica. Essa è appoggiata al fatto analitico, che l'equazione fondamentale $X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{vdv}{dx}$ è soddisfatta tanto da $+v$, $+t$, che da $-v$, $-t$, purchè la X non contenga v e t, oppure, se li contiene, non si alteri se questi cambiano di segno. Le tre equazioni differenziali generali dell'idrodinamica e la corrispondente equazione di continuità, dette al solito u, v, w le componenti della velocità e t il tempo, sono soddisfatte anche dalle $-u$, $-v$, $-w$, $-t$, purchè le forze con questo cambiamento non si alterino.

diano per u_0 e per z valori reali; e quanto alla z anche continui e finiti per tutti i valori della x da $x=0$ fino ad $x=l$, compresi i limiti; poichè la pressione p, che dipende dalla z, non può variare di una quantità finita od infinita fra due sezioni A infinitamente vicine.

Perchè la u_0 sia reale, essendo sempre positivo il fattore $\frac{2\mu g RT_0}{\mu-1}$, basterà che sia positivo anche l'altro fattore $\frac{m-n}{n}$, cioè che si abbia

$$\frac{m-n}{n}>0, \text{ ossia } \frac{z_1^{\mu-1}-1}{1-r_1^2}>0$$

Dunque dovrà essere contemporaneamente

(1° caso) $$z_1^{\mu-1}-1>0\,,\ 1-r_1^2>0$$

oppure contemporaneamente

(2° caso) $$z_1^{\mu-1}-1<0\,,\ 1-r_1^2<0$$

Nel primo caso si ha dalla prima disuguaglianza $z_1^{\mu-1}>1$, dunque $z_1>1$, cioè, ponendo il valore di z_1, $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}>1$, e quindi anche

(23) $$\frac{p_1}{p_0}>1$$

Dalla seconda disuglianza si ottiene $1>r_1^2$, dunque $1>r_1$, cioè $z_1>y_1$, ossia, ponendo i valori di z_1 ed y_1, $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}>\frac{A_0}{A_1}$ e perciò anche

(24) $$\frac{p_1}{p_0}>\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\mu}$$

Ma essendo $\frac{A_0}{A_1}>1$, per dato, è chiaro che se la (24) è verificata, a maggior ragione lo sarà la (23). Il 1° caso è dunque verificato, quando sia verificata la (24).

Nel 2° caso le due disuguaglianze conducono analogamente alle due relazioni

(25) $$\frac{p_1}{p_0}<1\,,\qquad (26)\ \frac{p_1}{p_0}<\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\mu}$$

ed anche qui è chiaro, che se la (25) è soddisfatta, a maggior ragione sarà soddisfatta la (26). — Il 2° caso è dunque verificato, quando sia verificata la (25). Riassumendo si vede che la u_0 sarà reale, quando si abbia

$$\frac{p_1}{p_0}>\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\mu}, \text{ oppure } \frac{p_1}{p_0}<1\,; \text{ cioè } z_1>y_1\,, \text{ oppure } z_1<1$$

Nel primo caso nella sezione maggiore A_0 si ha una pressione p_0 minore della

pressione p_1 che si ha nella sezione minore A_1. Viceversa nel secondo caso. Che se il rapporto $\frac{p_1}{p_0}$ è tale che

$$1 < \frac{p_1}{p_0} < \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\mu} \tag{27}$$

si trova facilmente che allora hanno luogo le disuguaglianze

$$z_1^{\mu-1} - 1 > 0 \,, \quad 1 - r_1^2 < 0$$

e quindi $\frac{m-n}{n} < 0$. La u_0 in tal caso è immaginaria, ed il moto supposto è fisicamente impossibile.

8. Ricerchiamo ora in quali condizioni la z data dall'equazione (14) sia reale finita e continua da $x = 0$ fino ad $x = l$, compresi i limiti. Stabiliamo perciò anzitutto il segno delle costanti a e b che entrano nell'equazione. Come risulta dalle (13) queste costanti hanno il segno delle frazioni

$$\frac{m}{m-n} \,, \quad \frac{n}{m-n}$$

ossia, posti per m ed n i loro valori (11), il segno delle frazioni

$$\frac{z_1^{\mu-1} - r_1^2}{z_1^{\mu-1} - 1} \,, \quad \frac{1 - r_1^2}{z_1^{\mu-1} - 1}$$

Ora, affinchè u_0 sia reale, il numeratore ed il denominatore della seconda frazione devono, come fu sopra dimostrato, avere lo stesso segno. Ma se si ha contemporaneamente $1 - r_1^2 > 0$, $z_1^{\mu-1} - 1 > 0$, sommando si avrà pure

$$z_1^{\mu-1} - r_1^2 > 0$$

Se invece si ha contemporaneamente $1 - r_1^2 < 0$, $z_1^{\mu-1} - 1 < 0$, sommando si avrà pure

$$z_1^{\mu-1} - r_1^2 < 0$$

Dunque il numeratore $z_1^{\mu-1} - r_1^2$ della prima frazione ha sempre lo stesso segno del denominatore, come avviene per la seconda frazione. Quelle due frazioni, e quindi anche le costanti a e b quando u_0 sia reale, sono dunque sempre quantità reali, positive e finite.

Ciò premesso osserviamo che il secondo membro della (14) è sempre positivo, e positivo è pure il fattore A^2z^2 del primo membro; dunque anche l'altro fattore $a - bz^{\mu-1}$ dovrà essere sempre positivo. Ma la pressione p, e quindi la z che ne dipende, formola (2), non possono essere quantità negative; dunque affinchè il fattore $a - bz^{\mu-1}$ sia positivo, ponendo

$$z' = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

i valori possibili della z sono compresi fra $z = 0$ e $z = z'$. I limiti stessi $z = 0$,

e $z = z'$ devono però essere esclusi, poichè essi annullerebbero il primo membro della (14). Posto in questa $A^2\zeta = 1$, possiamo costruire la curva avente l'equazione

$$\zeta = z^2\ (a - bz^{\mu-1})$$

Fig. 1.

per tutti i valori di z da $z = 0$ fino a $z = z'$ ed otterremo il ramo OPQR, e ad ogni punto della curva corrisponderà un valore di z reale, finito e positivo. Esaminando le derivate

$$\frac{d\zeta}{dz} = 2az - (\mu + 1)\, bz^{\mu}, \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2} = 2a - \mu\,(\mu + 1)\, bz^{\mu-1}$$

si riconosce che il ramo OPQR è tangente nell'origine O all'asse OZ; che ha un'ordinata massima $DQ = \zeta''$ data da

$$\zeta'' = \frac{(\mu - 1)\, a}{\mu + 1}\left(\frac{2a}{(\mu + 1)\, b}\right)^{\frac{2}{\mu-1}} \tag{28}$$

corrispondente all'ascissa $OD = z''$, data da

$$z'' = \left(\frac{2a}{(\mu + 1)\, b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} \tag{29}$$

Le ordinate col crescere della z vanno sempre crescendo da O fino a Q, e sempre decrescendo da Q fino ad R.

La curva ha inoltre un flesso nel punto P fra O e Q, determinato dall'ascissa

$$OB = \left(\frac{2a}{\mu(\mu + 1)\, b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

Dal modo con cui è stata dedotta l'equazione (14) risulta che essa è soddisfatta dalla coppia di valori A_0 e z_0, ossia essendo $z_0 = 1$, dalla coppia A_0 ed 1; e che è pure soddisfatta dalla coppia A_1 e z_1. Ciò si può verificare anche direttamente, tenendo conto dei valori di a e b. Ne viene che la curva O P Q R passa per il punto di coordinate $z = 1, \zeta = \frac{1}{A_0^2}$, e per quello di coordinate $z = z_1, \zeta = \frac{1}{A_1^2}$. Altre osservazioni sull'andamento della curva trovansi al num. 33.

Similmente se si costruisce la curva avente per equazione

$$\zeta' = \frac{1}{A^2}$$

considerandovi la A come ascissa indipendente, che si faccia variare da $A = 0$ fino ad $A = +\infty$, si ha la V M S, che ha l'ordinata infinita per $A = 0$, l'asse delle ascisse per asintoto, e volge sempre la sua convessità a quest'asse. Se però alla A si attribuiscono solamente i valori che essa assume come funzione di x, da $x = 0$ ad $x = l$ si avrà un tratto di curva $M' M_0 M_1 M''$, nel quale vi saranno due punti M_0 ed M_1 corrispondenti alle sezioni A_0 ed A_1, e due punti M' ed M'' corrispondenti rispettivamente al massimo valore A_{ma} ed al minimo A_{mi} che la A assume nell'intervallo da $x = 0$ fino ad $x = l$. In generale vi sarà corrispondenza fra un punto M qualunque del tratto $M' M''$ ed una sezione A del tubo, ossia fra M ed un valore di x. I punti M' ed M'' non potranno naturalmente mai essere compresi entro il tratto $M_0 M_1$, ma potranno coincidere con l'uno o l'altro punto. L'ordinata di M' sarà la minima, e l'ordinata di M'' la massima di tutto il tratto $M' M_0 M_1 M''$.

I punti M_0 ed M_1 avranno rispettivamente per ordinate $\frac{1}{A_0^2}$ ed $\frac{1}{A_1^2}$; dunque essendo per supposto $A_0 > A_1$, l'ordinata di M_1 sarà maggiore dell'ordinata di M_0. Se per i punti M_0 ed M_1 si tirano due parallele all'asse delle ascisse, esse incontreranno la curva O P Q R in punti aventi per ascisse rispettivamente le z_0 e z_1, cioè 1 e z_1. In generale se si prende un punto M qualunque nel tratto $M' M_0 M_1 M''$, esso avrà sulla curva O P Q R il suo corrispondente, che sarà un punto avente dall'asse delle ascisse la stessa distanza di M. Se il punto M si muove in modo continuo entro il tratto $M' M''$, avanzando o retrocedendo comunque, il punto corrispondente nella curva O P Q R dovrà pure muoversi in modo continuo. Se ciò avviene, anche l'ascissa del punto corrispondente (cioè la z) varierà in modo continuo.

Si arriva dunque a questo risultato: Affinchè alla serie reale continua di valori assunti dalla x da $x = 0$ ad $x = l$, corrisponda nell'equazione (14) una serie reale continua di valori della z, bisognerà che alla serie continua di posizioni del punto M entro il tratto $M' M_0 M_1 M''$ (compresi i punti estremi M' ed M''), corrisponda una serie di punti reale continua nella curva O P Q R, la corrispondenza essendo stabilita dalla condizione di equidistanza dall'asse delle ascisse.

9. Dato così alla questione un aspetto geometrico, si tratta di vedere a quali condizioni debba soddisfare la curva O P Q R rispetto alla $M' M''$, affinchè la suddetta corrispondenza di serie di punti possa aver luogo.

È chiaro intanto che l'ordinata massima $P'' M''$ non dovrà superare l'ordinata massima D Q, altrimenti vi saranno nel tratto di curva $M' M''$ dei punti che non potranno avere i loro corrispondenti nella curva O P Q R.

Dovrà dunque aversi

$$P'' M'' < D Q$$

oppure

$$P'' M'' = D Q \tag{30}$$

Esaminiamo a parte questi due casi. Il primo, notando che $P'' M'' = \frac{1}{A_{mi}^2}$, avuto riguardo alla (28) può scriversi.

$$\frac{(\mu - 1) a A^2_{mi}}{\mu + 1} \left(\frac{2a}{(\mu + 1) b}\right)^{\frac{2}{\mu - 1}} > 1 \tag{31}$$

La parallela all'asse delle ascisse condotta per M″ taglierà in tal caso la curva O P Q R in due punti reali distinti, ed è chiaro che la voluta corrispondenza non potrà avèr luogo se non a condizione, che i punti corrispondenti degli M si trovino tutti nel ramo O Q, oppure tutti nel ramo Q R della curva O P Q R; altrimenti si andrebbe incontro ad una discontinuità nella serie dei valori di z. Ora essendo sempre, come fu sopra osservato, l'ordinata di M_1 maggiore dell'ordinata di M_0, ne viene che, qualora $p_1 > p_0$ e quindi $z_1 > z_0$ (ossia $z_1 > 1$), dovranno i corrispondenti di M_0 ed M_1 trovarsi nel ramo OQ (in L_0 ed L_1); qualora invece $p_1 < p_0$ e quindi $z_1 < z_0$ (ossia $z_1 < 1$), essi dovranno trovarsi nel ramo Q R. E siccome nel primo caso l'ascissa di L_1 cioè la z_1 è maggiore di quella di L_0, e nel secondo l'ascissa di N_1, espressa in questo caso essa pure da z_1, è minore di quella di N_0, ne viene che tutti i punti corrispondenti degli M si troveranno nel ramo O Q se z_1 sia minore di O D, e si troveranno tutti nel ramo Q R se z_1 sia maggiore di O D.

Qualora dunque la (31) sia soddisfatta, dovrà aversi inoltre, attesa la (29)

Se $p_1 > p_0$ $$z_1 < \left(\frac{2a}{(\mu + 1) b}\right)^{\frac{1}{\mu - 1}} \tag{32}$$

Se $p_1 < p_0$ $$z_1 > \left(\frac{2a}{(\mu + 1) b}\right)^{\frac{1}{\mu - 1}} \tag{33}$$

10. Queste ultime relazioni possono ridursi ad altra forma, giovandosi delle seguenti considerazioni. Siano ξ l'ascissa ed η l'ordinata della curva avente per equazione

$$\eta = \frac{(\mu - 1) \xi^{\mu + 1}}{(\mu + 1) \xi^{\mu - 1} - 2} \tag{34}$$

e cerchiamo l'andamento della curva per i valori positivi dell'ascissa. Con facili calcoli si deduce dalla posta equazione, che la curva parte dall'origine delle coordinate, dove è tangente all'asse delle ascisse: l'ordinata η si mantiene negativa da $\xi = 0$ fino al valore

$$\xi' = \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{\mu - 1}} \tag{35}$$

il quale è inferiore all'unità: diventa infinita e discontinua per $\xi = \xi'$, e si mantiene poi positiva per tutti i valori di ξ superiori a ξ'. Il tratto di curva da $\xi = \xi'$ fino a $\xi = +\infty$, ha l'ordinata infinita ai limiti ξ' e $+\infty$, ed ha un'ordinata minima, eguale all'unità, in corrispondenza dell'ascissa $\xi = 1$. Da $\xi = \xi'$ fino a $\xi = 1$ col crescere delle ascisse le ordinate diminuiscono; invece da $\xi = 1$ fino a $\xi = +\infty$ col crescere delle ascisse crescono anche le ordinate.

Ne viene che tagliando questo tratto di curva con una parellela all'asse delle

ascisse, ad una distanza $h > 1$, si hanno sempre due punti d'intersezione e due soli, reali, le cui ascisse ξ_1 e ξ_2 sono una minore, l'altra maggiore dell'unità. In altre parole l'equazione

$$h = \frac{(\mu - 1)\xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\xi^{\mu-1} - 2}$$

ammette due sole radici reali $\xi_1 < 1$ e $\xi_2 > 1$. La ξ_1 sarà inoltre sempre maggiore di ξ', cioè si avrà sempre

$$\left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} < \xi_1 < 1 \tag{36}$$

Si vede anche per l'andamento della curva (34) che col crescere di h, la ξ_1 diminuisce, mentre la ξ_2 aumenta. Per tutte le ascisse ξ comprese fra ξ' e ξ_1, o maggiori di ξ_2 si ha

$$h < \frac{(\mu - 1)\xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\xi^{\mu-1} - 2}$$

e per quelle comprese fra ξ_1 e ξ_2 si ha

$$h > \frac{(\mu - 1)\xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\xi^{\mu-1} - 2}$$

Ciò premesso le relazioni (32) e (33) mediante le (13) ed (11) diventano

$$\frac{2\,(z_1^{\mu-1} - r_1^2)}{(\mu + 1)(1 - r_1^2)} > z_1^{\mu-1}\,, \quad \frac{2\,(z_1^{\mu-1} - r_1^2)}{(\mu + 1)(1 - r_1^2)} < z_1^{\mu-1} \tag{37}$$

Ma si è sopra dimostrato che affinchè u_0 sia reale dev'essere $\frac{p_1}{p_0} > \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\mu}$, oppure $\frac{p_1}{p_0} < 1$, e che nel primo caso le due quantità $z_1^{\mu-1} - r_1^2$, $1 - r_1^2$ sono ambedue positive, nel secondo invece ambedue negative. Avuto riguardo a questa circostanza, le due relazioni (37), essendo $r_1 = \frac{y_1}{z_1}$ si riducono alla relazione unica

$$y_1^2 \left\{ (\mu + 1)\, z_1^{\mu-1} - 2 \right\} > (\mu - 1)\, z_1^{\mu+1} \tag{38}$$

nella quale il secondo membro ed il fattore y^2_1 del primo sono positivi e finiti. Dovrà dunque essere positivo e finito il fattore $(\mu + 1)\, z_1^{\mu-1} - 2$, cioè dovrà aversi

$$z_1 > \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}, \quad \text{ossia per la (35)} \quad z_1 > \xi'$$

od anche, atteso il valore di z_1,

$$\frac{p_1}{p_0} > \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}}$$

senza di che, qualunque sia il valore di y_1, cioè il rapporto delle sezioni estreme, il moto ideato a falde parallele nel tubo è impossibile ([1]).

Soddisfatta questa condizione, la relazione unica (38) può scriversi

$$y_1^2 > \frac{(\mu - 1)\, z_1^{\mu+1}}{(\mu+1)\, z_1^{\mu-1} - 2} \tag{39}$$

Posto dunque $h = y_1^2$, riferendoci alle superiori considerazioni sulla curva (34) diremo: Se ξ_1 e ξ_2 sono rispettivamente il minore ed il maggiore dei due valori reali di ξ determinati dall'equazione

$$\frac{(\mu - 1)\, \xi^{\mu+1}}{(\mu+1)\, \xi^{\mu-1} - 2} = y_1^2 \tag{40}$$

la (38) sarà soddisfatta solamente quando la z_1 sia compresa fra ξ_1 e ξ_2.

Ma per la realtà di u_0 la z_1 dev'essere maggiore di y_1, oppure compresa fra O ed 1. (num. 7). Tenuto dunque conto anche di queste condizioni avremo:

Se $p_1 > p_0$ dovrà essere

$$y_1 < z_1 < \xi_2 \tag{41}$$

Se invece $p_1 < p_0$ dovrà essere

$$\xi_1 < z_1 < 1 \tag{42}$$

Queste condizioni sono ambedue possibili. Infatti le y_1 e ξ_2 sono ambedue maggiori dell'unità. Ora ponendo nel secondo membro della (34) $\xi = y_1$ si ha per l'ordinata η il valore

$$\eta_1 = \frac{(\mu - 1)\, y_1^{\mu+1}}{(\mu+1)\, y_1^{\mu-1} - 2}$$

ponendovi invece $\xi = \xi_2$ si ha il valore $\eta_2 = y_1^2$, attesa la (40). Ma come è facile verificare $\eta_1 < \eta_2$, dunque dev'essere anche (per quanto si è detto sopra sul crescere o diminuire delle ascisse e delle ordinate della curva (34))

$$y_1 < \xi_2, \tag{43}$$

dunque la (41) è possibile. La (42) poi è pure possibile, poichè è sempre, come sopra fu osservato $\xi_1 < 1$.

11. Possiamo ora raccogliere come segue i risultati ottenuti per il caso che sia soddisfatta la (31): Siano ξ_1 e ξ_2 rispettivamente la minore e la maggiore delle due

([1]) Il valore $\xi'^{\mu} = \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$ fu considerato da varî autori come limite esperimentale della validità della formola detta di Weissbach, senza che ne sia stato riconosciuto il vero senso analitico (Zeuner, *Technische Thermodynamik*, Dritte Auf., B. I, p. 230 sgg.). Il limite ξ_1^{μ}, fra quelli indicati in questo studio (num. 11 e 12) può avvicinarsi sensibilmente a ξ'^{μ} quando aumenti il rapporto $\frac{A_0}{A_1}$.

radici reali (radici che sempre esistono) dell'equazione (40) nella quale $y_1 = \frac{A^0}{A_1}$. Tenuto conto della (35), si avrà la seguente serie di quantità

$$0 < \xi'^{\mu} < \xi_1^{\mu} < 1 < y_1^{\mu} < \xi_2^{\mu} < +\infty$$

la quale stabilirà una serie d'intervalli. Il primo intervallo da O a ξ_1^{μ} è indipendente dal rapporto $\frac{A_0}{A_1}$, e quando il rapporto $\frac{p_1}{p_0}$ delle date pressioni cade in questo intervallo, il moto considerato è impossibile, qualunque siano le sezioni A_0 ed A_1. Gli altri intervalli dipendono dal rapporto $\frac{A_0}{A_1}$, ed il moto contemplato è solo possibile qualora il rapporto $\frac{p_1}{p_0}$ cada fra ξ_1^{μ} ed 1, oppure fra y_1^{μ} e ξ_2^{μ}, cioè sia

$$(44) \qquad \xi_1^{\mu} < \frac{p_1}{p_0} < 1\,, \quad \text{oppure} \quad (45) \qquad y_1^{\mu} < \frac{p_1}{p_0} < \xi_2^{\mu}$$

Quando $\frac{p_1}{p_0}$ cade negli altri intervalli, il moto ideato è impossibile.

Quando il moto è possibile in base alla (44), i corrispondenti dei punti M si trovano sull'arco Q R, ed allora col crescere della sezione A, cresce la z ossia la pressione p, e col diminuire di A diminuisce anche la p. Avviene l'opposto se il moto è possibile in base alla (45): allora i corrispondenti dei punti M si trovano sull'arco O Q, e col crescere della sezione A diminuisce la z ossia la pressione p, e viceversa. Seguendo dunque l'andamento della pressione p dentro il tubo, dalla sezione A_0 fino alla A_1 riscontriamo nei due casi due differenti specie di moto. Nell'una specie col crescere della sezione del tubo cresce la pressione; dunque ai massimi e minimi della sezione A, considerata come funzione della x, corrispondono i massimi e minimi della pressione p; mentre nell'altra specie ha luogo l'opposto, cioè ai massimi e minimi della sezione A corrispondono i minimi e massimi della p. Questa diversità di andamento delle pressioni rispetto alla grandezza delle sezioni A ha luogo naturalmente tanto per il moto diretto che per l'inverso, e caratterizza quindi due movimenti di natura essenzialmente diversa. Mentre nell'uno il fluido nelle sezioni maggiori è più condensato che non sia nelle minori, nell'altro ha luogo l'opposto, cioè nelle sezioni maggiori il fluido è meno condensato che nelle minori.

12. Esaminiamo ora il caso in cui sia verificata la (30), cioè in cui si abbia

$$(46) \qquad \frac{(\mu-1)\,a\,A^2_{mi}}{\mu+1}\left(\frac{2a}{(\mu+1)\,b}\right)^{\frac{2}{\mu-1}} = 1$$

In tal caso il punto Q, spettante all'ordinata massima della curva O P Q R, sarà il corrispondente del punto M'', relativo alla sezione minima A_{mi}: M'' cadrà cioè in M_m. E noi vogliamo supporre, senza nulla togliere alla generalità, che in tutto il tubo non vi sia che una sola sezione A_{mi}, minore di tutte le altre: sebbene ve ne possano essere delle altre che soddisfanno alla condizione analitica del minimo.

Se $p_1 > p_0$ ed in pari tempo sia verificata la (32), oppure si abbia

$$z_1 = \left(\frac{2a}{(\mu+1)b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} \tag{47}$$

sarà $$z_0 < z_1 \gtreqless z'' , \quad \text{ossia} \quad 1 < z_1 \gtreqless z'' ,$$

e tutti i punti corrispondenti degli M si troveranno sul ramo O Q distribuiti in modo continuo a partire da Q verso O; ed il moto ideato sarà possibile.

Se invece si abbia $p_1 < p_0$ ed in pari tempo sia verificata la (32), oppure la (47) sarà $z'' \gtreqless z_1 < z_0$, ossia $z'' \gtreqless z_1 < 1$, e tutti i punti corrispondenti degli M si troveranno sul ramo Q R, distribuiti in modo continuo a partire da Q verso R; ed anche in tal caso il moto sarà possibile.

Il verificarsi della (47) indica naturalmente la coincidenza del punto M″ con M_1 ossia di z'' con z_1, cioè indica che la sezione minore di tutte è appunto la A_1.

Resta ancora da esaminare il caso in cui i corrispondenti di M_0 e di M_1 si trovino uno da una parte e l'altro dall'altra dell'ordinata massima D Q, e che nessuno di essi coincida con Q; cioè che ad M_0 corrisponda L_0 e ad M_1 corrisponda N_1; oppure che ad M_0 corrisponda N_0 e ad M_1 corrisponda L_1 [1]. Questo caso, quando sia verificata la (31), indica impossibilità di moto, perchè introduce una discontinuità nei valori di z. Ma quando, come ora supponiamo, sia verificata la (46), la discontinuità cessa; poichè i corrispondenti dei punti M formano allora una serie continua, che si estende da L_0 ad N_1, oppure da N_0 ad L_1 lungo la curva O P Q R, passando per il punto Q, che è pure uno dei punti corrispondenti.

Analiticamente questo caso è espresso dalla coesistenza della (46) colle relazioni

$$z_0 < z'' < z_1, \text{ ossia } 1 < z'' < z_1 \text{ per } p_1 > p_0$$

oppure colle

$$z_0 > z'' > z_1, \text{ ossia } 1 > z'' > z_1 \text{ per } p_1 < p_0$$

le quali avuto riguardo alla (29) diventano

$$1 < \frac{2a}{(\mu+1)b} < z_1^{\mu-1} \quad \text{per } p_1 > p_0$$

oppure

$$1 > \frac{2a}{(\mu+1)b} > z_1^{\mu-1} \quad \text{per } p_1 < p_0$$

Quando ciò avvenga, il moto ideato a falde parallele è possibile fra le sezioni A_0 ed A_1; ma esso presenta carattere diverso nei due tronchi di tubo compresi fra la sezione minima A_{mi} e le sezioni estreme A_0 ed A_1. Mentre nell'uno dei due tronchi il fluido è più condensato nelle sezioni maggiori, e meno condensato nelle minori, nell'altro tronco ha luogo l'opposto (num. 11). Lungo il tubo abbiamo dunque in

[1] Si dimostra con una discussione non difficile, che omettiamo per brevità, che questo caso è possibile; che cioè mantenendo la condizione $A_0 > A_1$, le A_0, A_1, p_0, p_1 possono avere valori tali, che la u_0 riesca reale, e che inoltre sia soddisfatta la $1 < z'' < z_1$ per $p_1 > p_0$, oppure la $1 > z'' > z_1$ per $p_1 < p_0$.

questo caso un moto, che può chiamarsi misto, rispetto a quelli finora considerati. Per conoscerne gli elementi gioverà supporre il tubo diviso in due pezzi, cioè dalla sezione A_0 fino alla sezione minima A_{mi}, e da questa fino alla A_1; e calcolare a parte il moto in ciascun pezzo. Basta a tale scopo conoscere la pressione p'' e la temperatura T'' nella sezione minima A_{mi}.

A tale scopo determinato z'' mediante le (29) e (13), le quali danno

$$z'' = \left(\frac{2m}{(\mu+1)n}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

dove m ed n hanno i valori (11), si avrà dalle (17) e (18)

$$p'' = p_0 z''^{\mu}, \quad T'' = T_0 z''^{\mu-1}$$

Come è facile dedurre, la pressione p'' così determinata ha un valore intermedio fra p_0 e p_1. Con ciò ognuno dei due pezzi può essere calcolato a parte.

13. Si noti intanto che la lunghezza l del tubo considerato, non influisce sulle considerazioni superiori, purchè la serie dei successivi valori di A da A_0 ad A_1 resti inalterata. Dunque due tubi di diversa lunghezza, ma colla stessa serie di sezioni, sono soggetti alle stesse condizioni: qualora naturalmente si mantenga per ambedue la supposizione del parallelismo delle falde.

14. Riassumendo i risultati, a cui ci condusse l'esame delle formole fatto fin qui, per riconoscere a quali condizioni il moto ideato a falde parallele sia possibile per tutta la lunghezza del dato tronco di tubo, diremo:

a) Se nel dato tronco è possibile il moto diretto, nelle stesse condizioni è possibile anche l'inverso (num. 6);

b) Se il primo membro della (31) è inferiore all'unità, il moto è impossibile (num. 9);

c) Se il primo membro della (31) è superiore all'unità, il moto è possibile alle condizioni indicate al num. 11;

d) Se il primo membro della (31) è eguale all'unità, il moto è possibile nei modi indicati al num. 12.

Riconosciuta la possibilità del moto, esso può essere determinato nei suoi singoli elementi, mediante le formole indicate al num. 4. Qui è da notare che la (14) per ogni valore di A dà due valori di z, uno minore ed uno maggiore di z'' (29), per cui per la (17) si hanno due valori di p. Per scegliere fra essi, si noti che quando $p_1 > p_0$, ai punti M corrispondono i punti L fra O e Q; dunque si prenderanno per z i valori minori. Se invece $p_1 < p_0$ dovranno prendersi i valori maggiori. — Per il calcolo numerico delle (14) e (40) vedi num. 48.

15. Termineremo l'esame delle formole col ricercare direttamente l'andamento della pressione p lungo il tubo, e coll'investigare le variazioni a cui va soggetta la portata Q (num. 2) col variare del rapporto fra le pressioni p_0 e p_1. Lo studio diretto sull'andamento della pressione p servirà a mettere più in luce ed a completare quanto fu detto sopra ai num. 11 e 12. Ci limiteremo al caso che il tubo presenti una sola sezione minima. Ricordiamo le relazioni (num. 2, 3, 8)

$$p = p_0 z^{\mu}, \quad \zeta = z^2 (a - b z^{\mu-1}), \quad A^2 \zeta = 1, \quad A = \varphi(x)$$

e consideriamo la p come ordinata ortogonale relativa all'ascissa x. Della curva così costruita considereremo le ordinate e le tangenti. Dalle formole superiori si vede che la p si può riguardare come funzione di z, la z come funzione di ζ, la ζ come funzione di A e la A come funzione di x. Le formole, per quanto sopra si è detto, sono tali che ad un valore reale positivo di x, da $x=0$ ad $x=l$, corrisponde un solo valore reale positivo di A, ad un valore reale positivo di A corrisponde un solo valore reale positivo di ζ; invece ad un valore reale positivo di ζ corrispondono due valori e due soli di z, che possono essere reali positivi distinti oppure eguali, od anche ambedue immaginarî; ad un valore di z corrisponde un solo valore di p, che è reale positivo se z è reale positivo. Ne viene che ad un valore reale positivo di x corrispondono due valori e due soli di p, che possono essere reali positivi distinti oppure eguali, od anche ambedue immaginarî.

Per avere la tangente alla curva rappresentante la p, scriveremo in base alle formole superiori

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dA}\cdot\frac{dA}{dx}$$

Ma $\frac{dp}{dz}=\mu p_0 z^{\mu-1}$, $\frac{d\zeta}{dA}=-\frac{2}{A^3}$ e $\frac{dz}{d\zeta}=\frac{1}{\frac{d\zeta}{dz}}$. Potremo dunque anche porre

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{2\mu p_0 z^{\mu-1}}{A^3}\cdot\frac{\frac{dA}{dx}}{\frac{d\zeta}{dz}} \tag{48}$$

dove $\frac{dA}{dx}$ è la tangente alla curva $A=\varphi(x)$; mentre $\frac{d\zeta}{dz}$ è la tangente alla curva OPQR (fig. 1).

Ora ad un valore di x corrisponde un solo valore di A e della tangente $\frac{dA}{dx}$. Ad un valore di A corrisponde un solo punto M; ma ad un punto M corrispondono due punti L ed N nella curva O P Q R, quindi due ascisse z ad essi relative e due tangenti $\frac{d\zeta}{dz}$. La (48) dà dunque due valori e due soli per la tangente $\frac{dp}{dx}$ per ogni valore di x, corrispondenti naturalmente ai due valori che per lo stesso x assume l'ordinata p.

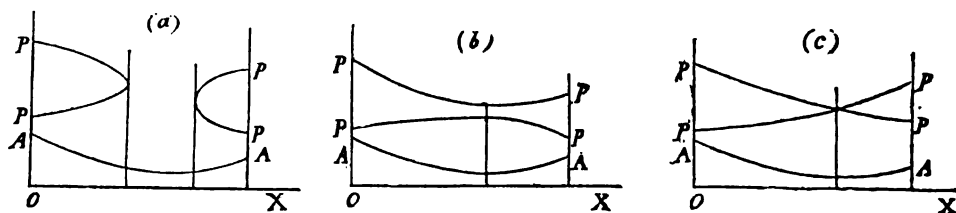



Fig. 2.

Ciò premesso distinguiamo tre casi: Il primo membro della (31) è a) minore dell'unità, b) maggiore dell'unità, c) eguale all'unità. Nel primo caso il punto M″ (fig. 1) dista dall'asse O Z più del punto Q, nel secondo meno, e nel terzo la distanza è eguale.

a) Nel primo caso (fig. 2—(*a*)) la z e quindi la p è immaginaria per tutti i valori di x che danno una sezione A abbastanza piccola da avere il suo corrispondente M (fig. 1) più lontano dall'asse O Z dal punto M_m. Per gli altri valori di x la curva della p è reale, e costituisce due rami separati. La tangente (48) si mantiene finita, eccetto per quelle due sezioni attigue alla minima, per le quali il punto M cade in M_m, e per il quale si ha $\frac{d\zeta}{dz}=0$, senza che sia $\frac{dA}{dx}=0$, per cui $\frac{dp}{dx}=\infty$.

b) Una facile discussione ci conduce a conchiudere che nel secondo caso la curva delle p, pure in due rami separati, ha l'aspetto fig. 2—(*b*), con tangenti parallele all'asse delle x in corrispondenza della sezione minima del tubo, le cui sezioni sono nella figura rappresentate dalla curva A A.

c) Nel terzo caso, fig. 2—(*c*), la curva delle p presenta un punto doppio in corrispondenza della sezione minima, diventando eguali per questo caso i due valori di z. Quanto alle due tangenti alla curva nel punto doppio, si noti che per esso si ha contemporaneamente $\frac{dA}{dx}=0$, $\frac{d\zeta}{dz}=0$, e la $\frac{dp}{dx}$ diventa indeterminata. Per la nota regola avremo dunque per questo punto

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{2\mu p_0 z^{\mu-1}}{A^3}\cdot\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dA}{dx}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)}$$

Ma per un punto qualunque $\frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)=\frac{d^2\zeta}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}$ e per la $p=p_0 z^{\mu}$ sarà $\frac{dp}{dx}=\mu p_0 z^{\mu-1}\frac{dz}{dx}$; dunque

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)=\frac{1}{\mu p_0 z^{\mu-1}}\cdot\frac{d^2\zeta}{dz^2}\cdot\frac{dp}{dx}$$

valore che sostituito nella precedente darà per il punto doppio

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=-\frac{2(\mu p_0 z^{\mu-1})^2}{A^3}\cdot\frac{\frac{d^2A}{dx^2}}{\frac{d^2\zeta}{dz^2}}$$

Questa poi notando che per il detto punto

$$z=z''\ (29)\,,\quad A=A_{mi}\,,\quad \frac{d^2\zeta}{dz^2}=2a-\mu(\mu+1)bz''^{\mu-1}$$

si trasforma nella

$$\frac{dp}{dx}=\pm\frac{2\mu p_0}{(\mu+1)b}\sqrt{\frac{a\frac{d^2A}{dx^2}}{(\mu-1)A^3_{mi}}}$$

dove, trattandosi della sezione minima, la $\frac{d^2A}{dx^2}$ è quantità positiva.

16. Veniamo ora alla ricerca delle variazioni che subisce la portata Q col variare del rapporto fra le pressioni p_0 e p_1. Essendo $z_1=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ basterà esaminare le va-

riazioni della Q col variare della z_1. Ricordiamo la formola (15) esprimente la portata

$$Q = \frac{u_0 p_0 A_0}{RT_0}$$

e, mantenuto invariabile p_0, vedremo che la variazione di Q, essendo la z_1 contenuta solamente in u_0, dipende dalla variazione di u_0, e potremo dire di u_0^2. Ma si ha dalla (16)

$$u_0^2 = \frac{2\mu g(m-n)RT_0}{(\mu-1)n}$$

Tolto dunque il fattore costante, il problema si riduce a trovare come varii la frazione $\frac{m-n}{n}$ col variare di z_1. Ponendo $F = \frac{m-n}{n}$, dalle (11) si ha $F = \frac{z_1^{\mu-1}-1}{1-r_1^2}$, e per la terza delle (3)

$$F = \frac{z_1^{\mu+1}-z_1^2}{z_1^2-y_1^2}$$

Ma affinchè il moto sia possibile la z_1 deve soddisfare alla condizione (41) oppure alla (42). Possiamo dunque precisare il problema come segue: Per i valori che può assumere la z_1, qualora essa soddisfi alla (41) oppure alla (42), determinare le variazioni della frazione F.

Derivando il valore di F rispetto a z_1 si ottiene un risultato che può scriversi

$$\frac{dF}{dz_1} = \frac{z_1\{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2\}}{(z_1^2-y_1^2)^2}\left\{\frac{(\mu-1)z_1^{\mu+1}}{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2}-y_1^2\right\}$$

I valori che la z_1 può assumere sono compresi nell'intervallo da $z_1=\xi_1$ fino a $z_1=\xi_2$, essendo ξ_1 e ξ_2 le due radici dell'equazione (40). Tutti i valori di z_1 sono dunque maggiori di ξ' (35), e quindi il fattore $\{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2\}$ è positivo per tutti.

Invece il fattore

$$\left\{\frac{(\mu-1)z_1^{\mu+1}}{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2}-y_1^2\right\}$$

è negativo (num. 10) per tutti i valori di z_1, ad eccezione dei limiti ξ_1 e ξ_2 per i quali quel fattore è nullo.

Dunque la portata Q diminuisce quando la z_1 prende successivamente i valori da $z_1=\xi_1$ fino a $z_1=1$; e diminuisce anche quando prende i valori da $z_1=y_1$ fino a $z_1=\xi_2$ successivamente.

Ma per $z_1=1$ si ha $Q=0$; per $z_1=y_1$ (noi abbiamo supposto $y_1>1$) il rapporto $\frac{m-n}{n}$ diventa infinito, ed infinite diventano quindi la u_0 e la Q. Ne viene che, quando si considerano i valori di z_1 che soddisfanno alla (41), o quelli che soddisfanno alla (42), per $z_1=1$ e per $z_1=\xi_2$ si hanno i valori di Q minimi possibili; invece per $z_1=\xi_1$ e per $z_1=y_1$ si hanno i valori massimi possibili.

Notiamo poi che per $z_1=\xi_1$ che dà un massimo, e per $z_1=\xi_2$ che dà un

minimo di Q, la derivata $\frac{dF_1}{dz_1}$ si annulla, attesa la (40), cioè quel massimo e quel minimo presentano il carattere analitico dell'annullarsi della derivata.

Quanto al diventare infinite la velocità u_0 e la portata Q quando si abbia $z_1 = y_1$ vedi num. 28.

Bisogna però osservare che il massimo ed il minimo dovuti ai valori $z_1 = \xi_1$ e $z_1 = \xi_2$ non sono fra loro comparabili per grandezza. Infatti i valori che può assumere la z_1 si suddividono in due intervalli separati, dati dalle (41) e (42). Il verificarsi dell'una o dell'altra di queste disuguaglianze implica l'esistenza nel tubo d'un movimento di natura diversa (num. 11). Non si tratta dunque di massimi o minimi valori di Q dovuti ad una serie continua di valori di z_1, e quindi fra loro comparabili; ma di valori dovuti a due serie distinte, rappresentanti fenomeni diversi.

Ritornando ai valori $z_1 = \xi_1$ e $z_1 = \xi_2$ essi daranno dunque, ciascuno per il fenomeno da lui rappresentato, un massimo od un minimo della portata, semprechè questo massimo o minimo possa verificarsi nel dato tubo, cioè semprechè resti per esso verificata la (31) oppure la (46), altrimenti la z data dalla (14), e che determina il valore della pressione in una sezione qualunque A del tubo, non sarebbe reale per tutte le sezioni del tubo stesso.

Per esaminare quest'ultima condizione, si noti che dalla (13) si ha

$$a = b + \frac{1}{A_0^2} \tag{50}$$

Se fra questa e le (28) e (29) si eliminano le costanti a e b si troverà

$$\frac{(\mu - 1) z''^{\mu+1}}{(\mu + 1) z''^{\mu-1} - 2} = A_0^2 \zeta''$$

relazione questa che ha luogo dunque fra la massima ordinata $\zeta'' = DQ$ della curva OPQR (fig. 1) e la rispettiva ascissa $z'' = OD$. Se alla massima ordinata ζ'' corrispondesse realmente una sezione Σ_m nel tubo, questa sarebbe la minima possibile compatibile col moto. Il punto M per questa sezione cadrebbe in M_m, e l'ordinata di M_m sarebbe data da $\frac{1}{\Sigma_m^2}$, ed eguaglierebbe la ζ''. Si avrà dunque fra la sezione minima Σ_m compatibile col moto ed il valore della rispettiva ascissa z'', la relazione

$$\frac{(\mu - 1) z''^{\mu+1}}{(\mu + 1) z''^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{A_0}{\Sigma_m}\right)^2 \tag{51}$$

Ora, indicando con ξ_m una delle due radici ξ_1 e ξ_2, sopra trovate, osserveremo che fra il valore dell'ascissa ξ_m per la quale la portata Q è massima o minima e la sezione A_1 ha luogo la (40), cioè sussiste l'equazione

$$\frac{(\mu - 1) \xi_m^{\mu+1}}{(\mu + 1) \xi_m^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$$

Confrontandola colla precedente si vede che la A_1 non può essere altro che la sezione minima compatibile col moto.

Conchiuderemo perciò che ponendo $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ eguale a ξ_1 oppure a ξ_2, ossia prendendo in A_1 la pressione

(52) $$p_1 = p_0 \xi_1^{\mu}, \quad \text{oppure } p_1 = p_0 \xi_2^{\mu}$$

si ha un massimo oppure un minimo della portata Q, purchè la sezione A_1 sia la minima del tubo.

17. Se poi si osserva, che ponendo nella (46) $A_{mi} = \Sigma_m$, ed eliminandovi col mezzo della (29) e della (50) le costanti a e b si ricade nella (51), ne dedurremo che quando, essendo A_1 la sezione minima del tubo, si adottino per la pressione p_1 i valori (52), cioè quelli relativi al massimo oppure minimo della portata Q, la (46) è soddisfatta per questa sezione minima.

Se la A_1 non è la sezione minima del tubo, ma fra A_0 ed A_1 vi sia una sezione minima A_{mi}, per ottenere un massimo o minimo della portata, bisognerà considerare il tronco di tubo fra A_0 ed A_{mi}, ed essendo data la pressione p_0 in A_0, cercare quale debba essere la pressione ossia il valore di z in A_{mi}. Alla (40) si sostituirà dunque l'equazione

$$\frac{(\mu - 1) z^{\mu+1}}{(\mu + 1) z^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{A_0}{A_{mi}}\right)^2$$

che darà due valori di z, e quindi della pressione in A_{mi} tali da rendere massima o minima la portata del tubo. Per la sezione A_{mi} resta naturalmente anche in tal caso soddisfatta la (46).

Dopo aver determinato la pressione p_m che deve regnare nella sezione minima per avere un massimo o minimo di Q, tutti gli elementi del moto restano determinati. Se in un moto permanente così fissato si considera una sezione qualunque A_k, altra che la minima, ed in essa regni la pressione p_k; e partendo dai dati A_k e p_k, si consideri la A_k come sezione iniziale, e si cerchi nuovamente quale pressione deve regnare nella sezione minima per avere il massimo e minimo di Q, si ricade naturalmente nella pressione p_m, già prima trovata. In tali condizioni possiamo dunque dire: Quando la pressione p_m nella sezione minima è tale da rendere un massimo o minimo la portata, essa resta la medesima e mantiene il suo carattere anche quando per sezioni estreme del tubo, invece di A_0 ed A_1 se ne prendano altre qualunque.

18. L'asserzione superiore che quando nella sezione minima, sia essa all'estremità o nell'intermezzo del tubo, vi è tale pressione da rendere un massimo o minimo la portata, allora la (46) è soddisfatta, può essere invertita; cioè si può dire che quando la (46) è soddisfatta, nella sezione A_{mi} regna tale pressione da rendere un massimo o minimo la portata del tubo. Infatti ammessa l'esistenza della (46), postovi $A_{mi} = \Sigma_m$, la (51) ne è una conseguenza necessaria, attese le (29) e (50). Ma la (51) è appunto l'equazione caratteristica, indicante che la pressione nella sezione minima è quella che rende un massimo la portata; dunque se la (46) sussiste la portata Q è un massimo od un minimo.

Il moto misto considerato al num. 12 non può aver luogo che nel caso che la (46) sia soddisfatta. Per quanto precede possiamo dunque dire:

Quando in un tubo abbia luogo il moto misto considerato al num. 12, la portata del tubo è un massimo od un minimo, secondo che essa si considera in relazione dell'uno o dell'altro dei due pezzi, nei quali in questo caso il tubo si divide.

19. Il verificarsi della equazione (46) porta seco anche un'altra conseguenza, che giova rilevare per le discussioni a cui diede motivo [1]. Supponiamo che per la sezione minima sia verificata la (46). Per la stessa sezione sarà pure verificata la equazione generale (14), la quale per la sezione minima diventa

$$A^2_{mi}\, z^2 (a - b z^{\mu-1}) = 1$$

Eliminando A_{mi} fra questa e la (46) e dividendo per a avremo la relazione

$$\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\left(\frac{2a}{(\mu+1)b}\right)^{\frac{2}{\mu-1}} = z^2\left(1 - \frac{b}{a} z^{\mu-1}\right)$$

Caviamo da questa il valore di z. Trasformiamola a tale scopo, coll'introdurre una nuova incognita ϱ mediante la relazione

$$\varrho z = \left(\frac{2a}{(\mu+1)b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

la quale dà $\frac{b}{a} = \frac{2}{(\mu+1)(\varrho z)^{\mu-1}}$. Si otterrà la trasformata

$$\frac{(\mu-1)(\varrho z)^2}{\mu+1} = z^2\left\{1 - \frac{2 z^{\mu-1}}{(\mu+1)(\varrho z)^{\mu-1}}\right\},\ \text{cioè}\ (\mu-1)\varrho^{\mu+1} - (\mu+1)\varrho^{\mu-1} + 2 = 0$$

che è soddisfatta evidentemente da $\varrho = 1$. Avremo dunque

$$z = \left(\frac{2a}{(\mu+1)b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

che è il valore della z' (29), com'era da prevedersi.

D'altra parte eliminando la A fra le (14) e (20) si ha la portata specifica q

$$q = Qz\sqrt{a - b z^{\mu-1}}$$

e se, avendosi per le (2) $z = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, si riguarda la q come funzione della p, considerata questa come variabile indipendente, si ottiene facilmente

$$\frac{dq}{dp} = \frac{Q^2 z^{2-\mu}}{2 q \mu p_0}\left(2a - (\mu+1) b z^{\mu-1}\right)$$

Se in questa si pone il valore di z sopra trovato si ha $\frac{dq}{dp} = 0$, ed è facile vedere che qui si tratta di un massimo. Abbiamo dunque la proposizione:

Quando la (46) è verificata la pressione p_m che regna nella sezione minima A_{mi} è

[1] La investigazione della pressione nella sezione minima fu oggetto di ripetute ricerche e talvolta di polemiche. Vedi i lavori citati di St. Venant et Wanzel, Kolster, Illeck, Hugoniot e Hirn.

quella che rende massima la portata specifica q, qualora questa si consideri come funzione della p, e la p si tratti come variabile indipendente. Questa pressione p_m è dunque data in questo caso dalla

$$p_m = p_0 \left(\frac{2a}{(\mu+1)b}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$$

È facile dimostrare che se la (46) non sussiste, non sussiste neppure la $\frac{dq}{dp} = 0$

III. Alcuni casi particolari.

20. Supponiamo che la funzione $\varphi(x)$ (num. 2) nell'equazione $A = \varphi(x)$ sia tale che per nessun valore di x, da $x = 0$ ad $x = l$, si abbia $\varphi(x) < A_1$. Ciò avverrebbe per es. se la derivata $\varphi'(x)$ si mantenesse negativa e continua costantemente da $x = 0$ ad $x = l$, compresi i limiti.

In tal caso nel tratto di tubo considerato nessuna sezione sarà minore della A_1, la quale sarà perciò la minima, e potremo scrivere $A_{mi} = A_1$, ed il punto M″ coinciderà con M_1. Basterà dunque che sia soddisfatta la (32), oppure la (33), perchè anche la (31) sia soddisfatta. In altre parole, affinchè nel tubo ora preso in considerazione il moto ideato sia possibile, basterà che il rapporto $\frac{p_1}{p_0}$ soddisfi alla (44) oppure alla (45).

Queste considerazioni trovano un'applicazione nei seguenti casi.

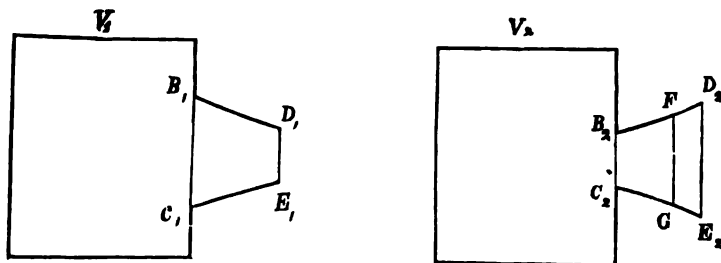



Fig. 3.

Siano V_1 e V_2 due vasi contenenti un gas perfetto alla pressione p_i, dotati d'un tubo d'efflusso di forma conoidica, sia convergente nel senso dell'efflusso come in V_1, oppure divergente come in V_2. Supponiamo che tanto nell'uno che nell'altro vaso, la p_i sia mantenuta costante nella sezione B C del tubo; e che nella sezione D E sia mantenuta costante la pressione esterna $p_e < p_i$. Aperte le bocche D E, supposta nulla la velocità iniziale delle molecole, dopo un certo tempo potrà ritenersi raggiunto un moto permanente di efflusso. Domandasi a quali condizioni questo moto permanente sia possibile in falde parallele per tutta la lunghezza dei tubi di efflusso, come fu sopra ideato.

Ponendo le sezioni $B_1 C_1 = S_1$, $D_1 E_1 = S_1'$; $B_2 C_2 = S_2$, $D_2 E_2 = S_2'$, per applicare le formole superiori, nelle quali con A_0 si è sempre indicata la sezione maggiore, dovremo porre per il primo vaso $S_1 = A_0$, $S_1' = A_1$, $p_i = p_0$, $p_e = p_1$; e per il secondo $S_2 = A_1$, $S_2' = A_0$, $p_i = p_1$, $p_e = p_0$. Riconosceremo facilmente, che i due moti permanenti entro i due tubi di efflusso, se possibili, saranno di natura diversa. Infatti nel tubo del vaso V_1 la pressione diminuisce col diminuire della sezione, mentre nel secondo la pressione diminuisce col crescere della sezione (num. 11). Si vede poi che essendo $p_e < p_i$, al primo vaso non può applicarsi che la condizione (44) che diventa, avuto riguardo anche alla (47),

$$\xi_1^{\mu} \gtreqless \frac{p_e}{p_i} < 1 \tag{54}$$

dove ξ_1 rappresenta la minore delle due radici dell'equazione

$$\frac{(\mu - 1)\xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\xi^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{S_1}{S_1'}\right)^2 \tag{55}$$

Al secondo vaso invece non può applicarsi che la condizione (45), che diventa, avuto riguardo anche alla (47),

$$\left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu} < \frac{p_i}{p_e} \gtreqless \xi_2^{\mu} \tag{56}$$

dove ξ_2 è la maggiore delle due radici dell' equazione

$$\frac{(\mu - 1)\xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\xi^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^2 \tag{57}$$

Il moto considerato sarà dunque possibile nel primo vaso se sia soddisfatta la (54); e nel secondo se sia soddisfatta la (56).

21. Che se nel vaso V_1 il rapporto $\frac{S_1}{S_1'}$ andasse successivamente crescendo, per es. per successiva diminuzione della bocca d'efflusso $D_1 E_1$, la radice ξ_1 resterebbe sempre compresa per le (35) e (36) fra i limiti ξ' ed 1, avvicinandosi sempre più a ξ'. Mentre nel secondo vaso, se il rapporto $\frac{S_2'}{S_2}$ andasse successivamente crescendo, per es. per successiva diminuzione della bocca B_2C_2, la radice ξ_2, attesa la (43), andrebbe essa pure indefinitamente crescendo, avendosi in questo caso $y_1 = \frac{S_2'}{S_2}$. Affinchè dunque il moto sia possibile nel primo vaso, il rapporto $\frac{p_e}{p_i}$ col crescere indefinito di $\frac{S_1}{S_1'}$ dovrà mantenersi fra i limiti ξ'^{μ} ed 1, che sono indipendenti dalle sezioni S_1 ed S_1', e la cui differenza $1 - \xi'^{\mu}$ è inferiore all'unità; mentre nel secondo vaso dovrà il rapporto $\frac{p_i}{p_e}$ crescere indefinitamente, perchè indefinitamente crescono i due limiti fra i quali è compreso, e dei quali uno ha il valore $\left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu}$, e l'altro, cioè

il ξ_2^μ, converge verso il valore $\left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^\mu \left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}$, come facilmente si deduce dalla (40). Se dunque nei due vasi è data la pressione p_i alla bocca BC, affinchè il moto avvenga in falde parallele, dovrà nel primo vaso la pressione p_e alla bocca esterna mantenersi finita fra i limiti p_i e $p_i \xi'^\mu$; mentre nel secondo vaso la p_e dovrà avvicinarsi indefinitamente a zero.

22. Supponiamo ora che i rapporti $\frac{A_0}{A_1}$ ed $\frac{A_e}{A_{mi}}$ convergano verso l'infinito, mentre i rapporti $\frac{A_{mi}}{A_1}$ e $\frac{p_1}{p_0}$ si mantengono quantità finite, diverse da zero. Si ha in generale dalle (3) ed (11)

$$m = \frac{z_1^{\mu+1} - y_1^2}{z_1^2},$$

$$n = \frac{z_1^2 - y_1^2}{z_1^2}, \quad m - n = \frac{z_1^{\mu+1} - z_1^2}{z_1^2}, \quad \frac{m}{m-n} = \frac{z_1^{\mu+1} - y_1^2}{z_1^{\mu+1} - z_1^2}, \quad \frac{n}{m-n} = \frac{z_1^2 - y_1^2}{z_1^{\mu+1} - z_1^2}$$

Se lim. $y_1 = \infty$ si vede facilmente che si avrà:

$$\text{lim.}\, m = \text{lim.}\, n = -\infty; \ \text{lim.}\, \frac{m}{n} = 1, \ \text{lim.}\, (m-n) = \frac{z_1^{\mu+1} - z_1^2}{z_1^2}, \ \text{lim.}\, \frac{m}{m-n} = \pm\infty$$

$\text{lim.}\, \frac{n}{m-n} = \pm\infty$, volendo il segno superiore se $z_1 < 1$, e l'inferiore se $z_1 > 1$.

Ma affinchè la u_0 (12) si mantenga sempre reale mentre y_1 converge verso l'infinito, dovrà essere sempre $\frac{n}{m-n} > 0$, il che esige che si abbia $\text{lim.}\, \frac{n}{m-n} = +\infty$, e quindi $z_1 < 1$, cioè $p_1 < p_0$. Allora sarà anche $\text{lim.}\, \frac{m}{m-n} = +\infty$.
In tali condizioni si ha dunque dalle (13)

$$\text{lim.}\, a = \text{lim.}\, \frac{y_1^2\left(1 - \frac{z_1^{\mu+1}}{y_1^2}\right)}{A_0^2 (z_1^2 - z_1^{\mu+1})} = \frac{1}{A_1^2 (z_1^2 - z_1^{\mu+1})}, \ \text{lim.}\, b = \text{lim.}\, a, \ \text{lim.}\, \frac{a}{b} = 1$$

Con ciò la (14) diventa

$$\frac{z^2 (1 - z^{\mu-1})}{z_1^2 (1 - z_1^{\mu-1})} = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \tag{58}$$

La velocità u_0 tende ad annullarsi; invece la u nella sezione qualunque A, per le (12) e (19)

$$u = \frac{1}{z}\, \text{lim.}\, y u_0 = \frac{1}{z} \sqrt{\lambda\, \text{lim.}\, \frac{y^2 (m-n)}{n}}.$$

Ma $\frac{y^2 (m-n)}{n} = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \cdot \frac{z_1^2 (z_1^{\mu-1} - 1)}{\left(\frac{z_1}{y_1}\right)^2 - 1}$; dunque $\text{lim.}\, \frac{y^2 (m-n)}{n} = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 z_1^2 (1 - z_1^{\mu-1})$, e per la (58)

$$\text{lim.}\, \frac{y^2 (m-n)}{n} = z^2 (1 - z^{\mu-1})$$

Dunque

$$u = \sqrt{\lambda(1 - z^{\mu-1})}$$

Da questa si ha

$$\frac{u^2}{\lambda} = 1 - z^{\mu-1}$$

e notando che

$$\int_z^1 z^{\mu-2} dz = \frac{1 - z^{\mu-1}}{\mu - 1}$$

e che per le relazioni (17) e prima delle (18) si ha $\int_z^1 z^{\mu-2} dz = \frac{1}{\mu RT_0} \int_p^{p_0} v dp$, potremo scrivere

$$\frac{u^2}{\lambda} = \frac{\mu - 1}{\mu RT_0} \int_p^{p_0} v dp$$

la quale, essendo $\lambda = \frac{2\mu g RT_0}{\mu - 1}$ si riduce alla

$$\frac{u^2}{2g} = \int_p^{p_0} v dp$$

nota equazione alle forze vive, da cui altri talvolta prendono le mosse per ulteriori deduzioni [1]. Dall'attuale nostro punto di vista essa è solamente approssimativa per il caso che la sezione A_0 sia grandissima rispetto alle A_1 ed A_{mi}.

23. Per la sezione A_1 si ha

$$u_1 = \sqrt{\lambda(1 - z_1^{\mu-1})}$$

Il volume specifico v_1 nella sezione A_1 diventa $v_1 = \frac{RT_0}{p_0 z_1}$ (18), e quindi la portata

$$Q = A_1 \frac{u_1}{v_1} = \frac{A_1 z_1}{v_0} \sqrt{\lambda(1 - z_1^{\mu-1})}\,.$$

Notisi intanto che nel caso attuale la (27) non è mai soddisfatta.
L'equazione della curva O P Q R (fig. 1) tende a diventare

$$\zeta = \frac{z^2 (1 - z^{\mu-1})}{A_1^2 z_1^2 (1 - z_1^{\mu-1})}$$

Il valore dell'ascissa z'' (29) converge verso

$$z'' = \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} = \xi' \quad (35)$$

e quello dell'ordinata massima ζ'' (28) verso

$$\zeta'' = \frac{(\mu - 1)\left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{2}{\mu-1}}}{(\mu + 1) A_1^2 z_1^2 (1 - z_1^{\mu-1})}$$

[1] Per es. Hugoniot.

Le condizioni (31) e (46), che stabiliscono la possibilità del moto in tutta la lunghezza del tubo tendono a diventare

$$(59) \qquad \frac{(\mu - 1)\left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{2}{\mu - 1}}}{(\mu + 1) z_1^2 (1 - z_1^{\mu - 1})} \left(\frac{A_{mi}}{A_1}\right)^2 \geqq 1$$

Le due radici ξ_1 e ξ_2 della (40) tendono verso $\xi_1 = \xi'$ e $\xi_2 = \infty$, e quindi la condizione (44) tende alla

$$(60) \qquad \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}} < \frac{p_1}{p_0} < 1$$

La condizione (45) condurrebbe a dare un valore infinito al rapporto $\frac{p_1}{p_0}$, caso che fu escluso.

Tutte le formole superiori possono valere come approssimative nel caso che nel tubo che si considera la sezione A_0 sia grandissima rispetto alle A_1 ed A_{mi} ed alle intermedie. Per un tal tubo adunque la possibilità di un moto a falde parallele può riassumersi come segue (num. 11 e 12).

Se il primo membro della (59) è minore dell'unità il moto è impossibile.

Se invece è maggiore dell'unità il moto è possibile, purchè sia verificata la (60). Se invece esso è eguale all'unità, il moto è possibile qualora

$$\left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}} \lesseqgtr \frac{p_1}{p_0} < 1 \text{, oppure qualora } \frac{p_1}{p_0} < \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}} < 1$$

nel qual ultimo caso ha luogo il moto misto indicato al num. 12.

Il secondo membro della (53) tende nel caso attuale a diventare infinito, e quindi il valore di z dato da questa equazione tende a diventare eguale a ξ'. Si ha dunque il massimo della portata quando nella sezione minima A_{mi}, la pressione p_m sia tale che si abbia

$$\frac{p_m}{p_0} = \xi'^{\mu} = \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}}$$

A questo stesso valore si arriva partendo dalla

$$p_m = p_0 \left(\frac{2a}{(\mu + 1) b}\right)^{\frac{\mu}{\mu - 1}} \text{ (num. 19)},$$

essendo nel nostro caso $\frac{a}{b} = 1$.

In tal caso la pressione corrispondente nella sezione A_1 si avrà dalla (58), ponendovi $A = A_{mi}$, $z = \xi'$, col che si ha

$$z_1^2 (1 - z_1^{\mu - 1}) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left(\frac{A_{mi}}{A_1}\right)^2 \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{2}{\mu - 1}}$$

questa darà per z due valori z_{11} e z_{12}, a cui corrisponderanno due pressioni p_{11} e p_{12} nella sezione A_1 date da

$$p_{11} = p_0 z_{11}^{\mu} \qquad p_{12} = p_0 z_{12}^{\mu}$$

e relative una al moto semplice, l'altra al moto misto; tali l'una e l'altra da dare il massimo della portata.

24. Se mantenendo grandissimi i rapporti $\frac{A_0}{A_1}, \frac{A_0}{A_{mi}}$ tutte le sezioni del tubo si suppongono infinitesime, si avrà allora un filo fluido in uno stato di moto permanente, al quale sarebbero applicabili tutte quelle formole superiori, le quali contengono solamente i rapporti delle sezioni. Tale applicazione è tanto più giustificata per un filo fluido con sezioni infinitesime, che in esso le falde parallele sono meglio ammissibili. Nè importa evidentemente che si tratti d'un tubo materiale: essendo il moto permanente, il filo in questione può concepirsi come individuato in una massa fluida che si trovi tutta in modo permanente: il fluido circostante ad un tal filo costituisce allora il tubo indeformabile.

Molti autori hanno considerato questo filo fluido in moto permanente, ed è notevole che il moto particolarmente da essi studiato sia quello tutto speciale sopra designato come moto misto (num. 12); moto per il quale esiste una sezione minima soddisfacente all'equazione (46), e la quale in tal caso non corrisponde nè ad un massimo, nè ad un minimo della pressione, ma per la quale esiste il punto doppio considerato al num. 15, fig. 3 c).

25. Consideriamo ora il caso in cui il rapporto $\frac{A_0}{A_1}$ converga verso l'unità, cioè tendano a diventare eguali le due sezioni A_0 ed A_1. Allora si ha dalle (3) lim. $y_1 = 1$. Se il moto è della stessa natura lungo tutto il tubo, e non si tratti quindi di un moto misto (num. 12), l'equazione (40) diventa al limite

$$\frac{(\mu - 1)\xi^{\mu+1}}{(\mu+1)\xi^{\mu-1} - 2} = 1$$

Le due radici ξ_1 e ξ_2 diventano fra loro eguali, e si ha $\xi_1 = \xi_2 = 1$. Gl'intervalli da ξ_1^μ ed 1, da 1 a y_1^μ e da y_1^μ a ξ_2^μ si annullano, e le (44) e (45) conducono alla $\frac{p_1}{p_0} = 1$, cioè alla relazione $p_1 = p_0$. Ossia se il rapporto $y_1 = \frac{A_0}{A_1}$ converge verso l'unità, anche il rapporto $z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ dovrà convergere verso l'unità. Dunque se le sezioni A_0 ed A_1 diventano eguali, bisogna, perchè il moto considerato sia possibile, che diventino eguali anche le pressioni p_0 e p_1.

Dalle (11) si ha poi, attesa la terza delle (3),

$$m = \frac{z_1^{\mu+1} - y_1^2}{z_1^2}, \quad n = \frac{z_1^2 - y_1^2}{z_1^2}$$

I due rapporti y_1 e z_1 convergendo ciascuno verso l'unità, il denominatore di m e di n converge verso l'unità, i numeratori invece tendono a zero. Dunque i valori di m e di n tendono a zero, e quindi anche la loro differenza $m - n$. Ne viene che la velocità u_0 data dalla (12)

$$u_0^2 = \frac{\lambda(m-n)}{n}, \quad \text{dove } \lambda = \frac{2\mu p_0 v_0 g}{\mu - 1}$$

riesce indeterminata, ed assumerà qualunque valore si desidera, secondo il modo con cui si fanno convergere verso zero il numeratore ed il denominatore della frazione $\frac{m-n}{n}$, cioè secondo il modo col quale i rapporti y_1 e z_1 si fanno convergere verso l'unità. Si può dunque assegnare ad arbitrio il valore della velocità u_0, ed allora resta fissato il valore a cui converge la frazione $\frac{m-n}{n}$. Infatti, indicando tale valore con $\lim.\left(\frac{m-n}{n}\right)$, dovrà aversi

$$u_0^2 = \lambda \lim.\left(\frac{m-n}{n}\right)$$

cioè $\lim.\left(\frac{m-n}{n}\right) = \frac{u_0^2}{\lambda}$. Si avrà allora anche $\lim.\left(\frac{n}{m-n}\right) = \frac{\lambda}{u_0^2}$; ed essendo $\lim.\left(\frac{m-n}{n}\right) = \lim.\left(\frac{m}{n} - 1\right) = \lim.\frac{m}{n} - 1$, cioè $\lim.\frac{m}{n} = \lim.\left(\frac{m-n}{n}\right) + 1$, sarà $\lim.\frac{m}{n} = \frac{u_0^2}{\lambda} + 1$, e $\lim.\left(\frac{m}{m-n}\right) = \lim.\left(\frac{n}{m-n} \times \frac{m}{n}\right) = \lim.\left(\frac{n}{m-n}\right) \times \lim.\frac{m}{n}$ $= \frac{\lambda}{u_0^2}\left(\frac{u_0^2}{\lambda} + 1\right) = \frac{\lambda}{u_0^2} + 1$. Ed anche i limiti a cui convergono a e b restano determinati, quando sia assegnata la u_0. Infatti per le (13) e (50) si ha in generale

$$b = \frac{n}{A_0^2(m-n)}, \quad a = b + \frac{1}{A_0^2}$$

e quindi passando al limite

$$\lim.b = \frac{1}{A_0^2}\lim.\left(\frac{n}{m-n}\right) = \frac{\lambda}{u_0^2 A_0^2}$$

$$\lim.a = \lim.b + \frac{1}{A_0^2} = \frac{1}{A_0^2}\left(1 + \frac{\lambda}{u_0^2}\right)$$

Con questi valori resta fissata la curva O P Q R (fig. 1), e quindi mediante la (14) il valore di z per ogni sezione A del tubo. Quindi si possono avere anche tutte le altre quantità dipendenti da u_0 e da z.

Affinchè però la z sia reale lungo tutto il tubo, bisognerà che sia soddisfatta la (31) oppure la (46). Ponendo per a e b i loro valori (13), ed in luogo di $\frac{m}{m-n}$ e di $\frac{m}{n}$ sostituendo i limiti sopra trovati, le condizioni di realtà della z possono riassumersi scrivendo

$$(61) \qquad \frac{\mu-1}{\mu+1}\left(\frac{A_{mi}}{A_0}\right)^2\left(\frac{\lambda}{u_0^2}+1\right)\left\{\frac{2}{\mu+1}\left(\frac{u_0^2}{\lambda}+1\right)\right\}^{\frac{2}{\mu-1}} \geqq 1$$

relazione questa che limita i valori che è lecito attribuire alla velocità u_0 nella sezione iniziale.

Quando siano soddisfatte le condizioni di realtà della z, il moto potrà essere tanto diretto che inverso, cioè potremo prendere $-u_0$ invece di $+u_0$, cambiando naturalmente di segno le quantità che ne dipendono linearmente.

26. Si noti inoltre che se alla u_0 si attribuisce tal valore che abbia luogo la (46), ossia che valga il segno d'eguaglianza della (61), allora nel tubo considerato può aver luogo anche un moto misto, caso superiormente contemplato per un tubo qualunque (num. 12). In tal caso non sussiste più la equazione di condizione $p_1 = p_0$. Per avere p_1 dato che sia p_0 bisogna allora determinare gli elementi p, u, T del moto nella sezione minima A_{mi}, considerando il primo tronco del tubo fra A_0 ed A_{mi}; e da questi facilmente si dedurranno gli elementi p_1, u_1, T_1 nella sezione A_1 (che nel caso attuale ha la stessa area della A_0), tenendo conto della diversa specie di moto, che ha luogo nel secondo tronco del tubo fra A_{mi} ed A_1.

Le conclusioni a cui siamo arrivati in questo caso di $A_1 = A_0$, potevano anche dedursi dal caso generale in cui $A_1 < A_0$; quando si supponga che lungo il tubo generale considerato vi siano due sezioni eguali, cioè si supponga che vi siano due valori diversi di x, compresi fra i limiti 0 ed l, per i quali la $\varphi(x)$ assuma uno stesso valore.

Se il tubo è cilindrico, tutte le sezioni A sono eguali ad A_0, la curva $M' M_0 M_1 M''$ diventa una retta parallela all'asse delle ascisse, tutti gli elementi del moto p, v, u, ecc. diventano eguali in tutte le sezioni. Dunque in un tubo cilindrico il fluido non può muoversi permanentemente che di moto uniforme; come del resto può facilmente dimostrarsi anche direttamente.

27. La osservazione del num. 25, che cioè la curva O P Q R resta fissata qualora sia data la velocità u_0, può generalizzarsi. Tale fissazione infatti è indipendente dalla condizione che sia $A_1 = A_0$. Le costanti a e b dell'equazione (14) sono determinate, quando nella sezione A_0 siano date la temperatura T_0 e la velocità u_0 del fluido, di cui si conoscano le costanti, poichè dalle (12) e (13) si ha

$$b = \frac{\lambda}{u_0^2 A_0^2}, \quad a = b + \frac{1}{A_0^2}, \quad \text{dove } \lambda = \frac{2\mu g R T_0}{\mu - 1}$$

e per A_0 si può prendere una sezione qualunque anche intermedia. Ne viene che per avere i valori di z, ossia della pressione e degli altri elementi del moto nelle varie sezioni A del tubo, basta conoscere per una qualunque di esse la T, la u e la p. Ne viene anche che riferendo il moto ad una determinata sezione, come la A_0, non si possono avere per vari tronchi successivi del tubo moti diversi, regolati da diverse curve O P Q R, ossia da diverse equazioni della forma (14); neppure se questi moti diversi nei singoli tronchi fossero tali, da avere alla fine di un tronco le stesse T, u, p colle quali comincia il tronco successivo. Infatti se ciò potesse essere, presa per sezione iniziale una di quelle che separano i singoli tronchi, non si potrebbero più colle T, u, p di quella sezione determinare le costanti a e b dei due tronchi attigui, che dovrebbero essere diverse. Inoltre, come si può dimostrare, se per due sezioni A_i ed A_j si formano le equazioni analoghe alla (14)

$$Az^2 (a_i - b_i z^{\mu-1}) = 1, \quad Az^2 (a_j - b_j z^{\mu-1}) = 1$$

e la prima sia soddisfatta dalla coppia di valori A_j, $z_j = \left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, la seconda lo è

dalla coppia A_i, $z_i = \frac{1}{z_j}$. Or ciò non sarebbe se potessero aver luogo moti diversi in tronchi successivi.

28. Quando si ha $z_1 = y_1$, senza che sia $z_1 = y_1 = 1$ (num. 25), cioè quando le pressioni p_0 e p_1 nelle sezioni A_0 ed A_1 soddisfanno alla condizione $\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^\mu$, si ha $r_1 = 1$, $m = z_1^{\mu-1} - 1$, $n = 0$; il rapporto $\frac{n}{m-n}$ si annulla, e quindi anche la b (13). Per la (50) si ha allora $a = \frac{1}{A_0^2}$. L'equazione (14) si riduce ad $A z = A_0$, la velocità u_0 e la portata Q date dalle (15) e (16) diventano infinite. La curva OPQR si trasforma nella parabola $\zeta = \frac{z^2}{A_0^2}$. Per comprendere questi risultati, che naturalmente non possono avere un riscontro nella realtà, premetteremo due osservazioni generali, cioè non limitate al caso che sia $z_1 = y_1$. La prima si è che fu supposto un moto adiabatico, a falde parallele, senza attriti. La seconda è che le formole contemplano lo stato permanente del moto. Se dunque si suppone che al principio del tempo la velocità delle molecole sia nulla, e nulla quindi anche la u_0, e le pressioni p_0 e p_1 si mantengano invariabili rispetto al tempo, il moto sarà vario e non permanente. Col decorrere indefinito del tempo il moto si avvicinerà sempre più allo stato permanente, come ad uno stato limite verso cui esso tende a ridursi. La u_0, che è nulla al principio del tempo, crescerà successivamente, convergendo verso quel valore limite che compete allo stato permanente. Ora le formole esprimono appunto questo stato limite. Infatti fu posto fin da principio $\frac{du}{dt} = 0$ (num. 3). Per attuare teoricamente questo avvicinamento allo stato limite, oltre a mantenere durante il tempo inalterate nelle sezioni A_0 ed A_1 le pressioni p_0 e p_1, bisogna immaginare che alle singole falde di fluido che successivamente partono dalla sezione A_0 avviandosi verso la A_1 subentrino sempre nuove falde, provenienti dall'esterno e dotate non solo della pressione p_0, ma altresì della velocità u_0, che durante il periodo di avvicinamento al limite, è funzione del tempo.

Ciò premesso in generale, le formole ci dicono che quando le pressioni p_0 e p_1 soddisfacessero alla $\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^\mu$, ed in tale condizione, partendo dalla velocità iniziale nulla, si volesse avvicinarsi allo stato permanente, questo stato non si potrebbe mai raggiungere. Col crescere del tempo la u_0 crescerebbe indefinitamente, bisognerebbe nella sezione A_0 far subentrare continuamente dall'esterno nuove falde di fluido aventi sempre la pressione p_0, ma dotate di velocità u_0 sempre maggiori, senza che con questo crescere successivo di u_0 si possa giungere ad un valore finito, tale da soddisfare alle condizioni di permanenza.

In un tubo reale entrerebbe naturalmente ben presto in azione sensibile l'attrito come funzione di u_0, azione che ne impedirebbe l'indefinito incremento.

29. Sia ora il tubo d'efflusso di un vaso V_3, fig. 4, in principio convergente e poi divergente, con una sezione minima HI; e riteniamo sempre che la pressione p_e nella

bocca DE sia inferiore alla p_i nella sezione BC. Aperta la bocca DE, supposta nulla la velocità iniziale delle molecole, mantenendo costante la pressione p_i, si stabilirà dopo un certo tempo un moto permanente di efflusso, che è possibile in due modi diversi, secondo quanto fu sopra discusso.

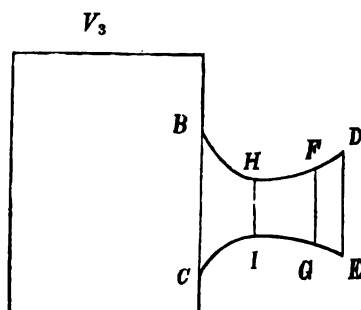



Fig. 4.

1.° Quando la sezione BC è maggiore della DE, il moto può effettuarsi in modo, che la pressione p_i diminuisca dalla sezione BC fino alla sezione minima HI, e poi cresca dalla sezione minima fino alla sezione DE, dove raggiunga il valore p_e;

2.° Può verificarsi il caso di moto misto, ed allora la pressione diminuisce dal valore p_i nella sezione BC fino ad un determinato valore nella sezione minima HI, e continua a diminuire anche dalla sezione minima HI fino alla esterna DE, dove raggiunge il valore p_e. Questo moto misto può aver luogo tanto se la sezione BC sia maggiore della DE, quanto se sia minore od eguale.

Colla scorta delle norme superiori possono facilmente fissarsi le condizioni a cui devono soddisfare le sezioni e le pressioni, affinchè si verifichi l'uno o l'altro dei suddetti moti (vedi num. 11, 12; e 36 e segg.).

IV. Efflusso.

30. La conoscenza delle condizioni sopra studiate sotto le quali può avverarsi il moto permanente di un gas perfetto in un tubo, può essere di utilità nella questione del suo efflusso. Il fenomeno dell'efflusso è del resto evidentemente ben più complicato. Quando un gas perfetto è chiuso entro un vaso, nel quale la pressione sia p_i, mentre esternamente al vaso la pressione sia $p_e < p_i$, e si pratichi un'apertura qualunque nel vaso, avrà luogo efflusso. Però la determinazione precisa delle fasi tutte dell'efflusso in tale generalità supera la potenza attuale del calcolo. Il problema non diventa trattabile che mediante varie supposizioni, che possono più o meno essere conformi al vero; ma che in generale allontanano il fenomeno considerato dal calcolo dal fenomeno reale.

In relazione allo studio precedente sul moto nei tubi, faremo le seguenti supposizioni: che le pressioni p_i e p_e all'interno ed all'esterno del vaso si mantengano

inalterate; che il moto quindi dopo un certo tempo possa ritenersi permanente; che l'efflusso si faccia mediante un tubo rettilineo, come quello superiormente considerato. La supposizione dell'esistenza di un tubo potrà intendersi realizzata sia quando esista realmente un tubo rigido, sia quando i fili fluidi che passano rasente al perimetro del foro, costituiscano una specie d'involucro tubolare formato dal fluido stesso. Supporremo finalmente che il fluido si muova in falde piane parallele normali all'asse del tubo come sopra si fece.

In tali condizioni riterremo che detta A_i la sezione estrema del tubo verso l'interno del vaso ed A_e la sezione estrema verso l'esterno, la pressione abbia il valore p_i nella sezione A_i, ed il valore p_e nella sezione A_e. Se i rapporti $\frac{A_i}{A_e}, \frac{p_i}{p_e}$ sono tali da soddisfare le condizioni di moto permanente a falde parallele, superiormente studiate, potremo ritenere che l'efflusso si faccia appunto secondo le leggi di tale moto. Che se i detti rapporti non soddisfano quelle condizioni arriveremo ad una delle seguenti conclusioni: od il moto a falde parallele non si verifica e si verifica invece un moto più complicato; oppure quei rapporti si alterano da sè per fatto fisico in modo che il moto a falde parallele almeno in parte si verifichi.

Per chiarire meglio quest'ultima alternativa gioverà considerare il seguente fatto idraulico, che presenta una qualche analogia coll'efflusso in questione.

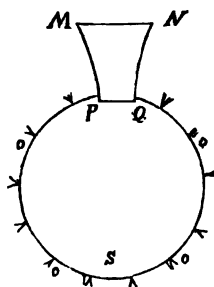



Fig. 5.

31. Supponiamo un liquido incompressibile, che si muova in falde parallele orizzontali dall'alto verso il basso in un tubo MNPQ, fig. 5, ad asse verticale, sollecitato dalla gravità e da una pressione p_0 sulla sezione $MN = A_0$. Supponiamo inoltre che l'apertura inferiore PQ del tubo sbocchi in una sfera cava di diametro molto grande rispetto alle dimensioni della sezione $PQ = A_1$. Supponiamo che la sfera sia dotata di molti e piccoli forellini o, tutti di egual diametro, pei quali il liquido esca in zampilli all'esterno. Sia a il diametro di uno dei forellini.

Supponiamo che il diametro a sia tanto piccolo rispetto alle dimensioni dell'apertura PQ, che il liquido sgorghi a mala pena ed in piccola quantità dalla superficie della sfera, la quale si manterrà in tal caso piena del liquido, mentre il moto di discesa nel tubo MQ si farà lentamente. Aumentando successivamente il diametro a dei forellini, senza accrescerne il loro numero, il liquido uscirà dalla superficie della sfera più abbondantemente ed il moto di discesa si accelererà nel tubo MQ. E

si vede che seguitanto l'aumento di a, allargando cioè sempre più i fori, si può arrivare al punto che la parte superiore della sfera non sia più piena di liquido; e che dalla bocca PQ esca liberamente una vena fluida, che vada a frangersi nella parte inferiore S della sfera, cosicchè il liquido esca all'aperto per i prossimi grossi fori vicini ad S.

Diciamo ora primo stadio del moto, quello in cui il liquido riempie *tutta* la sfera ed esce zampillando da *tutti* i forellini alla sua superficie. Secondo stadio del moto diremo quello, in cui la sfera è in parte vuota, e la vena esce libera dalla bocca PQ.

Supponiamo ora, che avendo trattato analiticamente il primo stadio del moto, siasi stabilito un sistema di formole, esprimenti tutti gli elementi del moto di discesa del liquido nel tubo MQ, fra cui la velocità v, la pressione p, ecc. Naturalmente nel trovato sistema di formole le espressioni di v, p,... conterranno anche il diametro a oltre la data pressione p_0, le dimensioni del tubo e della sfera, ed altre costanti relative alla natura del liquido. Potremo dunque indicare questo sistema di formole scrivendo

$$(\Sigma)\ v = \varphi\,(a, p_0, A_0, A_1, \dots), \quad p = \psi\,(a, p_0, A_0, A_1, \dots), \text{ ecc.}$$

Che se ora facciamo crescere successivamente la a, finchè arriviamo al limite fra il primo stadio del moto ed il principio del secondo, e poi ancora oltre quel limite, il sistema (Σ) di formole cadrà in difetto, non essendo esso applicabile che per valori di a che riflettono il primo stadio. L'applicare le formole (Σ) per valori di a relativi al secondo stadio, darà necessariamente per le v, p, ... dei valori fisicamente inaccettabili.

32. Questa specie di correlazione fra il fenomeno fisico ora considerato ed il sistema (Σ) di formole, è naturalmente estensibile ad altri fenomeni e può generalizzarsi come segue:

Quando una causa fisica, numericamente rappresentata da una costante a, interviene in un fenomeno finchè a è compresa fra due dati limiti a_1 ed a_2, e non interviene più, oppure interviene con altra legge, qualora a è esterno a quei limiti, ed in tali condizioni siasi trovato un sistema di formole rappresentanti gli elementi del fenomeno quando $a_1 \gtreqless a \gtreqless a_2$, tale sistema darà valori fisicamente inaccettabili, quando alla a si attribuiscano valori esterni ai limiti che le competono. Questa correlazione esistente fra il fenomeno fisico ed il sistema di formole che lo rappresentano può anche esprimersi in modo inverso dicendo: Se un sistema di formole, rappresentanti gli elementi d'un fenomeno fisico, e contenenti una costante a, per certi valori attribuiti alla a dà valori fisicamente impossibili per gli elementi del fenomeno, vuol dire che la causa rappresentata dalla costante a, per quei certi valori, o non influisce più sul fenomeno o v'influisce con legge diversa da quella supposta nello stabilire il sistema di formole.

Da questa proposizione possono dedursi le seguenti:

A) Se la causa rappresentata dalla costante a è totalmente senza influenza sul fenomeno quando sia $a < a_1$ oppure $a > a_2$, e si faccia variare la a da un valore compreso fra i limiti fino ad un valore situato oltre uno dei limiti, il sistema di formole si manterrà valido finchè la a arriva al limite, e conserverà il valore che esso ha al limite anche per i valori di a situati oltre il limite.

B) Se invece la causa rappresentata dalla costante a, quando il suo valore è esterno ai limiti, influisce con legge diversa sul fenomeno, bisognerà caso per caso studiare tale legge diversa, ed apportare al sistema di formole quelle modificazioni, che corrispondono alla diversa legge, affine di rappresentare il fenomeno per quei valori di a che escono dai limiti.

33. Colla scorta delle precedenti osservazioni possiamo esaminare alcuni casi del fenomeno d'efflusso. Per rendere più compendioso tale esame esporremo prima qualche altra osservazione generale sulla curva O P Q R (fig. 1), oltre quanto fu detto ai num. 8 e sgg.

L'ordinata massima ζ'' della curva e la rispettiva ascissa z'' sono funzioni, come si vede dai loro valori (28) e (29), oltrecchè della natura del fluido, delle quantità a e b, le quali, attese le (13), (11) e (3) dipendono dalle sezioni A_0 ed A_1 e dal rapporto $z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$. Per un dato tubo dunque e per un dato fluido le z'' e ζ'' possono riguardarsi come funzioni del rapporto z_1, ossia del valore attribuito alla pressione p_1 nella sezione A_1, qualora p_0 si riguardi come costante. Ad un dato valore z_i attribuito alla z_1, come variabile indipendente, corrispondono un valore z_i'' ed uno ζ_i'' di quell'ascissa e di quell'ordinata massima; e resta così individuata una speciale curva OPQR. Ci proponiamo ora di esaminare qual sia l'andamento dei valori di z'' e ζ'' quando la z_1 si faccia variare fra due dati limiti.

Per il nostro scopo limiteremo questo esame al caso che sia $p_1 < p_0$, e faremo variare la z_1 da $z_1 = \xi_1$ fino a $z_1 = 1$; intendendo per ξ_1 la minore delle due radici dell'equazione (40).

Troviamo primieramente i valori di z'' e di ζ'' per $z_1 = \xi_1$ e per $z_1 = 1$. Per $z_1 = \xi_1$ si ha dalle (3), (11) e (13)

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{\xi_1^{\mu+1} - y_1^2}{\xi_1^2 - y_1^2}$$

Ma essendo la ξ_1 radice della (40) sarà

$$\frac{(\mu - 1)\,\xi_1^{\mu+1}}{(\mu + 1)\,\xi_1^{\mu-1} - 2} = y_1^2 \tag{62}$$

che può anche scriversi

$$(\mu + 1)(\xi_1^2 - y_1^2)\,\xi_1^{\mu-1} = 2\,(\xi_1^{\mu+1} - y_1^2)\,, \quad \text{cioè} \quad \frac{\xi_1^{\mu+1} - y_1^2}{\xi_1^2 - y_1^2} = \frac{\mu + 1}{2} \cdot \xi_1^{\mu-1}$$

Dunque sarà

$$\frac{a}{b} = \frac{\mu + 1}{2} \cdot \xi_1^{\mu-1}$$

e quindi dalla (29)

$$z'' = \xi_1$$

Per $z_1 = \xi_1$ si ha poi dalle stesse (3), (11) e (13)

$$a = \frac{m}{A_0^2\,(m - n)} = \frac{\xi_1^{\mu+1} - y_1^2}{A_0^2\,\xi_1^2\,(\xi_1^{\mu-1} - 1)}$$

e quindi dalla (28), notando che $\left(\frac{2a}{(\mu+1)b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} = z'' = \xi_1$, si otterrà

$$(63) \qquad \zeta'' = \frac{\mu-1}{\mu+1} \cdot \frac{\xi_1^{\mu+1} - y_1^2}{A_0^2(\xi_1^{\mu-1}-1)}$$

Ma la (62) può anche scriversi $(\mu-1)\xi_1^{\mu+1} = y_1^2 \{\mu - 1 + (\mu+1)(\xi_1^{\mu-1}-1)\}$, oppure anche

$$(\mu-1)\xi_1^{\mu+1} - y_1^2(\mu-1) = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 (\mu+1)(\xi_1^{\mu-1}-1)$$

cioè

$$\frac{\xi_1^{\mu+1} - y_1^2}{\xi_1^{\mu-1}-1} = \frac{\mu+1}{\mu-1}\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$$

col che la (63) diventa

$$\zeta'' = \frac{1}{A_1^2}$$

Per $z_1 = 1$ si ha delle (11) $m = n = 1 - r_1^2, m - n = 0$, e quindi dalle (13) $a = b = \infty$, essendo r_1 diverso dall'unità, ed $\frac{a}{b} = 1$. Dunque dalle (28) e (29)

$$z'' = \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} = \xi' \ (35), \quad \text{e } \zeta'' = \infty$$

Trovati i valori di z'' e di ζ'' per i valori estremi $z_1 = \xi_1$ e $z_1 = 1$ della z_1 esaminiamone i valori intermedi.

Elevando la (29) alla potenza $\mu - 1$ e derivandola rispetto a z_1, tenuto conto dei valori di a e b si trova facilmente (vedi anche num. 16)

$$\frac{d.z''^{\mu-1}}{dz_1} = \frac{2z_1\{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2\}}{(z_1^2-y_1^2)^2}\left\{\frac{(\mu-1)z_1^{\mu+1}}{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2} - y_1^2\right\}$$

Ora per tutti i valori di z_1 intermedi fra ξ_1 ed 1, il fattore $\{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2\}$ è positivo, mentre il fattore

$$\left\{\frac{(\mu-1)z_1^{\mu+1}}{(\mu+1)z_1^{\mu-1}-2} - y_1^2\right\}$$

è negativo (num. 10). Dunque per tutti quei valori intermedi sarà $\frac{d.z''^{\mu-1}}{dz_1} < 0$, cioè la $z''^{\mu-1}$, e quindi anche la z'' decresce continuamente, quando la z_1 aumenta continuamente da $z_1 = \xi_1$ fino a $z_1 = 1$.

Eliminando fra le (28), (29) e (50) le a e b si è ottenuto (num. 16)

$$A_0^2\zeta'' = \frac{(\mu-1)z''^{\mu+1}}{(\mu+1)z''^{\mu-1}-2}$$

Derivando questa rispetto a z_1, si avrà

$$A_0^2\frac{d\zeta''}{dz_1} = \frac{2(\mu^2-1)z''^{\mu}(z''^{\mu-1}-1)}{\{(\mu+1)z''^{\mu-1}-2\}^2} \cdot \frac{dz''}{dz_1}$$

Ma, per quanto precede, per tutti i valore intermedi di z_1 si ha $z'' < \xi_1 < 1$, dunque il fattore $(z''^{\mu-1} - 1)$ è negativo. Ed essendo negativa anche la derivata $\frac{dz''}{dz_1}$, ne viene che

$$\frac{d\zeta''}{dz_1} > 0$$

cioè la ζ'' aumenta continuamente mentre la z_1 aumenta fra i limiti ξ_1 ed 1.

Riassumendo diremo: Quando $p_1 < p_0$, ed il rapporto $z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ si faccia aumentare da $z_1 = \xi_1$ fino a $z_1 = 1$, la z'' diminuisce continuamente da $z'' = \xi_1$ fino a $z'' = \xi'$; mentre la ζ'' aumenta continuamente da $\zeta'' = \frac{1}{A_1^2}$ fino a $\zeta'' = \infty$. Ad un valore z_1 compreso fra ξ_1 ed 1 corrisponde un valore di z'' compreso fra ξ_1 e ξ'; proposizione che trae seco necessariamente la seguente: ad un valore di z'' compreso fra ξ_1 e ξ', corrisponde un valore di z_1 compreso fra ξ_1 ed 1.

Se inoltre ai valori $z_i\, z_j$ corrispondono i valori $z_i''\, z_j''$ ed i valori $\zeta_i''\, \zeta_j''$, e si abbia $z_i > z_j$ sarà $z_i'' < z_j''$ e $\zeta_i'' > \zeta_j''$. Una di queste tre disuguaglianze trae seco necessariamente l'esistenza delle altre due.

34. Abbiasi ora in primo luogo un vaso V_1, dotato di tubo convergente, fig. 3. Supponiamo che la pressione interna p_i ed esterna p_e soddisfino alla

$$\xi_1^{\mu} < \frac{p_e}{p_i} < 1$$

e che quindi il moto a falde parallele sia possibile (num. 20). Facciamo allora diminuire successivamente la p_e mantenendo inalterata la p_i finchè si arrivi al limite

$$\xi_1^{\mu} = \frac{p_e}{p_i}$$

dove tale moto è ancora possibile. In tal caso la portata Q è un massimo (num. 16) Che se la p_e continua a diminuire ed il limite si oltrepassa, allora le formole cadono in difetto. Ma qui ci troviamo nel caso A) (num. 32): la costante p_e cessa dall'avere qualsiasi influenza sul fenomeno qualora sia

$$\frac{p_e}{p_i} < \xi_1^{\mu}$$

ed il fenomeno si mantiene quindi nello stato corrispondente al limite. Il moto nel tubo d'efflusso è determinato dalle condizioni fisiche precedenti la sezione $D_1\, E_1$; e non sente più alcuna influenza o reazione dipendente dalla pressione p_e dell'ambiente esterno. Se il rapporto $\frac{S_1}{S_1'}$ delle bocche fosse grandissimo il valore del limite ξ_1^{μ} sarebbe dato prossimamente da

$$\xi_1^{\mu} = \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \text{ (num. 21)},$$

poichè in tal caso si ha prossimamente $\xi_1 = \xi'$ (35).

35. Abbiasi in secondo luogo un vaso V_2 (fig. 3), dotato di tubo divergente. Supponiamo qui pure che dalle pressioni alle bocche sia soddisfatta la

$$\left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu} < \frac{p_i}{p_e} < \xi_2{}^{\mu}$$

e che quindi il moto a falde parallele sia possibile (num. 20).

α) Se ora facciamo diminuire successivamente la p_e, e supponiamo esplicitamente che sia mantenuta inalterata la p_i nella sezione $B_2 C_2$, arriveremo al limite superiore

$$\frac{p_i}{p_e} = \xi_2{}^{\mu}$$

dove il moto a falde parallele è ancora possibile, e la portata Q è un minimo (num. 16). Che se la p_e continua ancora a diminuire, si varca il limite, e ricadiamo ancora nel caso A) (num. 32). Cessa cioè qualunque influenza della pressione p_e. Il moto nel tubo d'efflusso è determinato unicamente dalle condizioni fisiche che precedono la sezione $D_2 E_2$ ed è quello corrispondente al limite che fu varcato.

β) Qui però deve anche considerarsi il caso che la p_e vada crescendo, e che sia raggiunto e varcato l'altro limite $\left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu}$.

Quando questo limite è raggiunto ci troviamo nel caso $z_1 = y_1$, che fu sopra considerato (num. 28), e del quale fu indicato il significato.

Quando invece il limite sia varcato ed abbia quindi luogo la

$$1 < \frac{p_i}{p_e} < \left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu}$$

ci troviamo nel caso considerato al num. 7, in cui è soddisfatta l'equazione (27), nel quale quindi il moto a falde parallele, senza attrito, come fu da noi considerato, non è possibile. Le formole quindi sopra sviluppate sono inette a far conoscere il moto assunto dal fluido, e quindi anche a determinare l'efflusso che ne consegue.

Quanto ad abbandonare la fatta supposizione, cioè che la pressione p_i nella sezione $B_2 C_2$ rimanga costante, mentre varia la pressione esterna p_e, vedi num. 40, 47.

36. Abbiasi in terzo luogo un vaso V_3, fig. 4, dotato di tubo in principio convergente e poi divergente, nel quale la sezione BC sia maggiore della DE. Consideriamo prima il moto semplice indicato al num. 29, 1.° Poniamo le sezioni $BC = A_0$, $DE = A_1$ ed $HI = A_{mi}$, e sia $p_0 = p_i$ la pressione in BC, e $p_1 = p_e < p_i$ la pressione in DE.

Cerchiamo anzitutto quale dovrebbe essere la pressione in DE affinchè fosse verificata la (46). Diciamo p_e' tale pressione, e potremo determinarla osservando che nel caso nostro la (46) dovrà sussistere contemporaneamente alla condizione (num. 12)

$$z' < z_1 < 1 \tag{64}$$

La (46) è un'equazione che lega fra loro i rapporti delle tre sezioni A_0, A_1 ed A_{mi} col rapporto $\frac{p_1}{p_0} = z_1{}^{\mu}$ delle pressioni nelle sezioni estreme; come facilmente si

deduce sostituendo nella (46) i valori delle a e b risultanti dalle (11) e (13). Ne viene che se i rapporti delle sezioni sono dati, come nel caso nostro supponiamo, il rapporto $\frac{p_1}{p_0}$, cioè per noi $\frac{p_e'}{p_i}$ riesce determinato. Il suo valore può ottenersi come segue. Si eliminino le costanti a e b fra la (46), la (29) e la (50) e si troverà

$$(65)\qquad \frac{(\mu-1)\,z''^{\mu+1}}{(\mu+1)\,z''^{\mu-1}-2}=\left(\frac{A_0}{A_{mi}}\right)^2$$

Questa equazione ci darà per z'' due valori, uno che diremo z_1'' minore dell' unità, l'altro z_2'' maggiore dell'unità. Per la (64) dovremo prendere $z''=z_1''$. Conosciuto z'' possiamo passare alla ricerca di z_1 che ci darà il rapporto cercato $\frac{p_e'}{p_i}$. Notiamo che per la (29) e la (13) si ha il valore di $\frac{m}{n}$, espresso nel nostro caso da

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}=\frac{1}{2}(\mu+1)\,z_1''^{\mu-1}$$

e che il valore dello stesso rapporto è pure per le (11) e (3) espresso da

$$\frac{m}{n}=\frac{z_1^{\mu-1}-r_1^2}{1-r_1^2}=\frac{z_1^{\mu+1}-y_1^2}{z_1^2-y_1^2}$$

Dunque eguagliando le due espressioni avremo

$$z_1^2\,\{(\mu+1)z_1''^{\mu-1}-2\,z_1^{\mu-1}\}=y_1^2\,\{(\mu+1)z''^{\mu-1}-2\}$$

dalla quale eliminando il fattore $\{(\mu+1)\,z_1''^{\mu-1}-2\}$ mediante la (65), e ricordando che $y_1=\frac{A_0}{A_1}$, si ha

$$(66)\qquad \frac{(\mu-1)\left(\frac{z_1''}{z_1}\right)^{\mu+1}}{(\mu+1)\left(\frac{z_1''}{z_1}\right)^{\mu-1}-2}=\left(\frac{A_1}{A_{mi}}\right)^2$$

Questa equazione darà per il rapporto $\frac{z_1''}{z_1}$ due valori uno minore e l'altro maggiore dell'unità, a cui dunque corrisponderanno rispettivamente due valori z_{11} e z_{12} di z_1, dei quali supporremo z_{11} il maggiore, e che saranno tali che si avrà $z_{11}>z_1''$ e $z_{12}<z_1''$. In riguardo alla (64) dovremo dunque prendere $z_1=z_{11}$, ed avremo quindi per il cercato valore di p_e'

$$(67)\qquad p_e'=p_i\,z_{11}^{\mu}$$

Ciò premesso supponiamo che la vera pressione p_e nella sezione DE soddisfi alla

$$(68)\qquad p_e'<p_e<p_i$$

In tal caso tanto la (31) che la (44) saranno verificate ed il moto a falde parallele, indicato al num. 29, 1.° potrà aver luogo in tutta la lunghezza del tubo. Infatti

applicando la (40) al nostro tubo, ricordando che si ha $y_1 = \frac{A_0}{A_1}$, e confrontandola colla (65) si vede che il secondo membro della (65) è maggiore del secondo membro della (40). Dunque la radice ξ_1 della (40) sarà maggiore della radice z_1'' della (65) (vedi num. 10), cioè si avrà $z_1'' < \xi_1$; ma contemporaneamente si ha pure $z_1'' > \xi'$ (num. 10), dunque $\xi' < z_1'' < \xi_1$. Il corrispondente valore z_{11} alla sezione DE soddisferà dunque, per quanto si espose al num. 33, alla condizione

$$\xi_1 < z_{11} < 1$$

cioè sarà

$$\xi_1^{\mu} < \frac{p_e'}{p_i} < 1$$

Ma per supposto si ha dalla (68) $\frac{p_e'}{p_i} < \frac{p_e}{p_i} < 1$, dunque sarà anche

$$\xi_1^{\mu} < \frac{p_e}{p_i} < 1$$

cioè la (44) è soddisfatta tanto dal rapporto $\frac{p_e'}{p_i}$ come dal rapporto $\frac{p_e}{p_i}$.

D'altra parte ponendo $z_e = \left(\frac{p_e}{p_i}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ abbiamo per dato $z_{11} < z_e$; dunque chiamando ζ_1'' e ζ_e'' le ordinate massime relative alle due curve OPQR spettanti ai due rapporti z_1'' e z_e, e chiamando z_1'', z_e'' le rispettive ascisse, sarà (num. 33)

$$\zeta_1'' < \zeta_e'' \tag{69}$$

Ma per il valore z_{11} nella sezione A_1 essendo soddisfatta la (46) avremo $\zeta_1'' = \frac{1}{A^2_{mi}}$, e le ζ_e'', z_e'' saranno date dalle (28) e (29) quando in esse per a e b s'intendano posti i valori corrispondenti al rapporto z_e, valori che diremo a_e e b_e e che si ottengono dalle formole generali (3), (11) e (13), nelle quali si ponga z_e in luogo di z_1. Per tale rapporto z_e sarà dunque

$$\zeta_e'' = \frac{(\mu-1)\,a_e}{\mu+1}\left(\frac{2\,a_e}{(\mu+1)\,b_e}\right)^{\frac{2}{\mu-1}}, \quad z_e'' = \left(\frac{2\,a_e}{(\mu+1)\,b_e}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

e per la (69) sarà

$$\frac{(\mu-1)\,a_e\,A^2_{mi}}{\mu+1}\left(\frac{2\,a_e}{(\mu+1)\,b_e}\right)^{\frac{2}{\mu-1}} > 1$$

ossia la (31) è soddisfatta dal rapporto $\frac{p_e}{p_i}$.

Per conoscere la pressione nella sezione minima HI si userà della (14), prendendo $a = a_e$ e $b = b_e$ e ponendovi $A = A_{mi}$. Dei due valori di z che così si otterranno, si prenderà il maggiore che diremo z_n. La pressione cercata sarà allora $= p_i\, z_n^{\mu}$ (num. 14).

Facciamo ora diminuire successivamente la p_e. Quando $p_e = p_e'$ saranno verificate la (44) e la (46), ed avrà luogo ancora il moto indicato al num. 29 1.° La pressione p_m nella sezione minima HI diverrà

$$p_m = p_i z_1''^{\mu} \tag{70}$$

e la portata Q del tubo sarà un massimo (num. 18).

Quando p_e è inferiore a p_e', ma soddisfa alla condizione

$$p_e' > p_e > p_m \tag{71}$$

il moto a falde parallele non può più aver luogo per tutta la lunghezza del tubo. Per chiarire la cosa si osservi, che nel caso che ora si considera se si supponga raccorciato il tubo d'efflusso col tagliarlo in una sezione FG intermedia fra HI e DE, e coll'asportarne la parte GFDE, si riconduce il caso a quello precedente. Una tal sezione FG, di cui indicheremo con Σ' l'area, esiste sempre ed è determinata dall'equazione

$$\frac{(\mu - 1)\left(\frac{p_m}{p_e}\right)^{\frac{\mu+1}{\mu}}}{(\mu + 1)\left(\frac{p_m}{p_e}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} - 2} = \left(\frac{\Sigma'}{A_{mi}}\right)^2 \tag{72}$$

Ora siccome il fluido procede nell'efflusso dall'interno verso l'esterno sotto l'azione della pressione interna, è naturale il supporre ch'esso proceda in falde parallele fino alla sezione FG, poichè fino ad essa le condizioni di moto a falde parallele sono soddisfatte. Dalla sezione FG in poi il moto deve necessariamente farsi irregolare, poichè le condizioni fisiche del moto a falde parallele sono cessate. L'influenza dunque della costante p_e quando essa soddisfa alla condizione (71) consiste nel limitare il moto a falde parallele al tronco BCFG del tubo d'efflusso, rendendo per tale moto come inesistente il residuo tronco. Ci troviamo dunque nel caso B) del num. 32.

La pressione p_m nella sezione minima sarà ancora data dalla (70), e la portata Q sarà sempre un massimo.

Quando $p_e = p_m$ il moto a falde parallele si estende solamente fino alla sezione minima HI; dopo di essa il moto è irregolare. La pressione in HI è ancora data dalla (70), e la portata Q è un massimo.

37. Quando $p_e < p_m$, il moto semplice finora considerato (num. 29, 1.°) non può più aver luogo, e subentra il moto misto (num. 29, 2.°).

Questo moto misto sarà nel nostro caso caratterizzato dalla coesistenza della (46) colla condizione

$$1 > z'' > z_1 \tag{73}$$

poichè $p_e < p_i$, cioè $p_1 < p_0$ (num. 12).

Ed anche qui ricercheremo primieramente quale debba essere la pressione nella sezione DE, affinchè per tutta la lunghezza del tubo di efflusso sia possibile il moto a falde parallele. Diremo p_e'' la pressione cercata, e per determinarla dovremo usare delle due stesse equazioni (65) e (66) sopra trovate, ma tenendo conto della condizione (73) invece della (64).

Come radice della (65) prenderemo dunque come precedentemente $z'' = z_1''$; ma per valore di z_1, come radice della (66), dovremo prendere $z_1 = z_{12}$, invece di $z_1 = z_{11}$, per cui avremo la pressione cercata in DE

$$p_e'' = p_i \, z_{12}^{\mu}$$

Confrontando questa pressione colle p_e' e p_m, e ricordando che si ha $z_{11} > z_1'' > z_{12}$, ne dedurremo che

$$p_e' > p_m > p_e''$$

Quando la pressione esterna p_e soddisfa alla condizione

$$p_m > p_e > p_e''$$

il moto a falde parallele, analogamente a quanto sopra fu detto, si estenderà dalla sezione BC fino ad una sezione FG intermedia fra HI e DE; sezione che diremo Σ'' e che sarà determinata dalla formola

$$\frac{(\mu - 1)\left(\frac{p_m}{p_e}\right)^{\frac{\mu+1}{\mu}}}{(\mu + 1)\left(\frac{p_m}{p_e}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} - 2} = \left(\frac{\Sigma''}{A_{mi}}\right)^2 \tag{74}$$

I primi membri delle formole (72) e (74) differiscono in questo senso che nella (72) si ha $p_e > p_m$, nella (74) invece $p_e < p_m$.

Fra la sezione FG e la DE il moto diverrà irregolare.

Quando si abbia $p_e = p_e''$ il moto a falde parallele si verificherà per tutto il tubo fino alla sezione DE.

Quando finalmente $p_e < p_e''$, la pressione nell'ambiente esterno non avrà più influenza sul moto del fluido nel tubo, e quindi perdurerà lo stato limite corrispondente al valore $p_e = p_e''$ (num. 32, A).

38. Riassumendo quanto fu detto sull'efflusso dal vaso V_3, abbiamo la serie di pressioni

$$p_i > p_e' > p_m > p_e'' > 0$$

che stabiliscono una serie d'intervalli. Quando la pressione esterna p_e è compresa fra p_i e p_e' od è eguale a p_e' ha luogo il moto num. 29, 1.° per tutta la lunghezza del tubo. Quando la p_e è compresa fra p_e' e p_m il moto 29, 1.° ha luogo solamente fino alla sezione intermedia FG determinata dalla (72). Quando la p_e eguaglia la p_m il moto a falde parallele si estende solamente fino alla sezione minima HI. Quando la p_e è compresa fra p_m e p_e'' ha luogo il moto misto num. 29, 2.°; ma fino ad una sezione intermedia FG determinata dalla (74). Quando finalmente la p_e eguaglia la p_e'' o ne è inferiore il moto num. 29, 2.° ha luogo per tutta la lunghezza del tubo.

La pressione nella sezione minima HI è superiore a p_m quando la p_e è compresa fra p_i e p_e' ed allora la portata Q non è un massimo. In tutti gli altri casi la pressione nella sezione minima è eguale a p_m e la portata Q è un massimo.

39. Qualora, restando sempre nel caso del vaso V_3, i rapporti $\frac{A_0}{A_1}$ ed $\frac{A_0}{A_{mi}}$ diventano grandissimi, senza che ciò avvenga del rapporto $\frac{A_1}{A_{mi}}$, la z_1'' ricavata dalla (65) si approssima al valore ξ' num. 10, cioè si ha

$$z_1'' = \xi' = \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$$

e quindi la (66) (vedi anche num. 23) tende a trasformarsi nella

$$z_1(1 - z_1^{\mu-1}) = \frac{\mu-1}{2}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu+1}{\mu-1}}\left(\frac{A_{mi}}{A_1}\right)^2$$

la quale darà per z_1 due valori z_{11} e $z_{12} < z_{11}$. Col mezzo di questi valori avremo le due pressioni

$$p_e' = p_i z_{11}^{\mu}, \quad p_e'' = p_i z_{12}^{\mu}$$

La (70) darà poi

$$p_m = p_i z_1''^{\mu} = p_i\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \tag{75}$$

Se la pressione esterna p_e è compresa fra p_e' e p_i si avrà nella sezione minima HI una pressione $p_{m'}$, maggiore di p_m che potrà calcolarsi mediante la (58), purchè si ponga in essa $A = A_{mi}$, $z_1 = z_e = \left(\frac{p_e}{p_i}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, col che essa diventa

$$\frac{z^2(1 - z^{\mu-1})}{z_e^2(1 - z_e^{\mu-1})} = \left(\frac{A_1}{A_{mi}}\right)^2$$

Dei due valori dati da questa equazione si prenderà quello che è maggiore della z_1'' cioè della ξ': diremo $z_{m'}$ questo valore, e la pressione in HI sarà

$$p_{m'} = p_i z_{m'}^{\mu}$$

La velocità $u_{m'}$ ed il volume specifico $v_{m'}$ alla sezione HI, e la portata Q si potranno determinare coll'aiuto della formola approssimata del num. 22, esprimente la u, e col mezzo delle formole generali (18) (20)

$$u_{m'} = \sqrt{\lambda(1 - z_{m'}^{\mu-1})}, \quad v_{m'} = \frac{RT_0}{p_0 z_{m'}}, \quad Q = A_{mi}\cdot\frac{u_{m'}}{v_{m'}}$$

Nella sezione A_1 si avrà

$$u_1 = \sqrt{\lambda(1 - z_e^{\mu-1})}, \quad v_1 = \frac{RT_0}{p_0 z_e}, \quad Q = A_1\frac{u_1}{v_1}$$

Se la pressione esterna p_e è eguale o minore di p_e', la pressione nella sezione minima è sempre eguale alla p_m sopra calcolata (75), e la portata è sempre un massimo.

Quando però la pressione p_e è compresa fra p_e' e p_m, oppure fra p_m e p_e'' il moto a falde parallele si estende solo fino ad una sezione FG compresa fra HI e DE e che è determinata dalla (72) se $p_e > p_m$ e dalla (74) se $p_e < p_m$.

Queste due espressioni prendono nel caso attuale la forma comune

$$\frac{(\mu-1)\left(\frac{p_i}{p_e}\right)^{\frac{\mu+1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu+1}{\mu-1}}}{\left(\frac{p_i}{p_e}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}-1}=2\left(\frac{\Sigma}{A_{mi}}\right)^2$$

40. Se il caso del vaso V_2, num. 35, nel quale si è esplicitamente mantenuta la supposizione che la p_i rimanesse costante si considera come caso limite di quello ora trattato, nel quale i rapporti $\frac{A_0}{A_1}, \frac{A_0}{A_{mi}}$ diventano grandissimi, in luogo della pressione p_i costante nella sezione BC si avranno i valori della pressione sopra calcolata per la sezione HI. Questo modo di considerare l'efflusso mediante un tubo divergente, cioè come limite del caso del vaso V_3, corrisponde meglio indubbiamente al fenomeno fisico (vedi num. 45, 47).

41. Facciamo ora un confronto fra la portata nel caso del tubo convergente, vaso V_1 fig. 3, e la portata nel caso del vaso V_3 fig. 4, dotato di tubo prima convergente e poi divergente. Supponiamo che la pressione interna p_i sia la medesima nei due vasi, e che la sezione esterna $D_1 E_1$ nel vaso V_1 sia eguale alla sezione minima HI nel vaso V_3, e la $B_1 C_1$ eguale alla BC.

La portata nel vaso V_1 va crescendo col diminuire della pressione esterna p_e dal valore $p_e = p_i$ fino al valore $p_e = p_i \xi_1^\mu$ (num. 34), per il qual valore la portata raggiunge il massimo. Quando la p_e diventa minore di $p_i \xi_1^\mu$, la portata si mantiene al suo valore massimo.

La portata nel vaso V_3 va crescendo anch'essa col diminuire della pressione esterna p_e dal valore $p_e = p_i$ fino al valore $p_e = p_e'$, per il qual valore essa raggiunge il suo massimo; e questo massimo è eguale a quello relativo al vaso V_1. Ma $p_e' < p_i \xi_1^\mu$, dunque per raggiungere il massimo della portata nel caso del vaso V_1 bisogna abbassare la pressione esterna più che non occorra abbassarla nel caso del vaso V_3.

Se nei due casi si dà alla pressione esterna un medesimo valore p_e, compreso fra p_i e p_e', allora alla sezione $D_1 E_1$ nel primo vaso avremo la pressione p_e; mentre nel vaso V_3 avremo nella sezione HI una pressione minore di p_e e maggiore di p_m. La portata nel vaso V_3 sarà dunque maggiore. Dunque ad eguale pressione interna ed esterna, purchè l'esterna sia compresa fra p_i e p_e', dal vaso V_3 si avrà maggiore portata che dal vaso V_1. Se quindi si ha un vaso V_1, dotato di tubo convergente, e la pressione esterna sia $p_e > p_m$, ed al tubo si aggiunga un prolungamento divergente, si potrà ottenere nella $D_1 E_1$, che allora diventa una sezione minima, una diminuzione di pressione ed in pari tempo un aumento di portata, che a seconda del prolungamento aggiunto potrà anche arrivare al massimo.

In tal senso si può dunque dire che il tubo divergente aumenta la portata.

42. Accenniamo infine ad un caso di moto inverso (num. 6). Supponiamo che nella sezione DE del vaso V, fig. 6, per il quale la pressione interna sia maggiore dell'esterna p_e, si mantenga artificialmente la velocità del fluido diretta verso l'interno anzichè verso l'esterno. Avremo allora un'entrata di fluido nel vaso anzichè un'uscita dal medesimo. Si potrà teoricamente intendere realizzato il fenomeno facendo prima uscire il fluido da altro vaso V', mediante il tubo B' C' D' E', avente la bocca D' E' contrapposta alla DE. Se, per fissare le idee, la pressione interna nel vaso V' sia p_i' ed il fluido esca in un ambiente esterno, la cui pressione p_e sia tanto inferiore alla p_i' da ottenere il massimo della portata, la vena fluida potrà imboccare l'apertura DE del vaso V, ed entrare in questo con velocità e pressione corrispondenti al massimo della portata rispetto a V'. La pressione del fluido andrà diminuendo

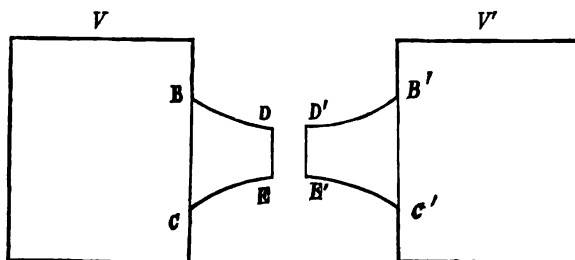



Fig. 6.

nel vaso V' dalla sezione B' C' dove ha il valore p_i' verso la sezione D' E', ed andrà poi crescendo nel vaso V dalla sezione DE alla sezione BC, dove raggiungerà un valore che diremo p_i.

Dalle formole e proprietà sopra sviluppate si deduce facilmente che scegliendo opportunamente le sezioni estreme BC e B' C' dei tubi, ed iniziando convenientemente il fenomeno si potrà far passare il fluido dal vaso V' al vaso V, e ciò anche nel caso che la pressione p_i nel vaso V sia maggiore della pressione p_i' nel vaso V'.

Un fenomeno analogo si ha, come è noto, nell'injettore Giffard.

Raccoglieremo ora alcune formole d'efflusso, relative a quei casi che furono sopra considerati, limitandoci alle espressioni della velocità, del volume specifico, della temperatura e della portata nelle sezioni più importanti.

43. *Efflusso del gas dal vaso* V_1, *Fig. 3, con tubo convergente.* — Posta la sezione $B_1 C_1 = A_0$, e la $D_1 E_1 = A_1$; date essendo la pressione interna p_i e la esterna $p_e < p_i$, come pure le costanti μ ed R relative al gas, e la sua temperatura T_0 nella sezione $B_1 C_1$, detta g la gravità, si calcoli la minore delle due radici dell'equazione (num. 48)

$$\frac{(\mu - 1)\,\xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\,\xi^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$$

e sia questa ξ_1. Allora

a) Se è soddisfatta la condizione $\xi_1{}^\mu \leqq \frac{p_e}{p_i} < 1$, si prenda $p_0 = p_i$, $p_1 = p_e$;

b) Se invece si ha $\frac{p_e}{p_i} < \xi_1{}^\mu$ si prenda $p_0 = p_i$, $p_1 = p_i \xi_1{}^\mu$.

Fissati così i valori p_0 e p_1 si calcolino le $z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, $r_1 = \frac{A_0}{z_1 A_1}$, $\lambda = \frac{2\mu g R T_0}{\mu - 1}$ e si avranno nella sezione interna $B_1 C_1$ la velocità u_0 ed il volume specifico v_0 dalle

$$u_0 = \sqrt{\frac{\lambda(1 - z_1^{\mu-1})}{r_1^2 - 1}}, \quad v_0 = \frac{RT_0}{p_0}$$

e nella sezione esterna $D_1 E_1$ la velocità u_1, il volume v_1, la temperatura T_1 e la portata Q dalle

$$u_1 = r_1 u_0, \quad v_1 = \frac{v_0}{z_1}, \quad T_1 = T_0 z_1^{\mu-1}, \quad Q = A_0 \frac{u_0}{v_0} = A_1 \frac{u_1}{v_1}$$

ed $\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}$ saranno le portate specifiche rispettivamente nelle due sezioni $B_1 C_1$ e $D_1 E_1$.

44. Se il rapporto $\frac{A_0}{A_1}$ diventa grandissimo si può prendere per approssimazione $\xi_1 = \xi'$ (num. 21), ed allora, attesa la (35) avremo la seguente regola per il calcolo dell'efflusso.

a') Se sia soddisfatta la condizione $\left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \gtreqless \frac{p_e}{p_i} < 1$, si prenda $p_0 = p_i$, $p_1 = p_e$;

b') Se invece si ha $\frac{p_e}{p_i} < \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$ si prenda $p_0 = p_i$, $p_1 = p_i \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$

Posto poi come sopra

$$z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad \lambda = \frac{2\mu g R T_0}{\mu - 1}$$

si avranno, avuto riguardo al num. (23), nella sezione $D_1 E_1$ la velocità u_1, il volume specifico v_1, la temperatura T_1 e la portata Q dalle formole

$$u_1 = \sqrt{\lambda(1 - z_1^{\mu-1})}, \quad v_1 = \frac{v_0}{z_1} = \frac{RT_0}{p_0 z_1}, \quad T_1 = T_0 z_1^{\mu-1}, \quad Q = A_1 \frac{u_1}{v_1}$$

Il caso di efflusso in lastra sottile può considerarsi come limite del caso in cui $\frac{A_0}{A_1}$ diventi grandissimo, in quanto però si possa mantenere la supposizione del moto a falde parallele. Quindi il procedimento indicato in *a'*) e *b'*) sarà allora applicabile all'efflusso in lastra sottile.

Notiamo intanto che quando la pressione esterna p_e soddisfa alla equazione $p_e = p_i \xi_1^{\mu}$ siamo nel caso della prima delle (52) e quindi la portata Q è la massima possibile. Questa pressione, che dà il massimo Q quando il rapporto $\frac{A_0}{A_1}$ diventi grandissimo, per quanto sopra si è osservato, si approssima al valore

$$p_e = p_i \left(\frac{2}{\mu+1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}$$

Confrontando ora il risultato della ricerca intorno al massimo di Q (num. 19) colle norme *a*) e *b*) sopra esposte, potremo dire che quando sia

$$p_e \mathrel{\overline{\lesseqgtr}} p_1 \xi_1^{\mu}$$

si ha sempre il massimo della portata Q, considerata come funzione di p_e.

45. *Efflusso del gas dal vaso* V_2, *fig. 3, con tubo divergente.* — Date le sezioni $B_2 C_2 = S_2$, $D_2 E_2 = S_2'$, la pressione interna p_i, che supporremo costante nella sezione $B_2 C_2$, e la esterna $p_e < p_i$; date le costanti μ ed R relative al gas, e la sua temperatura T_1 nella sezione $B_2 C_2$, essendo g la gravità, si calcoli la maggiore delle due radici dell'equazione (num. 48)

$$\frac{(\mu - 1)\, \xi^{\mu+1}}{(\mu + 1)\, \xi^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^2$$

e sia questa ξ_2. Allora

a) Se

$$\left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu} < \frac{p_i}{p_e} \mathrel{\overline{\lesseqgtr}} \xi_2^{\mu}$$

si prenda $A_0 = S_2'$, $A_1 = S_2$, $p_0 = p_e$, $p_1 = p_i$, $T_0 = T_1\, \xi_2^{1-\mu}$

b) Se invece

$$\frac{p_i}{p_e} > \xi_2^{\mu}$$

si prenda $A_0 = S_2'$, $A_1 = S_2$, $p_0 = p_i\, \xi_2^{-\mu}$, $p_1 = p_i$

Fissate così le A_0, A_1, p_0, p_1 si calcolino le

$$y_1 = \frac{A_0}{A_1}, \quad z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad r_1 = \frac{y_1}{z_1}, \quad \lambda = \frac{2\mu g\, RT_0}{\mu - 1}$$

e si avranno nella sezione esterna A_0 la temperatura T_0, la velocità u_0 ed il volume specifico v_0 dalle

$$T_0 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \quad v_0 = \frac{RT_0}{p_0}, \quad u_0 = \sqrt{\frac{\lambda\, (z_1^{\mu-1} - 1)}{1 - r_1^2}}$$

e nella sezione interna $B_2 C_2$ la velocità u_1 ed il volume specifico v_1 dalle

$$u_1 = r_1\, u_0, \qquad v_1 = \frac{v_0}{z_1}$$

La portata Q sarà data da

$$Q = A_0 \frac{u_0}{v_0} = A_1 \frac{u_1}{v_1}$$

ed $\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1}$ saranno le portate specifiche rispettivamente nelle due sezioni A_0 ed A_1.

Il caso

$$\frac{p_i}{p_e} \mathrel{\overline{\lesseqgtr}} \left(\frac{S_2'}{S_2}\right)^{\mu}$$

si sottrae, analiticamente parlando, al sistema di formole sopra sviluppato; poichè si

cade nel caso $z_1 = y_1$, oppure trovasi verificata la (27). Il moto quindi non avviene più a falde parallele come fu ideato, e le formole superiori sono inette ad esprimere quantitativamente il fenomeno d'efflusso (num. 28).

Lasciando poi l'ipotesi che la pressione p_i resti inalterata nella sezione BC ed eguale a quella interna del vaso (num. 35,40), alle formole qui esposte dovranno sostituirsi quelle date al num. 47, che corrispondono al limite, a cui riducesi il caso del vaso V_3, quando i rapporti $\frac{A_0}{A_1}, \frac{A_0}{A_{mi}}$ diventino grandissimi.

46. *Efflusso del gas dal vaso* V_3, *fig. 4, con tubo prima convergente e poi divergente.* — Date le sezioni $BC = A_0$, $DE = A_1 < A_0$ e la minima $HI = A_{mi}$, data la pressione interna p_i e la esterna $p_e < p_i$, date le costanti μ ed R relative al gas, e la sua temperatura T_0 nella sezione BC, essendo g la gravità, si calcoli la minore delle due radici dell'equazione (num. 48)

$$\frac{(\mu - 1)\, z''^{\mu+1}}{(\mu + 1)\, z''^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{A_0}{A_{mi}}\right)^2 \tag{76}$$

Sia questa radice $z'' = z_1''$. Con essa si formi l'equazione

$$\frac{(\mu - 1)\left(\frac{z_1''}{z_1'}\right)^{\mu+1}}{(\mu + 1)\left(\frac{z_1''}{z_1'}\right)^{\mu-1} - 2} = \left(\frac{A_1}{A_{mi}}\right)^2$$

e riguardandone la z_1' come incognita, si calcoli il maggiore dei suoi due valori: sia questo $z_1' = z_{11}$. Si prenda allora

$$p_e' = p_i\, z_{11}^{\mu}$$

a) Ciò premesso, se la data pressione esterna p_e soddisfa alla

$$p_i > p_e > p_e'$$

si ponga $p_0 = p_i, p_1 = p_e$ e si calcolino le

$$z_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad r_1 = \frac{A_0}{z_1 A_1}, \quad \lambda = \frac{2\mu g R T_0}{\mu - 1}$$

Si avrà allora nella sezione BC la velocità u_0, il volume specifico v_0, e la portata Q dalle

$$u_0 = \sqrt{\frac{\lambda(1 - z_1^{\mu-1})}{r_1^2 - 1}}, \quad v_0 = \frac{RT_0}{p_0}, \quad Q = A_0 \frac{u_0}{v_0}$$

La velocità, il volume specifico, e la temperatura nelle sezioni HI e DE si avranno dalle formole generali (14), (18) e (19), tenendo conto dell'osservazione al num. 14, relativa ai due valori della z.

b) Se invece si abbia $p_e \overline{\leqq} p_e'$, allora

α) Nella sezione BC la velocità u_0 ed il volume specifico v_0 si calcolano ancora colle stesse formole esposte ad *a*), ponendo però in esse $p_1 = p_e'$.

β) Nella sezione minima HI la velocità u_m, il volume specifico v_m, e la temperatura T_m saranno dati da

$$u_m = \frac{A_0 u_0}{A_{mi} z_1''}, \quad v_m = \frac{RT_0}{p_0 z_1''}, \quad T_m = T_0 z_1''^{\mu-1}$$

dove z_1'' è la radice della (76) sopra calcolata.

γ) La portata Q nel caso *b*) è sempre un massimo ed è data da

$$Q = A_0 \frac{u_0}{v_0} = A_{mi} \frac{u_m}{v_m}$$

Nel caso *b*) il moto a falde parallele non avrà luogo in generale per tutta la lunghezza del tubo d'efflusso, ma solamente fino ad una sezione FG intermedia fra la HI e la DE.

47. Quando i rapporti $\frac{A_0}{A_1}, \frac{A_0}{A_{mi}}$ diventano grandissimi (num. 22) possono per approssimazione servire le seguenti formole.

Sia z_{11} la maggiore delle due radici dell'equazione (num. 48)

$$z_1^2 (1 - z_1^{\mu-1}) = \frac{\mu - 1}{2} \left(\frac{2}{\mu + 1}\right)^{\frac{\mu+1}{\mu-1}} \left(\frac{A_{mi}}{A_1}\right)^2$$

e si ponga $p'_e = p_i z_{11}^{\mu}$. Allora

α) Se la data pressione esterna p_e soddisfa alla

$$p_i > p_e \geqq p'_e$$

posto $z_e = \left(\frac{p_e}{p_i}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, si avrà nella sezione estrema DE la velocità u_1 ed il volume specifico v_1 dalle

$$u_1 = \sqrt{\lambda(1 - z_e^{\mu-1})}, \quad v_1 = \frac{RT_0}{p_0 z_e}, \quad \text{dove } \lambda = \frac{2\mu g RT_0}{\mu - 1}$$

Si calcoli poi la maggiore delle due radici dell'equazione (num. 48)

$$\frac{z^2 (1 - z^{\mu-1})}{z_e^2 (1 - z_e^{\mu-1})} = \left(\frac{A_1}{A_{mi}}\right)^2$$

e sia questa z_n. Si avrà allora nella sezione minima HI la pressione p_n, la velocità u_n ed il volume specifico v_n dalle

$$p_n = p_i z_n^{\mu}, \quad u_n = \frac{u_1 z_{11}}{z_n} \cdot \frac{A_1}{A_{mi}}, \quad v_n = \frac{RT_0}{p_0 z_n}$$

La portata sarà

$$Q = A_1 \frac{u_1}{v_1} = A_{mi} \frac{u_n}{v_n}$$

β) Se la data pressione esterna p_e è minore di p_e', servono ancora per la sezione HI le formole esposte ad α), purchè nel calcolarle si ponga $z_e = \left(\frac{p_e'}{p_i}\right)^{\frac{1}{\mu}}$. Le u_1 e v_1 servono allora come quantità ausiliarie di calcolo, ma non hanno più il significato fisico relativo alla sezione DE, che posseggono nel caso α).

La portata è sempre un massimo ed è data da

$$Q = A_{mi} \frac{u_n}{v_n}$$

Le formole di questo numero 47 possono servire anche per l'efflusso considerato al num. 45, con tubo divergente, qualora questo si consideri come limite del caso considerato al num. 47. Basterà allora porre $A_{mi} = B_2 C_2 = S_2$, ed $A_1 = D_2 E_2 = S_2'$ (fig. 3).

Osservazioni

48. Nelle superiori ricerche vien domandato frequentemente di trovare i due valori di z determinati da un'equazione della forma

$$z^2 (a - b z^{\mu-1}) = h_1$$

oppure i due valori di ξ determinati da un'equazione della forma

$$\frac{(\mu - 1) \xi^{\mu+1}}{(\mu + 1) \xi^{\mu-1} - 2} = h_2$$

Queste due forme d'equazione si riducono ad una forma unica, ponendo nella prima

$$(\alpha) \qquad s = \frac{2}{\mu - 1}, \quad z = \left(\frac{a \omega}{b}\right)^{\frac{s}{2}}, \quad k = \frac{h_1}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^s$$

e ponendo nella seconda

$$(\beta) \qquad s = \frac{2}{\mu - 1}, \quad \xi = \left(\frac{s}{(s+1)\omega}\right)^{\frac{s}{2}}, \quad k = \frac{1}{s h_2} \left(\frac{s}{s+1}\right)^{s+1}$$

Ambedue si trasformano allora nella

$$(\gamma) \qquad (1 - \omega) \omega^s = k$$

che meglio si presta al calcolo numerico delle radici. Trovati mediante quest'ultima i due valori di ω, si avranno i due valori di z, oppure i due di ξ dalla seconda delle (α), oppure delle (β).

Se nella

$$(\delta) \qquad k \gtreqless \frac{1}{s+1} \left(\frac{s}{s+1}\right)^s$$

ha luogo il segno superiore, la (γ) dà per ω valori immaginari; se ha luogo il segno

medio, essa dà due radici reali eguali, il cui valore comune è $\omega_e = \frac{s}{s+1}$; se infine ha luogo il segno inferiore, essa dà due radici reali diverse ω_1 ed ω_2, una minore ed una maggiore di ω_e.

La curva $\zeta = (1-\omega)\,\omega^s$ ha un andamento simile alla OPQR (fig. 1), con un flesso per l'ascissa $\omega_f = \frac{s-1}{s+1}$; essa taglia l'asse delle ascisse per $\omega' = 1$.

Se ω_n sia un valore approssimato di una radice della (γ) si calcoli l'ordinata ζ_n e la tangente t_n mediante le

$$\zeta_n = (1-\omega_n)\,\omega_n{}^s\,, \quad t_n = \{ s - (s+1)\,\omega_n \}\,\omega_n{}^{s-1}$$

e si avrà un valore più approssimato ω_{n+1}, prendendo

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{k - \zeta_n}{t_n}$$

Mediante il valore ω_{n+1} si potrà poi trovare un valore ω_{n+2} ancora più approssimato, e così via. Questo procedimento d'approssimazione, considerato in generale, può talvolta cadere in difetto. Esso però non cade mai in difetto, se per primo valore approssimato ω_0 si prende l'ascissa del flesso $\omega_0 = \frac{s-1}{s+1}$: allora esso condurrà sempre al minore dei due valori di ω, cioè ad ω_1. Se invece per primo valore approssimato ω_0 si prende l'ascissa dell'intersezione coll'asse $\omega_0 = \omega' = 1$, il procedimento condurrà sempre al maggiore dei due valori di ω, cioè ad ω_2.

Se, come vuole il Lucas [1], si adotta per μ il valore $\mu = 1{,}40$, si ha $s = 5$. Le (β), (γ) e la condizione (δ) diventano rispettivamente

$$(\beta') \qquad s = 5\,, \quad \xi = \sqrt{\left(\frac{5}{6\,\omega}\right)^5}\,, \quad k = \frac{1}{5\,h_2}\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$(\gamma') \qquad (1-\omega)\,\omega^5 = k\,, \qquad (\delta') \quad k \gtreqless \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Le radici reali eguali hanno il valore $\omega_e = \frac{5}{6}$, e l'ascissa del flesso $\omega_f = \frac{3}{4}$.

49. I risultati numerici dati dalle formole d'efflusso sopra esposte, num. 43-47, sono naturalmente basati sulle supposizioni teoriche fatte riguardo al moto, che cioè esso avvenga in falde parallele, adiabaticamente, senza attrito. Siccome in pratica ciò non può verificarsi che in certe favorevoli circostanze, e sempre in modo approssimativo, così i risultati dell'osservazione differiranno più o meno dai risultati teorici. Un'altra fonte di differenza fra gli uni e gli altri può sorgere dalla difficoltà di assegnare le sezioni estreme, e la sezione minima del tubo d'efflusso; poichè a rigore non si devono prendere le sezioni estreme materiali del tubo solido, ma quelle dell'involucro liquido, che fisicamente si stabilisce sia in sostituzione del tubo solido, quando questo manchi, sia in prolungamento eventuale da ambe le parti del tubo

[1] Lucas, Comptes rendus, vol. 103; *Sur le coefficient de détente d'un gaz parfait.*

solido, quando questo per la sua forma non accompagni convenientemente l'andamento dei fili fluidi (num. 30). Anche la contrazione della vena fluida rientra in questa osservazione.

La questione se dal punto di vista delle applicazioni pratiche sia possibile (e fino a che punto) ridurre i risultati delle formole teoriche a quelli dell'osservazione mediante un coefficiente (come usano molti autori) analogo a quello usato per l'efflusso dei liquidi, non può essere risolta che con un accurato confronto delle formole teoriche coll'esperienza, sia utilizzando le molte osservazioni già fatte, sia facendone di nuove. Tale confronto fra i risultati teorici ed i pratici esce del resto dai limiti fissati al presente studio.

INDICE DEL VOL. I — SERIE 5ª

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

All'elenco delle pubblicazioni di Giuseppe Battaglini (pag. 607) va aggiunta la seguente:

Sulla omografia delle figure,

inserita nei vol. I (pag. 121-131) e II (pag. 272-289) del periodico *Il Giambattista Vico, Giornale scientifico fondato e pubblicato sotto gli auspici di Sua Altezza Reale il Conte di Siracusa.* Vi sono esposte le proprietà fondamentali della omografia nei campi binario, ternario e quaternario.

Devo questa indicazione all'egregio prof. G. Loria.

E. D'OVIDIO.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV. (1895) 2° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*